Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 165

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1931

Inhaltsverzeichnis des Bandes 165.

Seite

Bieberbach, Ludwig, Bemerkungen zum dreizehnten Hilbertschen Problem 89

Blumenthal, Otto, Über rationale Polynome mit einer Minimumseigenschaft . . . 237

Carathéodory, C., Ein dem Vitalischen analoger Satz für analytische Funktionen von mehreren Veränderlichen 180

Courant, R., Neue Bemerkungen zum Dirichletschen Prinzip 247

Fekete, M., Über den Schottkyschen Satz 217

Hasse, Helmut, Neue Begründung der komplexen Multiplikation II 64

Hensel, Kurt, Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Variablen I 257

Hopf, Eberhard, Kleine Bemerkung zur Theorie der elliptischen Differentialgleichungen 50

Hopf, Heinz, Beiträge zur Klassifizierung der Flächenabbildungen 225

Jacobsthal, Ernst, Über das Schwarzsche Lemma 59

Jung, Heinrich W. E., Algebraische Funktionen von zwei Veränderlichen I . . . 128

Kopff, A., Über das systematische Verhalten der Katalogörter der Sterne der 7. bis 9. Größe 93

König, Robert, und **Maximilian Krafft,** Über Primfunktionen 96

Köthe, Gottfried, und **Otto Toeplitz,** Theorie der halbfiniten unendlichen Matrizen 116

Landau, Edmund, Neuer Beweis eines Minkowskischen Satzes 1

Lichtenstein, Leon, Zur Variationsrechnung II 194

v. Mises, R., Über einige Abschätzungen von Erwartungswerten 184

v. Neumann, J., Algebraische Repräsentanten der Funktionen „bis auf eine Menge vom Maße Null“ 109

Pólya, G., und **G. Szegö,** Über den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und räumlichen Punktmengen 4

Remak, Robert, Elementare Abschätzungen von Fundamentaleinheiten und des Regulators eines algebraischen Zahlkörpers 159

Schur, J., Affektlose Gleichungen in der Theorie der Laguerreschen und Hermiteschen Polynome 52

Neuer Beweis eines Minkowskischen Satzes.

Von *Edmund Landau* in Göttingen.

Einleitung.

Alle Zahlen in dieser Arbeit sind reell, $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$.

Es handelt sich um den Minkowskischen Satz, der in den drei gleichbedeutenden Fassungen ausgesprochen werden kann:

Satz 1: 1. *Für beliebige* $\varkappa, \lambda$ *gibt es ganze* x, y *mit*

$$|(\alpha x + \beta y + \varkappa)(\gamma x + \delta y + \lambda)| \leqq \frac{1}{4}.$$

2. *Für beliebige* μ, ν *gibt es ganze* x, y *mit*

$$|(\alpha(x+\mu) + \beta(y+\nu))(\gamma(x+\mu) + \delta(y+\nu))| \leqq \frac{1}{4}.$$

3. *Für beliebige* μ, ν *gibt es* x, y *mit*

$$x \equiv \mu, y \equiv \nu \pmod 1, \quad |(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y)| \leqq \frac{1}{4}.$$

Den ersten arithmetischen Beweis dieses Satzes gab Herr Remak [1]); dieser Beweis wurde dann von Herrn Mordell [2]) umgearbeitet.

Ich werde zeigen, daß der entscheidende Hilfssatz beider Autoren [3]) unnötig ist; nach trivialen Vorbemerkungen wird mein Beweis von Satz 1 nur zwei Zeilen lang sein.

Beide Autoren benutzen außerdem nur noch den bekannten

Satz 2 [4]): *Es gibt ganze* $x, y \neq 0, 0$ *mit*

$$|(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y)| \leqq 1.$$

Herr Remak begründet dies durch die übliche Reduktionsmethode der indefiniten quadratischen Formen; Herr Mordell entnimmt es aus dem viel tiefer liegenden Minkowskischen

Satz 3: *Es gibt ganze* $x, y \neq 0, \ 0$ *mit*

$$|\alpha x + \beta y| \leqq 1, \ |\gamma x + \delta y| \leqq 1.$$

Ich benutze statt Satz 2 den wohlbekannten (schärferen, nicht in Satz 3 enthaltenen, aber viel weniger tief als Satz 3 liegenden)

---

[1]) *Neuer Beweis eines Minkowskischen Satzes* [dieses Journal, Bd. **142** (1913), S. 278—282]. Wie Verf. erwähnt, hatte Frobenius die ursprüngliche Fassung wesentlich abgekürzt.

[2]) *Minkowski's theorem on the product of two linear forms* [The Journal of The London Mathematical Society, Bd. **3** (1928), S. 19—22].

[3]) II, III bei Herrn Remak, second lemma bei Herrn Mordell.

[4]) I bei Herrn Remak, first lemma bei Herrn Mordell.

Satz 4: *Es gibt ganze* $x, y \neq 0, 0$ *mit*

$$|(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y)| \leqq \frac{1}{2}.$$

Durch Zusammenstellung geläufiger Schlußweisen zeige ich für den ungeübten Leser im Anhang, daß Satz 4 aus der Fundamentaleigenschaft der Fareybrüche abgelesen werden kann.

Auf Grund von Satz 4 darf zum Beweise von Satz 1 o. B. d. A. $|\alpha\gamma| \leqq \frac{1}{2}$ angenommen werden. Denn nach Satz 4 gibt es teilerfremde l, n mit

$$|(\alpha l + \beta n)(\gamma l + \delta n)| \leqq \frac{1}{2};$$

werden ganze m, r mit $lr - mn = 1$ gewählt, so geht $(\alpha x + \beta y + \varkappa)(\gamma x + \delta y + \lambda)$ durch $\begin{pmatrix} l & m \\ n & r \end{pmatrix}$ in $(\alpha' x' + \beta' y' + \varkappa)(\gamma' x' + \delta' y' + \lambda)$ mit $|\alpha'\gamma'| \leqq \frac{1}{2}$ über.

Der Fall $\alpha\gamma = 0$ ist trivial; denn o. B. d. A. sei $\gamma = 0$, also

$$(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y) = (\pm x + \beta\delta y) y;$$

man wähle nun sukzessive y, x mit

$$y \equiv \nu \pmod 1,\ |y| \leqq \frac{1}{2};\quad x \equiv \mu \pmod 1,\ |\pm x + \beta\delta y| \leqq \frac{1}{2}.$$

Es darf also $0 < |\alpha\gamma| \leqq \frac{1}{2}$ angenommen werden. Offenbar genügt es, zu den gegebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Zahlen $\varrho, \sigma, \tau, \sigma', \tau'$ so zu bestimmen, daß identisch

$$(x + \varrho y)^2 + y^2 - 2(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y) = (\sigma x + \tau y)^2$$

und

$$(x + \varrho y)^2 + y^2 + 2(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y) = (\sigma' x + \tau' y)^2.$$

Denn dann ist

$$2\,|(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y)| \leqq (x + \varrho y)^2 + y^2,$$

und man wähle sukzessive y, x mit

$$y \equiv \nu \pmod 1,\ |y| \leqq \frac{1}{2};\quad x \equiv \mu \pmod 1,\ |x + \varrho y| \leqq \frac{1}{2}.$$

Hauptteil.

$$\left(x + \frac{\alpha\delta + \beta\gamma - \sqrt{1 - 4\alpha^2\gamma^2}}{2\alpha\gamma}\, y\right)^2 + y^2 \mp 2(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y)$$
$$= \left(\left(x + y\,\frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{2\alpha\gamma}\right)\sqrt{1 \mp 2\alpha\gamma} - \frac{y}{2\alpha\gamma}\sqrt{1 \pm 2\alpha\gamma}\right)^2.$$

Anhang.

Es ist gleichgültig, ob ich von $(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y)$ mit $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ oder von $ax^2 + bxy + cy^2$ mit $b^2 - 4ac = 1$ rede; denn in

$$(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

ist ja

$$b^2 - 4ac = (\alpha\delta + \beta\gamma)^2 - 4\alpha\beta\gamma\delta = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2.$$

Es genügt zu zeigen, daß

$$|ax^2 + bxy + cy^2| \leqq \frac{1}{2}$$

eine ganzzahlige Lösung $x, y \neq 0, 0$ hat. O. B. d. A. sei $a > \frac{1}{2}$. Nach der Fundamentaleigenschaft der Fareybrüche [5]) gibt es ganze x, y mit

$$0 < y \leqq \sqrt{2a}, \quad \left| -\frac{b}{2a} - \frac{x}{y} \right| < \frac{1}{y\sqrt{2a}},$$

also

$$ax^2 + bxy + cy^2 = a\left(x + y\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{y^2}{4a} \begin{cases} < a\frac{1}{2a} = \frac{1}{2}, \\ \geqq -\frac{y^2}{4a} \geqq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

[5]) Satz 159 meiner *Vorlesungen über Zahlentheorie.*

Göttingen, den 16. November 1930.

Eingegangen am 17. November 1930.

Über den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und räumlichen Punktmengen.

Von *G. Pólya* in Zürich und *G. Szegö* in Königsberg.

Einleitung.

Den Ausgangspunkt dieser Arbeit bilden drei unten zu definierende nichtnegative, monotone Mengenfunktionen

$$r = r(\mathfrak{M}), \quad d = d(\mathfrak{M}), \quad k = k(\mathfrak{M}),$$

die für eine beliebige ebene, beschränkte und abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{M}$ erklärt sind und sich bei Ähnlichkeitstransformationen der Menge wie die linearen Abmessungen ändern. Die beiden ersten Funktionen wurden von Herrn M. Fekete [1]) eingeführt, die dritte ist aus der Potentialtheorie bekannt (vgl. unten). Das Ziel der nachfolgenden Betrachtungen ist, diese drei Mengenfunktionen in natürlicher Weise auf den dreidimensionalen Raum zu übertragen und dort analoge Sätze aufzustellen, wie sie im zweidimensionalen Falle durch die Untersuchungen von Herrn Fekete und anderen bekannt sind. Zu diesem Zwecke wollen wir vorher die Hauptsätze der „zweidimensionalen Theorie" kurz zusammenfassen, und zwar unter besonderer Hervorhebung ihrer geometrischen Bedeutung. Dadurch wird die Übertragung auf den Raum wesentlich erleichtert.

Wir bezeichnen im folgenden mit $p, q, p_1, p_2, \ldots$ gewisse Punkte der Ebene, mit $|pq|$ den Abstand von p und q.

I. *Definition von* $r(\mathfrak{M})$. Es seien $p_1, p_2, \ldots, p_n$ beliebige feste Punkte und p möge die gegebene Menge $\mathfrak{M}$ durchlaufen. Dann hat das geometrische Mittel der n Strecken, die von den festen Punkten zu dem variablen Punkte gezogen sind, d. h.

$$\sqrt[n]{|pp_1|\,|pp_2|\ldots|pp_n|}$$

ein wohlbestimmtes Maximum. Dieses Maximum ist eine Funktion der n Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$, die wir jetzt, nachträglich, als veränderlich ansehen wollen; diese Funktion erreicht, wenn $p_1, p_2, \ldots, p_n$ unabhängig voneinander die ganze Ebene durchlaufen, ein wohlbestimmtes Minimum, das wir mit $r_n = r_n(\mathfrak{M})$ bezeichnen wollen. Es ist also r_n ein „minimum maximorum",

$$(1) \qquad r_n = \operatorname*{Min}_{(p_\nu)} \operatorname*{Max}_{(p \text{ auf } \mathfrak{M})} \sqrt[n]{|pp_1|\,|pp_2|\ldots|pp_n|}\,.$$

Übrigens ist das Punktsystem $p_1, p_2, \ldots, p_n$, für welches r_n erreicht wird, bis auf die

[1]) Siehe Fekete, 6. (Die Zahlen beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit.) Wir lassen in der vorliegenden Arbeit (im Gegensatz zu Herrn Fekete) auch aus endlich vielen Punkten bestehende Mengen $\mathfrak{M}$ zu, für welche alle Schlüsse gültig bleiben; allerdings wird dann $r = d = k = 0$ (vgl. jedoch § 7, 1). Ausgeschlossen bleibt stets die leere Menge.

Reihenfolge der Punkte *eindeutig* bestimmt, falls die Menge $\mathfrak{M}$ unendlich viele Punkte enthält [2]).

Herr Fekete beweist nun in seiner oben zitierten Arbeit, daß die eben definierte Folge

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$$

gegen einen Grenzwert konvergiert. Wir setzen

$$\lim_{n\to\infty} r_n = r = r(\mathfrak{M}). \tag{2}$$

II. *Definition von* $d(\mathfrak{M})$. Die n Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ mögen unabhängig voneinander die Menge $\mathfrak{M}$ durchlaufen, $n \geqq 2$. Das Maximum des Produktes

$$\begin{aligned} V_n = |p_1p_2|\,|p_1p_3|\ldots|p_1p_n| \\ |p_2p_3|\ldots|p_2p_n| \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ |p_{n-1}p_n| = \prod_{\mu<\nu}^{1,2\ldots,n} |p_\mu p_\nu| \end{aligned}$$

aller $\binom{n}{2}$ gegenseitigen Entfernungen bezeichnen wir mit

$$\operatorname*{Max}_{(p_\nu \text{ auf } \mathfrak{M})} V_n = d_n^{\binom{n}{2}}. \tag{3}$$

Herr Fekete beweist a. a. O., daß die Folge

$$d_2, d_3, \ldots, d_n, \ldots$$

gegen einen Grenzwert konvergiert. Er nennt

$$\lim_{n\to\infty} d_n = d = d(\mathfrak{M}) \tag{4}$$

den *transfiniten Durchmesser* von $\mathfrak{M}$.

III. *Definition von* $k(\mathfrak{M})$ [3]). Entfernt man aus der Ebene die abgeschlossene Menge $\mathfrak{M}$, so bleibt eine offene Menge übrig, die aus endlich vielen oder abzählbar unendlich vielen zusammenhängenden Gebieten besteht. Es seien diese

$$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_m, \ldots$$

und $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}$ bezeichne dasjenige, durch $\mathfrak{M}$ eindeutig bestimmte zusammenhängende Gebiet, das den unendlich fernen Punkt enthält.

Der Rand von $\mathfrak{G}$ bestehe zunächst aus endlich vielen geschlossenen analytischen Kurven. Es gibt dann eine eindeutig bestimmte, in $\mathfrak{G}$ reguläre, harmonische Funktion u, die auf dem Rande von $\mathfrak{G}$ konstant ist und im Unendlichen eine Entwicklung von der Form

$$u = \log\frac{1}{\varrho} + \frac{a_1\cos\varphi + b_1\sin\varphi}{\varrho} + \frac{a_2\cos 2\varphi + b_2\sin 2\varphi}{\varrho^2} + \cdots \tag{5}$$

gestattet, wobei ϱ und φ Polarkoordinaten bedeuten ($a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ sind reelle Konstanten). Wir schreiben den konstanten Wert von u auf dem Rande von $\mathfrak{G}$ in der Form $u = \log\frac{1}{k}$ und nennen die so definierte Zahl k die *Kapazitätskonstante* von $\mathfrak{M}$.

Ist nun $\mathfrak{G}$ ein beliebiges, den unendlich fernen Punkt enthaltendes zusammenhängendes Gebiet, so kann man immer eine Folge von Gebieten derselben Art

---

[2]) Dies folgt aus Sätzen von de la Vallée Poussin, 33 und Tonelli, 32.

[3]) Für das Folgende vgl. Kellogg, 16, Chapter XI, 13—20, insbes. 19 (S. 330); es wird dort durchweg der völlig analoge räumliche Fall behandelt.

$$\mathfrak{G}^{(1)}, \mathfrak{G}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{G}^{(\nu)}, \ldots$$

angeben, die alle in $\mathfrak{G}$ liegen, gegen $\mathfrak{G}$ konvergieren, deren Ränder ferner stets aus endlich vielen analytischen Kurven bestehen. Es sei $k^{(\nu)}$ die Kapazitätskonstante von $\mathfrak{G}^{(\nu)}$. Es läßt sich zeigen, daß die Folge

$$k^{(1)}, k^{(2)}, \ldots, k^{(\nu)}, \ldots$$

gegen einen Grenzwert konvergiert, der von der Wahl der Gebiete $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ nicht abhängt. Wir nennen

$$\lim_{\nu\to\infty} k^{(\nu)} = k = k(\mathfrak{M}) \tag{6}$$

die Kapazitätskonstante von $\mathfrak{M}$.

Bemerkungen und Beispiele zu diesen Definitionen finden sich unten in § 1.

Das Hauptresultat lautet nun in diesem zweidimensionalen Falle folgendermaßen: *Es sei $\mathfrak{M}$ eine beliebige ebene, beschränkte und abgeschlossene Punktmenge. Dann ist*

$$r(\mathfrak{M}) = d(\mathfrak{M}) = k(\mathfrak{M}). \tag{7}$$

Wir nennen diesen gemeinsamen Zahlenwert den *transfiniten Durchmesser* oder die *Kapazitätskonstante* der gegebenen Menge $\mathfrak{M}$.

Die Gleichung $r = d$ ist von Fekete a. a. O. bewiesen worden. Die weitere Gleichung $r = k$ findet sich zum ersten Male bei G. Szegö [4]).

* * *

Deutet man die Punkte der Ebene als komplexe Zahlen und entsprechen den Punkten $p_1, p_2, \ldots, p_n, p$ die komplexen Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n, z$, so wird das in der Definition von $r(\mathfrak{M})$ vorkommende Produkt

$$|p\,p_1|\,|p\,p_2|\ldots|p\,p_n| = |(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)| = |t_n(z)|,$$

wo $t_n(z)$ ein Polynom n-ten Grades bezeichnet, in dem z^n den Koeffizienten 1 besitzt. Ist also $\mathfrak{M}$ eine geschlossene analytische Kurve, so stimmt die in I definierte Zahl r_n^n mit dem Maximalbetrag des von Herrn Faber eingeführten *Tschebyscheffschen Polynoms* auf der Menge $\mathfrak{M}$ überein [5]). Auch die Definition II ist von Herrn Fekete, unter Hervorhebung der geometrischen Bedeutung, mittels komplexer Zahlen gegeben worden. Noch wesentlicher ist aber der Umstand, daß sein Beweis für $r = d$ in weitgehendem Maße von dem Rechnen mit komplexen Zahlen Gebrauch macht.

Die obige Formulierung der Definition der Zahlen r_n, d_n, r, d hebt ihren geometrischen Charakter klar hervor. Sie hat ferner den Vorteil, daß sie eine natürliche Übertragung dieser Begriffe auf den dreidimensionalen Raum nahelegt. Schreibt man nämlich die Gleichungen (1) und (3) in der Form

$$\operatorname*{Max}_{(p_\nu)} \operatorname*{Min}_{(p \text{ auf } \mathfrak{M})} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \log \frac{1}{|p\,p_\nu|} = \log \frac{1}{r_n} \tag{1'}$$

bezw.

$$\operatorname*{Min}_{(p_\nu \text{ auf } \mathfrak{M})} \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n} \log \frac{1}{|p_\mu p_\nu|} = \log \frac{1}{d_n}, \tag{3'}$$

so hat man nur, zu diesem Zwecke, der Analogie zwischen dem logarithmischen und Newtonschen Potential entsprechend, die Funktion $\log \frac{1}{r}$ durch $\frac{1}{r}$ zu ersetzen. Es lassen

[4]) Szegö, 29.
[5]) Faber, 3.

sich dann tatsächlich die wesentlichen Definitionen und Sätze auf den Raum übertragen. Wir erhalten so (§ 2) wieder drei Mengenfunktionen

$$R(\mathfrak{M}), \quad D(\mathfrak{M}), \quad K(\mathfrak{M}),$$

wobei nun $\mathfrak{M}$ eine beliebige räumliche, beschränkte und abgeschlossene Menge bedeutet. Der Hauptsatz dieses dreidimensionalen Falles lautet analog zu (7) (vgl. § 3)

$$R(\mathfrak{M}) = D(\mathfrak{M}) = K(\mathfrak{M}). \tag{8}$$

Besonders abweichend von dem ebenen Falle ist der Beweis von $R = D$. Die dazu verwendete Schlußweise kann übrigens auch in dem ebenen Falle benutzt werden; man erhält auf diese Weise zugleich eine neue Begründung der Gleichung $r = d$, die von der Feketeschen gänzlich verschieden ist. § 4 enthält Bemerkungen und Beispiele zum Hauptsatze. Weiter definieren wir im § 5 durch gewisse Extremalforderungen zwei Mengenfunktionen $R^{(\lambda)}(\mathfrak{M})$ und $D^{(\lambda)}(\mathfrak{M})$, die von einem Parameter λ abhängen und für $\lambda = -1$ in $R(\mathfrak{M})$ bezw. $D(\mathfrak{M})$ übergehen [6]). Der folgende § 6 enthält einige Bemerkungen über die Berechnung dieser Mengenfunktionen, während in §§ 7—10 Beispiele behandelt werden. In § 11 wird eine neue Möglichkeit angedeutet, die „Dimension" einer Menge zu definieren. § 12 handelt von einer mit den oben eingeführten Begriffen zusammenhängenden Extremalaufgabe. Schließlich folgt ein Verzeichnis der wichtigsten Literatur über die Tschebyscheffschen Polynome und über den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante).

§ 1. Bemerkungen zu den Definitionen I, II, III.

1. Die in der Einleitung definierten Zahlen r_n, d_n, $r = d = k$ bleiben unverändert, wenn man zu der gegebenen Menge $\mathfrak{M}$ die in der Definition III eingeführten Gebiete $\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \ldots$ adjungiert. Man kann also von der Menge $\mathfrak{M}$ stets annehmen, daß ihre Komplementärmenge ein den unendlich fernen Punkt enthaltendes zusammenhängendes Gebiet ist.

Unter einer *Lemniskate* n-ten Grades verstehen wir die Gesamtheit der Punkte p, deren Abstandsprodukt von n festen Punkten $p_1, p_2, \ldots, p_n$

$$|pp_1|\,|pp_2|\ldots|pp_n| = \text{konst.} = r^n$$

ist. Die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ nennt man die *Brennpunkte*, die Zahl r den *Radius* der Lemniskate. Abgesehen von endlich vielen Werten von r, besteht diese aus höchstens n geschlossenen analytischen Kurven; die Brennpunkte liegen alle innerhalb dieser Kurven. Jede einzelne Kurve enthält ferner mindestens einen Brennpunkt [7]). Der umschlossene *Lemniskatenbereich* wird durch die Bedingung

$$|pp_1|\,|pp_2|\ldots|pp_n| \leqq r^n,$$

definiert. Ist $r = 0$, so reduziert sich die Lemniskate auf die n Brennpunkte. Ist r beliebig und fallen die Brennpunkte zusammen, so erhält man einen Kreis vom Radius r um den n-fachen Brennpunkt. Nach einer Beweismethode von D. Hilbert [8]) läßt sich ein beliebiges System von endlich vielen getrennt liegenden analytischen Kurven mit beliebiger Genauigkeit durch eine Lemniskate approximieren.

Die in I definierte Zahl r_n kann als das Minimum der Radien sämtlicher Lemniskatenbereiche n-ten Grades aufgefaßt werden, welche die gegebene Menge $\mathfrak{M}$ überdecken (Fekete, 6, S. 232—233). Für $n = 1$ erhält man den Radius r_1 der kleinsten, die Menge $\mathfrak{M}$ bedeckenden Kreisscheibe.

---

[6]) Nach einer Mitteilung von Herrn Fekete behalten diese Begriffe auch für gewisse allgemeine Räume ihren Sinn.

[7]) Vgl. Pólya-Szegö, 22, Bd. I, Abschnitt III, Aufgabe 142, S. 112, S. 282.

[8]) Hilbert, 15.

Die Zahl d_2 ist der gewöhnliche Durchmesser der Menge $\mathfrak{M}$. Die Zahlen d_n lassen sich leicht potentialtheoretisch deuten (vgl. § 2, II).

Die in III eingeführte Zahl k hat für den Fall, wo der Rand von $\mathfrak{G}$ aus endlich vielen analytischen Kurven besteht, die folgende Bedeutung: Der „Zylinderkondensator", dessen innere Belegung die erwähnten Kurven zum Querschnitte hat und dessen äußere Belegung in einen unendlich großen Zylinder vom Radius ϱ ausartet, besitzt, auf die Längeneinheit bezogen, annähernd die Kapazität

$$\frac{1}{2\log\frac{\varrho}{k}}.$$

2. In gewissen Spezialfällen können die Zahlen $r_n, d_n, r = d = k$ sowie die „extremalen" Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ in den Definitionen I und II berechnet werden.

a) Für einen Kreis vom Radius a gilt

$$r_n = r = d = k = a; \qquad d_n = n^{\frac{1}{n-1}}\, a.$$

Das Minimum r_n wird erreicht, wenn $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = O$ wird, wobei O den Mittelpunkt bezeichnet; das Maximum d_n wird für n Punkte erreicht, die auf dem Kreisrande regelmäßig verteilt sind [9]). Die in III eingeführte Funktion (5) ist gleich

$$u = \log\frac{1}{\varrho},$$

wenn ϱ den Abstand von O bedeutet.

b) Für eine Strecke von der Länge l gilt

$$r_n = 2^{\frac{1}{n}}\,\frac{l}{4};$$

r_n wird erreicht, wenn die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ auf dieser Strecke so verteilt sind wie die Nullstellen

$$\cos\frac{\pi}{2n},\ \cos 3\frac{\pi}{2n},\ \cos 5\frac{\pi}{2n}, \ldots, \cos(2n-1)\frac{\pi}{2n}$$

des n-ten Tschebyscheffschen Polynoms $\cos(n \arccos x)$ in dem reellen Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$. Man hat ferner

$$d_2 = l;\ d_n = \left\{\frac{2^2 3^3 \ldots n^n 2^2 3^3 \ldots (n-2)^{n-2}}{3^3 5^5 \ldots (2n-3)^{2n-3}}\right\}^{\frac{1}{n(n-1)}} \frac{l}{2} \qquad (n \geqq 3);$$

d_n wird erreicht, wenn die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ auf der gegebenen Strecke so verteilt sind wie die Nullstellen des Polynoms

$$\int_{-1}^{x} P_{n-1}(x)\,dx$$

in dem Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$. Hier bezeichnet $P_{n-1}(x)$ das $(n-1)$-te Legendresche Polynom [10]). Es ist

$$r = d = k = \frac{l}{4}.$$

Schließlich gilt, wenn wir die fragliche Strecke der Einfachheit halber mit dem reellen Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ zusammenfallen lassen,

---

[9]) Diese Bemerkung rührt von Pólya her. Vgl. Schur 24, S. 385, Satz IV.

[10]) Dieses Resultat stammt von Stieltjes. Vgl. Schur, 24, S. 378.

$$u = \log 2 + \log |z - \sqrt{z^2 - 1}|,$$

wobei $z = \varrho e^{i\varphi}$ ist.

c) Für eine Ellipse mit den Halbachsen a und b gilt

$$r_n^n = \left(\frac{a+b}{2}\right)^n + \left|\frac{a-b}{2}\right|^n;$$

das Minimum r_n wird für das gleiche Punktsystem erreicht wie bei der die Brennpunkte verbindenden Strecke (vgl. b)) [11]). Man hat

$$r = d = k = \frac{a+b}{2},$$

und u ist dieselbe Funktion wie im Falle b) [11]).

d) Es sei $a > 0$; $p_1, p_2, \ldots, p_l$ beliebig. Unter $\mathfrak{M}$ verstehen wir die Lemniskate

$$|pp_1|\,|pp_2| \ldots |pp_l| = a^l,$$

oder, was auf dasselbe herauskommt, den umschlossenen Lemniskatenbereich

$$|pp_1|\,|pp_2| \ldots |pp_l| \leqq a^l.$$

Dann ist für alle durch l teilbaren Werte von n (vgl. Fekete, 6, S. 233, Fußnote)

$$r_n = r = d = k = a.$$

Das Minimum r_n wird erreicht, wenn je $\frac{n}{l}$ Punkte mit den Brennpunkten $p_1, p_2, \ldots, p_l$ zusammenfallen. Es ist ferner

$$u = \frac{1}{l} \sum_{\nu=1}^{l} \log \frac{1}{|pp_\nu|}.$$

e) Es sei $\mathfrak{M}$ so beschaffen, daß das in der Definition III eingeführte Gebiet $\mathfrak{G}$ einfach zusammenhängend ist. Die Funktion u und die Kapazitätskonstante k lassen sich dann folgendermaßen funktionentheoretisch interpretieren: Man bilde das in der z-Ebene gelegene Gebiet $\mathfrak{G}$ auf das Äußere eines Kreises der w-Ebene um den Nullpunkt als Mittelpunkt derart eineindeutig und konform ab, daß die Abbildung im unendlich fernen Punkte die Identität wird, d. h. die Form hat:

$$w = \varphi(z) = z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots.$$

Der Radius dieses Kreises ist dann eindeutig bestimmt und fällt mit der Konstante k zusammen. Man hat ferner

$$u = \log \frac{1}{|\varphi(z)|}.$$

Diese Bemerkung gestattet in vielen Fällen, die Konstante $r = d = k$ anzugeben. Man hat z. B.

für einen Kreisbogen vom Radius a und dem Zentriwinkel ψ:

$$r = d = k = a \sin \frac{\psi}{4};$$

für ein symmetrisches Kreisbogenzweieck mit der Sehne h und mit dem Winkel $2\lambda\pi$ $(0 < \lambda < 1)$:

$$r = d = k = \frac{h}{4} \frac{1}{1-\lambda};$$

---

[11]) Faber, 3.

für eine Halbkreisfläche vom Durchmesser $2a$:

$$r = d = k = \frac{4a}{3\sqrt{3}};$$

für ein Quadrat von der Seitenlänge a:

$$r = d = k = \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^2}{4\pi^{\frac{3}{2}}}\, a = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\, a \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}},$$

wobei $\Gamma(s)$ die Eulersche Gammafunktion bedeutet, usw.[12]).

3. Die zu einer Kurve gehörigen Tschebyscheffschen Polynome sowie der Begriff des transfiniten Durchmessers (Kapazitätskonstante) erweisen sich in vielen Fragen als nützliche Hilfsmittel. Man findet

a) potentialtheoretische Anwendungen in 16, a. a. O. [3]),

b) funktionentheoretische Anwendungen in 2—4, 7, 15, 18—21, 25—28, 31,

c) zahlentheoretische Anwendungen in 6, 10, 24,

d) sonstige Anwendungen in 8, 9, 30.

§ 2. Einführung der räumlichen Mengenfunktionen.

1. Es sei $\mathfrak{M}$ eine beliebige räumliche, beschränkte und abgeschlossene Punktmenge. Wir wollen drei Mengenfunktionen

$$R(\mathfrak{M}), \quad D(\mathfrak{M}), \quad K(\mathfrak{M})$$

definieren. Auch hier bezeichnen $p, q, p_1, p_2, \ldots$ beliebige Punkte des Raumes, $|pq|$ den Abstand von p und q.

I. *Definition von* $R(\mathfrak{M})$. Es seien $p_1, p_2, \ldots, p_n$ beliebige feste Punkte und p möge die gegebene Menge $\mathfrak{M}$ durchlaufen. Dann besitzt das harmonische Mittel der n von den festen zu dem variablen Punkte gezogenen Strecken [13])

$$\frac{n}{\frac{1}{|p\,p_1|} + \frac{1}{|p\,p_2|} + \cdots + \frac{1}{|p\,p_n|}}$$

ein wohlbestimmtes Maximum. Dieses Maximum ist eine Funktion der n Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$, die wir jetzt, unseren Standpunkt ändernd, als variabel auffassen wollen; es ist ersichtlich eine nichtnegative, stetige Funktion. Sie erreicht, wenn die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ unabhängig voneinander den ganzen Raum durchlaufen, ein wohlbestimmtes Minimum

$$(1) \qquad R_n = R_n(\mathfrak{M}) = \operatorname*{Min}_{(p_\nu)} \operatorname*{Max}_{(p \text{ auf } \mathfrak{M})} \frac{n}{\frac{1}{|p\,p_1|} + \frac{1}{|p\,p_2|} + \cdots + \frac{1}{|p\,p_n|}}.$$

Um diese Existenz des Minimums nachzuweisen, muß man nur zeigen, daß es zur Aufsuchung der unteren Grenze genügt, die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ auf einen endlichen Bereich einzuschränken. Es sei p_0 irgendein fester Punkt, d seine Maximaldistanz von $\mathfrak{M}$; ferner sei K die Kugel vom Mittelpunkt p_0 und vom Radius $2d$. Irgendein Punkt p_ν außerhalb K hat dann eine Minimaldistanz von $\mathfrak{M}$, die nicht kleiner als d ist; ein solcher

---

[12]) Weitere Fälle, in denen man die eine oder andere der Größen r_n, d_n, $r = d = k$ berechnen kann, findet man z. B. in Riemann-Weber, 23, Kapitel XVI, § 3, S. 715—718; ferner auch Achyeser, 1; Faber, 3, S. 86; Fekete, 11, S. 216; Pólya, 21, III. Mitt., S. 59; Pólya-Szegö, 22, Bd. II, Abschnitt IV, Aufgabe 115, S. 20, S. 193, Abschnitt VI, Aufgabe 64, S. 86, S. 282.

[13]) Fällt p mit einem der p_ν zusammen, so ist dieser Ausdruck gleich Null zu setzen.

Punkt p_ν kann folglich bei Aufsuchung der besagten unteren Grenze mit Vorteil durch p_0 ersetzt werden. Man kann sich also auf die p innerhalb K beschränken, womit alles bewiesen ist [14]). Weiter sei die Menge $\mathfrak{M}$ unendlich. Man erhält, wenn m und n beliebige positive Zahlen und $p_1, p_2, \ldots, p_m, q_1, q_2, \ldots, q_n$ beliebige Punkte sind,

$$\frac{m+n}{R_{m+n}} \geqq \operatorname*{Min}_{(p \text{ auf } \mathfrak{M})} \left\{ \sum_{\mu=1}^{m} \frac{1}{|p\,p_\mu|} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|p\,q_\nu|} \right\} \geqq \operatorname*{Min}_{(p \text{ auf } \mathfrak{M})} \sum_{\mu=1}^{m} \frac{1}{|p\,p_\mu|} + \operatorname*{Min}_{(p \text{ auf } \mathfrak{M})} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|p\,q_\nu|},$$

also nach geeigneter Wahl der p_μ und q_ν

$$\frac{m+n}{R_{m+n}} \geqq \frac{m}{R_m} + \frac{n}{R_n}. \tag{2}$$

Hieraus folgt analog wie bei Herrn Fekete [15]) die Existenz von

$$\lim_{n\to\infty} R_n = R = R(\mathfrak{M}). \tag{3}$$

Dasselbe gilt natürlich auch für eine endliche Menge $\mathfrak{M}$. Besteht sie aus l Punkten, so ist $R_n = 0$ für $n \geqq l$, folglich $R = 0$.

Die Bedingungen

$$\frac{n}{\dfrac{1}{|p\,p_1|} + \dfrac{1}{|p\,p_2|} + \cdots + \dfrac{1}{|p\,p_n|}} = R \quad \text{bzw.} \leqq R$$

kennzeichnen eine *Lemniskate* bzw. einen *Lemniskatenbereich* n-ten Grades mit den Brennpunkten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ und mit dem Radius R. Für $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$ entsteht eine Kugel vom Radius R. Die Lemniskate besteht, abgesehen von endlich vielen Werten von R, aus höchstens n auseinanderliegenden geschlossenen analytischen Flächen, welche die Brennpunkte im Innern enthalten [7]). Es gilt auch hier das Analogon des unter [8]) zitierten Hilbertschen Satzes.

Die obige Zahl R_n stimmt mit dem kleinsten Radius überein, den ein die gegebene Menge $\mathfrak{M}$ bedeckender Lemniskatenbereich n-ten Grades haben kann. Die Zahl R_1 ist gleich dem Radius der kleinsten die Menge $\mathfrak{M}$ bedeckenden Kugel.

II. *Definition von* $D(\mathfrak{M})$. Es sei $n \geqq 2$. Die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sollen unabhängig voneinander die Menge $\mathfrak{M}$ durchlaufen. Es sei

$$\operatorname*{Max}_{(p_\nu \text{ auf } \mathfrak{M})} \frac{\binom{n}{2}}{\sum\limits_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n} \dfrac{1}{|p_\mu p_\nu|}} = D_n. \tag{4}$$

Die Zahl D_n wird also als das Maximum des harmonischen Mittels der gegenseitigen Entfernungen von n auf $\mathfrak{M}$ beweglichen Punkten definiert [16]), im Gegensatz zu der Zahl d_n, die das Maximum eines geometrischen Mittels ist.

Wir zeigen die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{n\to\infty} D_n = D = D(\mathfrak{M}). \tag{5}$$

In der Tat hat man für $n \geqq 3$, wenn $p_1, p_2, \ldots, p_n$ voneinander verschiedene Punkte der unendlichen Menge $\mathfrak{M}$ bezeichnen,

---

[14]) Man zeigt auch leicht, daß *die Punkte jedes Extremalsystems* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *in der konvexen Hülle von* $\mathfrak{M}$ *liegen* (vgl. Fejér, 5, sowie auch Fekete-Neumann, 13); liegt nämlich ein Punkt außerhalb der konvexen Hülle von $\mathfrak{M}$, so kann man ihn derart verschieben, daß er sämtlichen Punkten von $\mathfrak{M}$ zugleich näher kommt. — Daraus folgt, daß R_n den Durchmesser dieser konvexen Hülle nicht übertreffen kann.

[15]) Fekete, 6, S. 233. Vgl. Pólya-Szegö, 22, Bd. I, Abschnitt I, Aufgabe 98, S. 17, S. 171.

[16]) Fallen zwei Punkte p_μ, p_ν miteinander zusammen, so ist dieses harmonische Mittel gleich Null zu setzen. Vgl. Fußnote [13]).

$$\sum_{\mu<\nu}\frac{1}{|p_\mu p_\nu|}=\frac{1}{n-2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\mu<\nu}^{(k)}\frac{1}{|p_\mu p_\nu|};$$

hier ist die Summe $\Sigma^{(k)}$ ähnlich wie Σ, aber unter Auslassung des Punktes p_k, zu bilden. Man hat also (vgl. Fekete, 6, S. 231)

$$\sum_{\mu<\nu}\frac{1}{|p_\mu p_\nu|}\geqq\frac{1}{n-2}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{2}\frac{1}{D_{n-1}}=\binom{n}{2}\frac{1}{D_{n-1}},$$

folglich

$$\frac{1}{D_n}\geqq\frac{1}{D_{n-1}},$$

so daß

$$D_2\geqq D_3\geqq D_4\geqq\cdots\geqq D_n\geqq\cdots \tag{6}$$

gilt. Damit ist (5) bewiesen. Besteht die Menge $\mathfrak{M}$ aus l Punkten, so hat man $D_n=0$ für $n>l$, folglich $D=0$.

Wir nennen D den *transfiniten Durchmesser* von $\mathfrak{M}$. Die Zahl D_2 stimmt mit dem gewöhnlichen Durchmesser von $\mathfrak{M}$ überein. Allgemein kann D_n folgendermaßen interpretiert werden: Ein System von n gleichgeladenen elektrischen Punkten, die auf $\mathfrak{M}$ verbleiben, besitzt eine *stabilste Gleichgewichtslage.* Die zugehörige potentielle Energie beträgt, wenn die Gesamtladung $=1$ angenommen wird, $\frac{1}{n^2}\binom{n}{2}\frac{1}{D_n}=\frac{n-1}{2n}\frac{1}{D_n}$.

III. *Definition von* $K(\mathfrak{M})$ [17]). Es seien, wie im ebenen Falle, $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \ldots$ die zusammenhängenden Komponenten des Komplementärgebietes von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{G}_1=\mathfrak{G}$ sei diejenige Komponente, welche den unendlich fernen Punkt enthält. Der Rand von $\mathfrak{G}$ bestehe zunächst aus endlich vielen analytischen Flächen. Es gibt dann eine eindeutig bestimmte, in $\mathfrak{G}$ reguläre, harmonische Funktion U, welche auf dem Rande von $\mathfrak{G}$ konstant ist und im Unendlichen eine Entwicklung von der Form

$$U=\frac{1}{r}+\frac{Y_1(\theta,\varphi)}{r^2}+\frac{Y_2(\theta,\varphi)}{r^3}+\cdots \tag{7}$$

besitzt. Hier sind r, θ, φ Polarkoordinaten, $Y_m(\theta,\varphi)$ ist eine Kugelflächenfunktion m-ter Ordnung. Der konstante Randwert von U ist, wie man leicht sieht, notwendig positiv; schreibt man ihn in der Form $\frac{1}{K}$, so heißt K die *Kapazitätskonstante* von $\mathfrak{M}$.

Ist $\mathfrak{G}$ ein beliebiges, den unendlich fernen Punkt enthaltendes, zusammenhängendes Gebiet, so erklärt man K, wie im zweidimensionalen Falle, durch Grenzübergang mittels einer gegen $\mathfrak{G}$ konvergierenden Folge von Gebieten $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ $(\nu=1,2,3,\ldots)$ mit analytischen Rändern. Die Existenz des Grenzwertes beruht darauf, daß K eine *monotone* Mengenfunktion ist, d. h. sie nimmt nicht ab, wenn man von $\mathfrak{G}$ zu einem Teilgebiet $\mathfrak{G}'$ übergeht. Daraus folgt auch die Unabhängigkeit dieses Grenzwertes von der Wahl der Folge $\mathfrak{G}^{(\nu)}$. Die Zahl K läßt sich als die Kapazität eines Kondensators deuten, dessen innere Belegung von $\mathfrak{M}$ und äußere Belegung von einer unendlich großen Kugelschale gebildet wird (vgl. § 1, 1).

2. Die eben definierten Mengenfunktionen $R(\mathfrak{M})$, $D(\mathfrak{M})$, $K(\mathfrak{M})$ sind *monoton*, d. h. sie nehmen nicht ab, wenn $\mathfrak{M}$ durch eine Menge ersetzt wird, wovon $\mathfrak{M}$ Teilmenge ist. Dasselbe gilt bei festem n für die Zahlen $R_n=R_n(\mathfrak{M})$, $D_n=D_n(\mathfrak{M})$.

Fügt man zu $\mathfrak{M}$ die oben erwähnten Gebiete $\mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \ldots$ hinzu, so bleiben die Zahlen R_n, D_n, R, D, K unverändert; dies folgt für R_n und D_n unmittelbar daraus, daß eine

[17]) Vgl. Kellogg, a. a. O. [3]).

harmonische Funktion ihr Minimum am Rande erreicht. — Man kann also stets annehmen, daß die Komplementärmenge von $\mathfrak{M}$ zusammenhängend ist.

§ 3. Beweis des Hauptsatzes.

1. Wir nehmen an, daß $\mathfrak{M}$ eine unendliche Menge ist und wählen die Punkte $q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}$ auf $\mathfrak{M}$ derart, daß

$$\frac{\binom{n+1}{2}}{D_{n+1}} = \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n+1} \frac{1}{|q_\mu q_\nu|} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{n+1} \frac{1}{|q_k q_\nu|} = \operatorname*{Min}_{(p_\nu \text{ auf } \mathfrak{M})} \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n+1} \frac{1}{|p_\mu p_\nu|}$$

wird. Dann muß offenbar

$$\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{n+1} \frac{1}{|q_k q_\nu|} = \operatorname*{Min}_{(p \text{ auf } \mathfrak{M})} \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{n+1} \frac{1}{|p\, q_\nu|}$$

sein, folglich, gemäß (1),

$$\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{n+1} \frac{1}{|q_k q_\nu|} \leqq \frac{n}{R_n}.$$

Wir erhalten somit

$$\frac{\binom{n+1}{2}}{D_{n+1}} \leqq \frac{1}{2}\,\frac{n(n+1)}{R_n},$$

d. h.

$$R_n \leqq D_{n+1} \leqq D_n. \tag{8}$$

(Es ist z. B. $R_1 \leqq D_2$ [18]).) Hieraus schließt man

$$R(\mathfrak{M}) \leqq D(\mathfrak{M}). \tag{9}$$

2. *Die Kapazitätskonstante K einer Lemniskate n-ten Grades*

$$\frac{n}{\frac{1}{|p\,p_1|}+\frac{1}{|p\,p_2|}+\cdots+\frac{1}{|p\,p_n|}} = R$$

ist gleich R. (Auch die Kapazitätskonstante des umschlossenen Lemniskatenbereiches ist natürlich gleich R.)

In der Tat besitzt die Funktion

$$U = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{|p\,p_1|}+\frac{1}{|p\,p_2|}+\cdots+\frac{1}{|p\,p_n|}\right)$$

sämtliche für die Funktion U in der obigen Definition III angegebenen charakteristischen Eigenschaften. Der konstante Randwert von U ist aber gleich $\frac{1}{K} = \frac{1}{R}$.

---

[18]) Man hat genauer nach einem Satz von H. W. E. Jung [Diss. Marburg 1899 = Journal für Math. Bd. 123 (1901), S. 241—257]

$$R_1 \leqq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,D_2.$$

Nach der Schlußweise von Herrn Fekete, 6, S. 235—236, erhält man übrigens

$$\frac{1}{D_{n+1}} \leqq \frac{\frac{n}{R_n}+\frac{n-1}{R_{n-1}}+\cdots+\frac{2}{R_2}+\frac{1}{R_1}}{n+n-1+\cdots+2+1},$$

was in (8) nicht enthalten ist.

Nun gibt es laut Definition von R_n einen Lemniskatenbereich n-ten Grades vom Radius R_n, welcher die gegebene Menge $\mathfrak{M}$ enthält. Wegen der Monotonie von $K(\mathfrak{M})$ erhält man also

$$K \leqq R_n, \tag{10}$$

folglich

$$K(\mathfrak{M}) \leqq R(\mathfrak{M}). \tag{11}$$

3. Die Komplementärmenge $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{M}$ sei zusammenhängend und der Rand $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$ bestehe zunächst aus endlich vielen analytischen Flächen. Durch Anwendung der Greenschen Formel ergibt sich leicht für die Funktion § 2, (7) die Darstellung

$$U(p) = \int \frac{m(q)\, d\sigma_q}{|p\,q|}. \tag{12}$$

Hier ist die Integration über den gesamten Rand $\mathfrak{F}$ zu erstrecken; $m(q)$ bedeutet eine auf $\mathfrak{F}$ definierte stetige und positive Funktion, die sog. *natürliche Belegung* von $\mathfrak{F}$, $d\sigma_q$ das Flächenelement von $\mathfrak{F}$. Es ist

$$\int m(q)\, d\sigma_q = 1. \tag{13}$$

Das obige Integral existiert übrigens auch auf $\mathfrak{F}$ (als uneigentliches Integral) sowie im Innern von $\mathfrak{F}$ und hat dort den konstanten Wert $\frac{1}{K}$. Es ist

$$m(q) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial n} \geqq 0, \tag{14}$$

wenn n die nach außen gerichtete Normale bedeutet [19]).

Es sei nun $\varepsilon > 0$; wir betrachten die Äquipotentialfläche $\overline{\mathfrak{F}}$, definiert durch die Bedingung

$$U = \frac{1}{K} - \varepsilon.$$

Für genügend kleine Werte von ε besteht $\overline{\mathfrak{F}}$ ebenfalls aus endlich vielen analytischen Flächen, welche die einzelnen Flächen von $\mathfrak{F}$ umschließen. Wir ersetzen das Integral (12), wobei p auf $\overline{\mathfrak{F}}$ liegt, bis auf den Fehler ε durch eine Näherungssumme von der Form

$$\frac{m_1}{|p\,q_1|} + \frac{m_2}{|p\,q_2|} + \cdots + \frac{m_l}{|p\,q_l|},$$

wo $q_1, q_2, \ldots, q_l$ geeignete Punkte von $\mathfrak{F}$ bezeichnen und die „Massen" $m_1, m_2, \ldots, m_l$ positiv sind und die Summe 1 haben [20]). Letztere können natürlich auch rational gewählt werden. Setzt man

$$m_1 = \frac{n_1}{n},\ m_2 = \frac{n_2}{n}, \ldots, m_l = \frac{n_l}{n}$$
$$(n_1 + n_2 + \cdots + n_l = n),$$

so gilt, wenn p auf $\overline{\mathfrak{F}}$ liegt,

$$\frac{1}{K} - 2\varepsilon \leqq \frac{1}{n}\left(\frac{n_1}{|p\,q_1|} + \frac{n_2}{|p\,q_2|} + \cdots + \frac{n_l}{|p\,q_l|}\right),$$

also, indem wir p auf $\overline{\mathfrak{F}}$ so wählen, daß die rechte Seite ein Minimum wird,

$$\frac{1}{K} - 2\varepsilon \leqq \frac{1}{\overline{R_n}} \leqq \frac{1}{R_n},$$

---

[19]) Vgl. etwa Riemann-Weber, 23, Kapitel XVII, § 4, S. 771.

[20]) Man kann z. B. die Fläche $\mathfrak{F}$ in l genügend kleine Teile zerlegen und in jedem Teilbereiche einen beliebigen Repräsentantenpunkt q wählen.

wo $\overline{R}_n$ in analogem Sinne zu $\overline{\mathfrak{F}}$ wie R_n zu $\mathfrak{F}$ gehört. Hieraus folgt, da ε beliebig klein und n beliebig groß gewählt werden kann,

$$(11') \qquad \frac{1}{K} \leqq \frac{1}{R}, \quad \text{also} \quad R(\mathfrak{M}) \leqq K(\mathfrak{M}).$$

Diese Ungleichung gilt aber allgemein. In der Tat definiere man die Gebiete $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ wie oben in § 2, **1,** III bei der Einführung der Kapazitätskonstante; es sei ferner $\mathfrak{M}^{(\nu)}$ die Komplementärmenge von $\mathfrak{G}^{(\nu)}$. Wir setzen $R(\mathfrak{M}^{(\nu)}) = R^{(\nu)}$, $K(\mathfrak{M}^{(\nu)}) = K^{(\nu)}$. Dann hat man

$$R \leqq R^{(\nu)} \leqq K^{(\nu)}$$

und hieraus folgt wegen $\lim_{\nu\to\infty} K^{(\nu)} = K$ die Behauptung.

Ein Vergleich von (11) und (11′) zeigt schließlich, daß $K(\mathfrak{M}) = R(\mathfrak{M})$ sein muß.

4. Wir kommen jetzt auf die Abschätzung von $D(\mathfrak{M})$. Setzen wir dabei weiter den Rand $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$ als analytisch voraus. Gemäß der Definition (4) gilt für irgendwelche n auf $\mathfrak{F}$ gelegenen Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$

$$\frac{\binom{n}{2}}{D_n} \leqq \sum_{j<k}^{1,2,\ldots,n} \frac{1}{|p_j p_k|}.$$

Es sei nun $\mu(p)$ irgendeine auf $\mathfrak{F}$ definierte, nichtnegative, stetige Funktion und $d\sigma_j = d\sigma_{p_j}$ das Flächenelement von $\mathfrak{F}$ im Punkte p_j. Dann gilt, die n Flächenintegrale über $\mathfrak{F}$ erstreckt,

$$\iint \cdots \int \frac{\binom{n}{2}}{D_n} \mu(p_1)\,\mu(p_2) \ldots \mu(p_n)\, d\sigma_1\, d\sigma_2 \ldots d\sigma_n$$

$$\leqq \sum_{j<k}^{1,2,\ldots,n} \iint \cdots \int \frac{\mu(p_1)\,\mu(p_2) \ldots \mu(p_n)}{|p_j p_k|}\, d\sigma_1\, d\sigma_2 \ldots d\sigma_n.$$

Ist nun das über $\mathfrak{F}$ erstreckte Integral

$$\int \mu(p)\, d\sigma_p = 1,$$

so folgt weiter, nach passender Vereinfachung,

$$\frac{1}{D_n} \leqq \iint \frac{\mu(p)\,\mu(q)}{|p\,q|}\, d\sigma_p\, d\sigma_q.$$

Wird hierin schließlich für $\mu(p)$ die natürliche Belegung $m(p)$ gewählt, so erhält die rechte Seite, wie aus (12) ersichtlich, den Wert $\frac{1}{K}$. Man bekommt somit

$$\frac{1}{D_n} \leqq \frac{1}{K}$$

und für $n \to \infty$

$$(15) \qquad K(\mathfrak{M}) \leqq D(\mathfrak{M}).$$

Dieses Resultat hätten wir allerdings auch aus (9) und (11) gewinnen können. Die obige Überlegung gestattet jedoch, für D eine untere Abschätzung mittels einer passend gewählten Funktion $\mu(p)$ zu erhalten, auch wenn die natürliche Belegung $m(p)$ nicht bekannt ist. Nach dieser Methode wird in § 6 ein analoges Problem behandelt; sie kann übrigens modifiziert werden, indem man z. B. Volumenintegrale statt Flächenintegrale verwendet.

5. Zum Beweis des Hauptsatzes sind eigentlich sowohl (11′) wie (15) (und so auch die Nummern **3** und **4**) entbehrlich; er stützt sich neben (9) und (11) auf die Ungleichung

$$D(\mathfrak{M}) \leqq K(\mathfrak{M}). \tag{15′}$$

Um (15′) nachzuweisen, brauchen wir eine klassische Eigenschaft der Funktion U; wir setzen dabei den Rand $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$ wieder zunächst als analytisch voraus.

Es sei $\varrho(q)$ eine beliebige, im Innern von $\mathfrak{F}$ definierte, abteilungsweise stetige und nichtnegative Funktion, für welche

$$\int \varrho(q)\, d\tau_q = 1 \tag{16}$$

gilt. Hier ist die Integration über das Innere von $\mathfrak{F}$ zu erstrecken; $d\tau_q$ bezeichnet das Volumenelement. Man hat dann stets [21])

$$\frac{1}{K} \leqq \iint \frac{\varrho(q')\,\varrho(q'')}{|q'q''|}\, d\tau_{q'}\, d\tau_{q''}. \tag{17}$$

Wir betrachten nun n beliebige, voneinander verschiedene Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ auf $\mathfrak{F}$. Wir zeichnen um die Punkte p_ν die Kugeln k_ν vom gleichen Radius ε und belegen jede einzelne Kugel homogen mit der Masse $\frac{1}{n}$. Die konstante Volumdichte ϱ kann aus der Gleichung

$$\frac{4\pi}{3}\,\varepsilon^3\,\varrho = \frac{1}{n}$$

berechnet werden. Die so definierte Massenbelegung liegt, unabhängig von der Wahl der Punkte p_ν, gänzlich innerhalb einer analytischen Fläche $\overline{\mathfrak{F}}$, deren Kapazitätskonstante die Form $\overline{K} = K + \delta$ hat, wobei $\delta = \delta(\varepsilon)$ mit ε gegen 0 konvergiert. Setzt man $\varrho(q)$ außerhalb der Kugeln k_ν gleich 0, so kann das Potential dieser Belegung in der folgenden Form geschrieben werden:

$$V(p) = \int \frac{\varrho(q)\, d\tau_q}{|pq|} = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{k_\nu} \frac{\varrho\, d\tau_q}{|pq|};$$

es ist ferner, wie man leicht sieht,

$$\iint \frac{\varrho(q')\,\varrho(q'')}{|q'q''|}\, d\tau_{q'}\, d\tau_{q''} = \int \varrho(p)\, V(p)\, d\tau_p.$$

Vereinigt man die Masse einer homogenen Kugel in dem Mittelpunkte derselben, so bleibt bekanntlich das Potential außerhalb der Kugel unverändert, während es innerhalb der Kugel vergrößert wird. Folglich hat man im ganzen Raume

$$V(p) \leqq \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{|pp_\nu|},$$

d. h.

$$\iint \frac{\varrho(q')\,\varrho(q'')}{|q'q''|}\, d\tau_{q'}\, d\tau_{q''} \leqq \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \int \frac{\varrho(p)}{|pp_\nu|}\, d\tau_p = \frac{1}{n} \sum_{\mu,\nu}^{1,2,\ldots,n} \int_{k_\mu} \frac{\varrho\, d\tau_p}{|pp_\nu|}.$$

Für $\mu \neq \nu$ gilt nun wie oben

$$\int_{k_\mu} \frac{\varrho\, d\tau_p}{|pp_\nu|} \leqq \frac{1}{n}\, \frac{1}{|p_\mu p_\nu|},$$

---

[21]) Ein einfacher Beweis dieser Ungleichung findet sich z. B. in Riemann-Weber, 23, Kapitel XVII, § 4, S. 772. — Die physikalische Bedeutung ist klar: Keine Verteilung der Elektrizitätsmenge 1 innerhalb $\mathfrak{F}$ kann eine kleinere Energie haben als die Energie $\frac{1}{2K}$ der Gleichgewichtsverteilung auf der Fläche $\mathfrak{F}$.

während für $\mu = \nu$

$$\int_{k_\nu} \frac{\varrho\, d\tau_p}{|p\,p_\nu|} = \varrho \int_0^{\varepsilon}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi}{r} = 2\pi\varrho\varepsilon^2 = \frac{3}{2}\frac{1}{n\varepsilon}$$

wird. Man erhält somit

$$\frac{1}{\overline{K}} = \frac{1}{K+\delta} \leqq \frac{2}{n^2} \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n} \frac{1}{|p_\mu p_\nu|} + \frac{3}{2}\frac{1}{n\varepsilon},$$

also, bei passender Wahl der Punkte p_ν,

$$\frac{1}{K+\delta} \leqq \frac{n-1}{n}\frac{1}{D_n} + \frac{3}{2}\frac{1}{n\varepsilon}. \tag{18}$$

Wählt man hier $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}}$, so folgt durch Grenzübergang $n \to \infty$ die zu beweisende Ungleichung (15′).

Im allgemeinen Falle ist noch, wie bei dem Beweis von (11′), ein Grenzübergang von $\mathfrak{G}^{(\nu)}$ zu $\mathfrak{G}\,(\nu \to \infty)$ nötig. Damit ist der Hauptsatz völlig bewiesen.

§ 4. Beispiele.

a) Für eine Kugel vom Radius R ist $R_n = R$. Es seien nämlich $p_1, p_2, \ldots, p_n$ beliebige Punkte im Raume, O der Mittelpunkt der Kugel. Die Funktion von p

$$\frac{1}{|p\,p_1|} + \frac{1}{|p\,p_2|} + \cdots + \frac{1}{|p\,p_n|} - \frac{n}{|O\,p|}$$

ist außerhalb der Kugel regulär harmonisch, mit ev. Ausnahme von gewissen Punkten, wo sie $+\infty$ wird. Sie ist auch im Unendlichen regulär (massenlos) und hat dort den Wert 0. Also muß das Minimum auf der Kugeloberfläche negativ sein, d. h.

$$\operatorname{Min}\left(\frac{1}{|p\,p_1|} + \frac{1}{|p\,p_2|} + \cdots + \frac{1}{|p\,p_n|}\right) < \frac{n}{R}.$$

Die einzige Ausnahme bildet der Fall, in dem $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = O$ gilt.

b) Analoges gilt für die Lemniskate (bzw. für den Lemniskatenbereich)

$$\frac{l}{\frac{1}{|p\,p_1|} + \frac{1}{|p\,p_2|} + \cdots + \frac{1}{|p\,p_l|}} = a \quad (\text{bzw. } \leqq a),$$

wenn n ein Vielfaches von l ist (vgl. § 1, 2, d)).

c) Für ein Ellipsoid mit den Halbachsen a, b, c gilt [22])

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}. \tag{1}$$

d) Für eine Strecke ist $K = 0$ [23]). Dies erhält man z. B. aus (1), da das Integral auf der rechten Seite für $b \to 0$, $c \to 0$ gegen ∞ konvergiert. Es gilt genauer, wenn l die Länge der betreffenden Strecke bedeutet,

$$\lim_{n\to\infty} D_n \log n = \frac{l}{2}. \tag{2}$$

Betrachten wir nämlich der Einfachheit halber die Strecke $0 \leqq x \leqq 1$. Man hat

---

[22]) Vgl. Riemann-Weber, 23, Kapitel XIV, § 2, S. 611.

[23]) Hieraus folgt natürlich $K = 0$ für eine beliebige lineare (eindimensionale) Menge, ferner auch leicht für eine beliebige Kurve mit stetiger Tangente (vgl. § 11, 2).

$$\frac{\binom{n}{2}}{D_n} \leqq \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\cdots,n} \frac{1}{\frac{\nu-1}{n-1}-\frac{\mu-1}{n-1}} = \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\cdots,n} \frac{n-1}{\nu-\mu}$$

$$= (n-1)\left(\frac{1}{n-1}+\frac{2}{n-2}+\frac{3}{n-3}+\cdots+\frac{n-1}{1}\right)$$

$$= -(n-1)^2 + n(n-1)\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)$$

$$= n^2 \log n + O(n^2),$$

also

$$\frac{1}{2} = \frac{l}{2} \leqq \liminf_{n\to\infty} D_n \log n.$$

Zur oberen Abschätzung der D_n wollen wir die Ungleichung § 3, (18) heranziehen. Wir betrachten der Einfachheit halber die Strecke $-1 \leqq x \leqq 1$. Es seien $p_1, p_2, \ldots, p_n$ beliebige voneinander verschiedene Punkte derselben, und die Kugeln $k_1, k_2, \ldots, k_n$ wie in § 3, **5** definiert, $\varepsilon > 0$. Es seien ferner die Halbachsen des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$$

so gewählt, daß es durch den Punkt $x = 1+\varepsilon$, $y = z = \varepsilon$ hindurchgeht. Es enthält dann die Kugeln k_ν, und man hat wegen § 3, (18) sowie § 4, (1)

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}} \leqq \frac{n-1}{n}\frac{1}{D_n} + \frac{3}{2}\frac{1}{n\varepsilon}.$$

Wir setzen hier $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $b = c = \frac{\log n}{n}$, während a aus der Gleichung $\frac{(1+\varepsilon)^2}{a^2} = 1 - \frac{2}{\log^2 n}$ zu bestimmen ist. Für $n \to \infty$ konvergieren b und c gegen 0, a gegen 1. Zerlegt man ferner das obige Integral nach den Intervallen 0, η und η, ∞, wo η eine feste positive Zahl bedeutet, so konvergiert der zweite Teil für $n \to \infty$ gegen

$$\frac{1}{2}\int_\eta^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t\,t}},$$

während der erste größer bleibt als

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2+\eta}}\int_0^\eta \frac{dt}{b^2+t} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2+\eta}}\log\frac{b^2+\eta}{b^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\eta}}\log n + o(\log n).$$

Daraus schließt man

$$\frac{1}{D_n} \geqq \frac{1}{\sqrt{a^2+\eta}}\log n + o(\log n),$$

also, da η beliebig klein zu wählen ist, die Behauptung.

Aus dem letzten Resultat folgt wegen § 3, (8) die Ungleichung

$$\limsup_{n\to\infty} R_n \log n \leqq \frac{l}{2}. \tag{3}$$

e) Liegt die Menge $\mathfrak{M}$ ganz in einer Ebene, so fallen die „extremalen Punkte" p_ν sowohl bei R_n als auch bei D_n gleichfalls in diese Ebene [14]). Da ferner das harmonische Mittel das geometrische nie übertreffen kann, so sind diese Zahlen R_n, D_n nicht größer als die entsprechenden Zahlen r_n und d_n der „zweidimensionalen Theorie". Dasselbe gilt natürlich auch für die Kapazitätskonstanten, d. h. es ist

$$K \leqq k.$$

Für eine Kreisscheibe vom Radius 1 hat man z. B. $K = \frac{2}{\pi}$, $k = 1$ [24]).

§ 5. Verallgemeinerung.

1. Die Definition der Zahlen R_n, D_n, R, D läßt eine naheliegende Verallgemeinerung zu, die nicht ohne Interesse sein dürfte. Es sei $\mathfrak{M}$ wieder eine räumliche, beschränkte und abgeschlossene Menge, λ eine feste reelle Zahl. Wir definieren [25])

$$(1) \qquad R_n^{(\lambda)} = \operatorname*{Min}_{(p_\nu)} \operatorname*{Max}_{(p \text{ auf } \mathfrak{M})} \left\{ \frac{|p\,p_1|^\lambda + |p\,p_2|^\lambda + \cdots + |p\,p_n|^\lambda}{n} \right\}^{\frac{1}{\lambda}},$$

ferner

$$(2) \qquad D_n^{(\lambda)} = \operatorname*{Max}_{(p_\nu \text{ auf } \mathfrak{M})} \left\{ \frac{\sum_{\mu<\nu}^{1,2,\cdots,n} |p_\mu p_\nu|^\lambda}{\binom{n}{2}} \right\}^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Diese Extrema sind in demselben Sinne zu nehmen wie sie für $R_n^{(-1)} = R_n$ und $D_n^{(-1)} = D_n$ im § 2 erklärt worden sind.

Analoge Definitionen gelten in dem zweidimensionalen sowie in dem eindimensionalen Falle. Die Begriffe des § 1 entsprechen dem zweidimensionalen Falle $\lambda = 0$, die des § 2 dem dreidimensionalen Falle $\lambda = -1$. Ist die Menge $\mathfrak{M}$ in einer Ebene gelegen, so ist es, wie leicht ersichtlich, gleichgültig, ob man sie als eine zwei- oder dreidimensionale Menge auffaßt. Analoges gilt, wenn $\mathfrak{M}$ auf einer Geraden liegt.

Aus einer bekannten Eigenschaft der obigen Klammerausdrücke [26]) folgt unmittelbar, daß $R_n^{(\lambda)}$ und $D_n^{(\lambda)}$ mit wachsendem λ nicht abnehmen. Die Zahlen $R_1^{(\lambda)}$ und $D_2^{(\lambda)}$ sind von λ unabhängig. Ist die Menge $\mathfrak{M}$ endlich und $\lambda \leqq 0$, so gilt $R_{n-1}^{(\lambda)} = D_n^{(\lambda)} = 0$, sobald n die Anzahl der Punkte von $\mathfrak{M}$ übertrifft.

Man zeigt ferner allgemein, wie in den §§ 2, 3

$$(3') \qquad (m+n)\{R_{m+n}^{(\lambda)}\}^\lambda \leqq m\{R_m^{(\lambda)}\}^\lambda + n\{R_n^{(\lambda)}\}^\lambda \qquad \text{für } \lambda > 0,$$

$$(3'') \qquad (m+n)\{R_{m+n}^{(\lambda)}\}^\lambda \geqq m\{R_m^{(\lambda)}\}^\lambda + n\{R_n^{(\lambda)}\}^\lambda \qquad \text{für } \lambda < 0,$$

$$(3''') \qquad (m+n)\log R_{m+n}^{(0)} \leqq m \log R_n^{(0)} + n \log R_m^{(0)};$$

diese drei Ungleichungen können auch in der folgenden einheitlichen Form geschrieben werden:

$$(3) \qquad R_{m+n}^{(\lambda)} \leqq \left\{ \frac{m\{R_m^{(\lambda)}\}^\lambda + n\{R_n^{(\lambda)}\}^\lambda}{m+n} \right\}^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Es gilt weiter

$$(4) \qquad D_2^{(\lambda)} \geqq D_3^{(\lambda)} \geqq \cdots \geqq D_n^{(\lambda)} \geqq \cdots,$$

$$(5) \qquad D_{n+1}^{(\lambda)} \geqq R_n^{(\lambda)}.$$

---

[24]) Vgl. § 8, **5.** Bezüglich weiterer Eigenschaften der Kapazität vgl. Kellogg, 16, S. 331 (Exercises).

[25]) Für $\lambda = 0$ sind die Ausdrücke in (1), (2) unter dem Max-Zeichen durch

$$\{|p\,p_1|\,|p\,p_2|\ldots|p\,p_n|\}^{\frac{1}{n}} \text{ bzw. } \Big\{\prod_{\mu<\nu}^{1,2,\cdots,n} |p_\mu p_\nu|\Big\}^{\frac{1}{\binom{n}{2}}}$$

zu ersetzen. Ist ferner $\lambda \leqq 0$ und $p = p_\nu$ bzw. $p_\mu = p_\nu$, so sind jene Ausdrücke in (1) bzw. (2) gleich Null zu setzen, vgl. [13]), [16]).

[26]) Vgl. Pólya-Szegö, 22, Bd. I, Abschnitt II, Aufgabe 82, S. 54, S. 55, S. 210.

Hieraus folgt die Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} R_n^{(\lambda)} = R^{(\lambda)}, \quad \lim_{n\to\infty} D_n^{(\lambda)} = D^{(\lambda)} \tag{6}$$

und

$$D^{(\lambda)} \geqq R^{(\lambda)}. \tag{7}$$

Auch die nichtnegativen Zahlen $R^{(\lambda)}$, $D^{(\lambda)}$ sind mit wachsendem λ nicht abnehmend. Man kann übrigens einsehen, daß die Grenzwerte

$$\lim_{\lambda\to+\infty} D^{(\lambda)}, \quad \lim_{\lambda\to+\infty} R^{(\lambda)}$$

existieren. Der erste ist gleich dem gewöhnlichen Durchmesser von $\mathfrak{M}$, d. h. $D_2^{(\lambda)}$, wie man am besten mit Benutzung des Resultates von § 7, **1** findet; der zweite ist mit dem Radius der kleinsten $\mathfrak{M}$ bedeckenden Kugel, d. h. mit $R_1^{(\lambda)}$ identisch, wie sich zeigen läßt.

2. Aus der letzten Bemerkung geht schon hervor, daß hier im allgemeinen das Analogon des Hauptsatzes *nicht* mehr gilt. Wir werden vielmehr im § 9 sehen, daß z. B. bei einer Kugelschale für alle Werte $\lambda > -1$

$$D^{(\lambda)} > R^{(\lambda)}$$

ausfällt.

3. Eine weitere Eigenschaft, welche beim Übergang von $\lambda = -1$ zum allgemeinen Falle verloren geht, ist die folgende: Für $\lambda = -1$ bleiben die Zahlen R_n, D_n, R, D unverändert, wenn man zu der Menge $\mathfrak{M}$ diejenigen Punkte des Raumes adjungiert, welche nicht zu dem in § 2, III mit $\mathfrak{G}$ bezeichneten Gebiete gehören. Eine Vollkugel besitzt z. B. dieselben Zahlen R_n, D_n, R, D wie die Kugelschale, welche ihre Begrenzung bildet. (Dies beruht auf der geläufigen Tatsache, daß das Minimum einer harmonischen Funktion stets auf der Berandung liegt.) Im allgemeinen Falle, d. h. für $R_n^{(\lambda)}$, $D_n^{(\lambda)}$, $R^{(\lambda)}$, $D^{(\lambda)}$ ist dieser Satz *falsch* (vgl. § 10, Tafel). Dagegen ist er richtig, wie wir jetzt zeigen wollen, wenn $\lambda \geqq -1$ ist.

Eine leichte Rechnung liefert nämlich, daß der Ausdruck $|p_0\,p|^{\lambda}$, wo p_0 einen festen und p einen veränderlichen Punkt bezeichnet, eine sog. *subharmonische* bzw. *superharmonische* Funktion [27]) darstellt, je nachdem $\lambda > 0$ oder $-1 < \lambda < 0$ ist. Ferner ist auch $\log|p_0\,p|$ subharmonisch. In der Tat gilt unter Benutzung des Symbols $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (x, y, z bezeichnen die rechtwinkligen Koordinaten von p)

$$\Delta\,|p_0\,p|^{\lambda} = \lambda(\lambda+1)\,|p_0\,p|^{\lambda-2}, \tag{8}$$

und

$$\Delta \log|p_0\,p| = |p_0\,p|^{-2}. \tag{8'}$$

Daraus folgt aber die Behauptung unter Zuhilfenahme einer bekannten grundlegenden Eigenschaft der oben genannten Funktionen [27]).

Analoges gilt im zweidimensionalen und im eindimensionalen Falle. Die entsprechenden Bedingungen lauten dann $\lambda \geqq 0$ bzw. $\lambda \geqq 1$. In der Tat hat man, wenn d die Werte 3, 2, 1 bedeutet, je nachdem der räumliche, der zweidimensionale bzw. eindimensionale Fall vorliegt und Δ den entsprechenden Laplaceschen Operator bezeichnet,

---

[27]) Vgl. F. Riesz, Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel. Acta Mathematica 48 (1926), S. 329–343. — Man findet in dieser Arbeit auch eine Literaturzusammenstellung.

$$\Delta\,|p_0\,p|^{\lambda} = \lambda(\lambda+d-2)\,|p_0\,p|^{\lambda-2}, \tag{9}$$

$$\Delta \log|p_0\,p| = (d-2)\,|p_0\,p|^{-2}. \tag{9'}$$

§ 6. Zur Berechnung der Zahlen $R^{(\lambda)}$ und $D^{(\lambda)}$.

Bevor wir weitergehen, mögen einige Hinweise bezüglich der effektiven Berechnung der Zahlen $R^{(\lambda)}$ und $D^{(\lambda)}$ gegeben werden.

1. Betrachten wir der Einfachheit halber einen von einer analytischen Fläche berandeten Bereich $\mathfrak{M}$ im dreidimensionalen Raume. Wir bezeichnen mit $\mu(p)$ eine in $\mathfrak{M}$ definierte, nichtnegative, stückweise stetige Funktion, für welche das über $\mathfrak{M}$ erstreckte Integral

$$\int \mu(p)\,d\tau_p = 1 \tag{1}$$

wird; $d\tau_p$ bezeichnet hier das Volumenelement von $\mathfrak{M}$. Man hat also, wenn zunächst $\lambda > 0$ vorausgesetzt wird und $p_1, p_2, \ldots, p_n$ beliebige Punkte im Raume bezeichnen,

$$\begin{aligned}\operatorname*{Max}_{(p\text{ auf }\mathfrak{M})} \frac{|p\,p_1|^{\lambda}+|p\,p_2|^{\lambda}+\cdots+|p\,p_n|^{\lambda}}{n} &\geqq \int \mu(p)\,\frac{|p\,p_1|^{\lambda}+|p\,p_2|^{\lambda}+\cdots+|p\,p_n|^{\lambda}}{n}\,d\tau_p \\ &= \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\int \mu(p)\,|p\,p_\nu|^{\lambda}\,d\tau_p \\ &\geqq \operatorname*{Min}_{(q)} \int \mu(p)\,|p\,q|^{\lambda}\,d\tau_p,\end{aligned}$$

wobei der Punkt q den ganzen Raum durchläuft. Hieraus folgt

$$R_n^{(\lambda)} \geqq \operatorname*{Min}_{(q)} \left\{\int \mu(p)\,|p\,q|^{\lambda}\,d\tau_p\right\}^{\frac{1}{\lambda}}, \tag{2}$$

eine Ungleichung, die natürlich auch für $R^{(\lambda)}$, ferner wie man sich leicht überlegt, auch für $\lambda \leqq 0$ gilt. Um die Konvergenz der obigen Integrale zu erzielen, muß natürlich $\lambda > -3$ sein. Für das Minimum kommen übrigens nur solche Punkte q in Frage, die in der konvexen Hülle von $\mathfrak{M}$ liegen [vgl. [14])]; falls also die Punktmenge $\mathfrak{M}$ selbst *konvex* ist, muß q in (2) nicht die Punkte des ganzen Raumes, sondern nur die von $\mathfrak{M}$ durchlaufen.

Eine analoge Abschätzung gilt, wenn $\mathfrak{M}$ eine analytische Fläche ist. Die vorkommenden Integrale sind dann Flächenintegrale, es muß ferner $\lambda > -2$ sein. Schließlich gilt ein Analogon von (2) mit $\lambda > -1$ auch für analytische Kurven.

Die Abschätzung (2) ist selbst in dem ausführlich behandelten Spezialfalle $\lambda = -1$ nicht ohne Interesse. Wählt man in diesem Falle für $\mathfrak{M}$ eine analytische Fläche und für $\mu(p)$ die in § 3, **3** definierte natürliche Belegung $m(p)$, so folgt von neuem die Ungleichung § 3, (10). Die obige Überlegung gestattet jedoch, für $R = R^{(-1)}$ eine *untere Abschätzung* mittels einer passend gewählten Funktion $\mu(p)$ zu erhalten, auch wenn die natürliche Belegung $m(p)$ nicht bekannt ist.

2. Zur oberen Abschätzung von $R^{(\lambda)}$ dient die Ungleichung

$$R^{(\lambda)} \leqq \operatorname*{Max}_{(q\text{ auf }\mathfrak{M})} \left\{\int \mu(p)\,|p\,q|^{\lambda}\,d\tau_p\right\}^{\frac{1}{\lambda}}, \tag{3}$$

wobei q, im Gegensatz zu (2), nur die Menge $\mathfrak{M}$ durchläuft. Über $\mathfrak{M}$, $\mu(p)$ und λ sind hier analoge Voraussetzungen zu machen wie in **1**.

Wir stellen den Beweis von (3) in § 7, **4** für den speziellen Fall einer Strecke ausführlich dar; einen anderen, weniger speziellen hierher gehörigen Fall haben wir schon in § 3, **3** behandelt. Der Beweis läßt sich leicht auf den zwei- und dreidimensionalen Fall übertragen [28]).

[28]) Bei dem Beweis von (3) für eine analytische Fläche $\mathfrak{F}$ ist folgender Hilfssatz zu benutzen. „Es gibt zwei,

Ist die Menge $\mathfrak{M}$ insbesondere *konvex* und gibt es eine Funktion $\mu(p) = m(p)$ der obigen Art, derart, daß das in (2) und (3) vorkommende Integral *konstant* ist, wenn q die Menge $\mathfrak{M}$ durchläuft („natürliche Belegung"), so muß

$$R^{(\lambda)} = \{\int m(p)\,|\,p\,q\,|^{\lambda}\,d\tau_p\}^{\frac{1}{\lambda}}$$

sein. Diese Bemerkung wird im folgenden mehrfach benutzt.

3. Analog wie (2) läßt sich die Ungleichung

$$D_n^{(\lambda)} \geqq \{\int\int \mu(p)\,\mu(q)\,|\,p\,q\,|^{\lambda}\,d\tau_p\,d\tau_q\}^{\frac{1}{\lambda}} \tag{4}$$

begründen, die unter ähnlichen Bedingungen wie (2) gilt; wir haben sie in § 3, **4** für $\lambda = -1$ ausführlich dargetan. Beide Integrale sind hier Raumintegrale. Entsprechendes gilt für Flächen und Kurven.

Im Falle $\lambda \geqq 0$ kann man übrigens zeigen, daß $\{D^{(\lambda)}\}^{\lambda}$ mit der oberen Grenze des Doppelintegrals

$$\int\int \mu(p)\,\mu(q)\,|\,p\,q\,|^{\lambda}\,d\tau_p\,d\tau_q$$

übereinstimmt, wenn $\mu(p)$ die Gesamtheit aller nichtnegativen, stückweise stetigen Funktionen durchläuft, für welche die Integralbedingung (1) erfüllt ist (vgl. § 3, **5**). Es wird dabei ein räumlicher Bereich betrachtet; analoges gilt für Flächen und Kurven. Doch wird diese Tatsache im folgenden nicht benutzt.

Wir wollen in den folgenden Paragraphen 7—9 die Zahlen $R^{(\lambda)}$, $D^{(\lambda)}$ für die folgenden Mengen berechnen:

a) Zwei verschiedene Punkte;	A) Vollstrecke.
b) Kreislinie;	B) Vollkreis (Kreisscheibe).
c) Kugelschale;	C) Vollkugel.

Die Ergebnisse dieser Berechnung werden im § 10 zusammengefaßt.

§ 7. Beispiele: Zwei verschiedene Punkte, Vollstrecke.

1. Zwei verschiedene Punkte. Wir nehmen an, daß die fraglichen Punkte $x = -1$ und $x = +1$ sind. Man hat dann $R_1^{(\lambda)} = 1$, $D_2^{(\lambda)} = 2$ für alle λ, ferner $R_n^{(\lambda)} = D_{n+1}^{(\lambda)} = 0$ für $\lambda \leqq 0$ und für alle $n > 1$.

Zur Bestimmung von $R_n^{(\lambda)}$ $(n > 1, \lambda > 0)$ beachte man, daß wegen der Bemerkung in [14])

$$n\{R_n^{(\lambda)}\}^{\lambda} = \operatorname*{Min}_{-1 \leqq x_\nu \leqq 1} \operatorname*{Max}_{x = \pm 1} \sum_{\nu=1}^{n} |x - x_\nu|^{\lambda}$$

gilt. Es ist somit

$$\begin{aligned} 2n\{R_n^{(\lambda)}\}^{\lambda} &\geqq \operatorname*{Min}_{-1 \leqq x_\nu \leqq 1} \sum_{\nu=1}^{n} [(1 - x_\nu)^{\lambda} + (1 + x_\nu)^{\lambda}] \\ &= n \operatorname*{Min}_{-1 \leqq x \leqq 1} [(1 - x)^{\lambda} + (1 + x)^{\lambda}] \\ &= \begin{cases} 2n & \text{für} \quad \lambda \geqq 1, \\ n\,2^{\lambda} & \text{für} \quad 0 < \lambda \leqq 1; \end{cases} \end{aligned}$$

---

nur von $\mathfrak{F}$ abhängige positive Zahlen a und b von folgender Beschaffenheit: Für beliebig große Werte von N kann $\mathfrak{F}$ in N zusammenhängende Teilbereiche $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_N$ zerlegt werden, deren Ränder stückweise analytische Kurven sind, die ferner die folgende Eigenschaft haben: Es läßt sich in jedem Bereiche $\mathfrak{F}_h$ ein Punkt π_h angeben, derart, daß sämtliche Punkte des Bereiches $\mathfrak{F}_h$ zu π_h näher als $\frac{a}{\sqrt{N}}$ liegen, daß ferner sämtliche Punkte von $\mathfrak{F}$, die zu π_h näher als $\frac{b}{\sqrt{N}}$ liegen, $\mathfrak{F}_h$ angehören." Ein analoger Hilfssatz gelangt im Falle eines dreidimensionalen Bereiches zur Anwendung.

ferner sieht man, daß die Schranke $2n$ für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ und die Schranke $n2^\lambda$ bei geradem n, $n = 2m$, für $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = -1$, $x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = +1$ erreicht wird, so daß

$$R_n^{(\lambda)} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \lambda \geqq 1, \\ 2^{1-\frac{1}{\lambda}} & \text{für } 0 < \lambda \leqq 1, \quad n \text{ gerade} \end{cases} \tag{1}$$

gilt. Wir erhalten hieraus

$$R^{(\lambda)} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \lambda \geqq 1, \\ 2^{1-\frac{1}{\lambda}} & \text{für } 0 < \lambda \leqq 1, \\ 0 & \text{für} \quad \lambda \leqq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Zur Bestimmung von $D_n^{(\lambda)}$ $(n > 2, \lambda > 0)$ lege man k Punkte in $x = -1$ und $n - k$ Punkte in $x = +1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Es gilt für $\lambda > 0$

$$\{D_n^{(\lambda)}\}^\lambda = \operatorname{Max} \frac{k(n-k)2^\lambda}{\binom{n}{2}} = \frac{\left[\frac{n}{2}\right]\left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right)}{n(n-1)} 2^{\lambda+1},$$

also

$$D^{(\lambda)} = \begin{cases} 2^{1-\frac{1}{\lambda}} & \text{für } \lambda > 0, \\ 0 & \text{für } \lambda \leqq 0. \end{cases} \tag{3}$$

Man hat also $R^{(\lambda)} = D^{(\lambda)}$ für $\lambda \leqq 1$ und $R^{(\lambda)} < D^{(\lambda)}$ für $\lambda > 1$.

2. Vollstrecke. Wir betrachten die Strecke $-1 \leqq x \leqq 1$, deren Rand die unter **1** behandelte Menge ist. Infolge der Bemerkung in § 5, **3** stimmen $R^{(\lambda)}$ und $D^{(\lambda)}$ für $\lambda \geqq 1$ mit den entsprechenden oben berechneten Zahlen überein. Außerdem ist wegen § 4, d)

$$R^{(\lambda)} = D^{(\lambda)} = 0 \quad \text{für } \lambda \leqq -1. \tag{4}$$

Wir können also $-1 < \lambda < 1$ annehmen. Es sei ferner zunächst $\lambda \neq 0$.

3. Zur unteren Abschätzung benutzen wir die Ungleichung (2) von § 6 in der Form

$$R_n^{(\lambda)} \geqq \operatorname*{Min}_{-1 \leqq y \leqq 1} \{\int_{-1}^{1} \mu(x)\, |x - y|^\lambda dx\}^{\frac{1}{\lambda}}. \tag{5}$$

Hierbei ist $\mu(x)$ eine beliebige nichtnegative, stückweise stetige Funktion mit

$$\int_{-1}^{1} \mu(x)\, dx = 1. \tag{6}$$

Die folgenden Überlegungen beruhen auf dem

Hilfssatz I. — *Es sei* $-1 < \lambda < 1$, $\lambda \neq 0$. *Das Integral*

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-\frac{1+\lambda}{2}} |x - y|^\lambda dx$$

ist für $-1 \leqq y \leqq 1$ *konstant und gleich* [29])

$$\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right) = \frac{\pi}{\cos\frac{\pi\lambda}{2}}.$$

Erster Beweis. Man wende den Cauchyschen Integralsatz auf die Funktion

$$f(z) = (1 - z^2)^{-\frac{1+\lambda}{2}} (z - y)^\lambda$$

mit der in der Figur 1 angedeuteten Integrationskurve an.

[29]) Für $\lambda = 0$ gilt ein ähnliches Theorem; es tritt dann $\log|x - y|$ an die Stelle von $|x - y|^\lambda$.

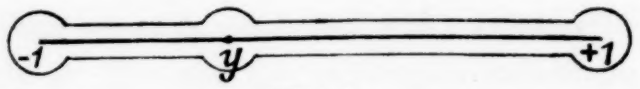

Fig. 1.

Außerhalb dieser Kurve ist $f(z)$ regulär; sie wird ferner für $z \to \infty$ wie $\frac{1}{z}$ Null. Zieht man die Integrationskurve auf die Strecke $-1 \leqq z \leqq 1$ zusammen, so liefert das Kurvenintegral (nach passender Verfügung über den Zweig von $f(z)$) die Summe

$$\int_{-1}^{y}(1-x^2)^{-\frac{1+\lambda}{2}}(y-x)^{\lambda}\,dx + e^{i\pi\lambda}\int_{y}^{1}(1-x^2)^{-\frac{1+\lambda}{2}}(x-y)^{\lambda}\,dx$$
$$-\int_{1}^{y}(1-x^2)^{-\frac{1+\lambda}{2}}(x-y)^{\lambda}\,dx - e^{i\pi\lambda}\int_{y}^{-1}(1-x^2)^{-\frac{1+\lambda}{2}}(y-x)^{\lambda}\,dx$$
$$= (1+e^{i\pi\lambda})\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-\frac{1+\lambda}{2}}|x-y|^{\lambda}\,dx.$$

Dies ist gleich dem Integral von

$$f(z) = \frac{e^{i\pi\frac{\lambda-1}{2}}}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \cdots$$

über einen genügend großen, positiv durchlaufenen Kreis, woraus die Behauptung folgt.

Zweiter Beweis [30]). — Nach der Substitution

$$x = \frac{y+x'}{1+yx'}$$

geht das fragliche Integral in

$$(1-y^2)^{\frac{1+\lambda}{2}}\int_{-1}^{1}\frac{|x'|^{\lambda}(1-x'^2)^{-\frac{1+\lambda}{2}}}{1+yx'}\,dx' = 2(1-y^2)^{\frac{1+\lambda}{2}}\int_{0}^{1}\frac{x'^{\lambda}(1-x'^2)^{-\frac{1+\lambda}{2}}}{1-y^2x'^2}\,dx'$$

über. Wendet man hier die weitere Substitution

$$x' = \sqrt{\frac{1-t}{1-y^2t}}$$

an, so folgt der Wert

$$\int_{0}^{1}(1-t)^{\frac{\lambda-1}{2}}t^{-\frac{1+\lambda}{2}}\,dt = \Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Ein dritter Beweis ergibt sich schließlich aus Hilfssatz II [vgl. (19) für $m = 0$]. Wir setzen nun in (5)

$$\mu(x) = \begin{cases} C_\varepsilon(1-x^2)^{-\frac{1+\lambda}{2}} & \text{für} \quad 0 \leqq |x| \leqq 1-\varepsilon, \\ 0 & \text{für} \quad 1-\varepsilon \leqq |x| \leqq 1, \end{cases}$$

wobei ε eine beliebige positive Zahl, $\varepsilon < 1$, bezeichnet und C_ε aus der Gleichung (6) zu bestimmen ist. Man hat offenbar

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{C_\varepsilon} = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-\frac{1+\lambda}{2}}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}. \tag{7}$$

Ist $-1 < \lambda < 0$, so wird der Ausdruck rechts in (5) verkleinert, wenn man $\mu(x)$ in den Intervallen $1-\varepsilon \leqq |x| \leqq 1$ durch $C_\varepsilon(1-x^2)^{-\frac{1+\lambda}{2}}$ ersetzt. Ist dagegen $0 < \lambda < 1$, so

[30]) Vgl. § 8, Hilfssatz V.

bedeutet dies eine Vergrößerung; doch konvergiert in diesem Falle, wie ersichtlich,

$$C_\varepsilon \int\limits_{1-\varepsilon \leqq |x| \leqq 1} (1-x^2)^{-\frac{1+\lambda}{2}} |x-y|^\lambda \, dx$$

gleichmäßig in y, $-1 \leqq y \leqq 1$, mit $\varepsilon \to 0$ gegen 0. Wir erhalten somit nach den Grenzübergängen $\varepsilon \to 0$, $n \to \infty$

$$R^{(\lambda)} \geqq \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \right\}^{\frac{1}{\lambda}}. \tag{8}$$

4. Weiter wollen wir zeigen, daß in (8) das Gleichheitszeichen gilt. Es sei dabei, wie oben, $-1 < \lambda < 1$, $\lambda \neq 0$. Zu diesem Zwecke wird die Abschätzung (3) von § 6 herangezogen, die wir in dem vorliegenden Spezialfalle beweisen wollen.

Es sei N ganz, $N \geqq 2$. Man teile die Strecke $-1 \leqq x \leqq 1$ in N gleiche Strecken ein; sie seien der Reihe nach $i_1, i_2, \ldots, i_N$, ihre Mittelpunkte $x_1, x_2, \ldots, x_N$, d. h.

$$x_h = -1 + \frac{2h-1}{N} \qquad (h = 1, 2, \ldots, N).$$

Dann ist nach der Definition von $R_n^{(\lambda)}$

$$R_n^{(\lambda)} \leqq \operatorname*{Max}_{-1 \leqq y \leqq 1} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{N} n_h |y - x_h|^\lambda \right\}^{\frac{1}{\lambda}}, \tag{9}$$

wobei n_h ganz ist und $n_h \geqq 0$, $\sum\limits_{h=1}^{N} n_h = n$ gilt.

Es sei $\mu(x)$ eine beliebige *positive*, stückweise stetige Funktion, für welche (6) erfüllt ist. Wir wählen die ganzen Zahlen n_h so, daß für $h = 1, 2, \ldots, N-1$

$$n \int\limits_{x_h - \frac{1}{N}}^{x_h + \frac{1}{N}} \mu(x)\, dx = n\, \mu_h = n_h - \theta_h \qquad (0 \leqq \theta_h < 1) \tag{10}$$

wird. Dann ist für genügend große n

$$\sum_{h=1}^{N-1} n_h = n \int\limits_{-1}^{1-\frac{2}{N}} \mu(x)\, dx + \sum_{h=1}^{N-1} \theta_h < n - n \int\limits_{1-\frac{2}{N}}^{1} \mu(x)\, dx + N - 1 < n\,,$$

so daß die aus der Bedingung $\sum\limits_{h=1}^{N} n_h = n$ bestimmte ganze Zahl n_N sicher positiv ausfällt. Bestimmt man ferner θ_N aus der Bedingung $\sum\limits_{h=1}^{N} \theta_h = 0$, so gilt (10) auch für $h = N$. (Es muß natürlich $\theta_N \leqq 0$ sein.)

Für $0 < \lambda < 1$ hat man jetzt

$$\frac{1}{n} \sum_{h=1}^{N} n_h |y - x_h|^\lambda = \sum_{h=1}^{N} \mu_h |y - x_h|^\lambda + \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{N} \theta_h |y - x_h|^\lambda,$$

und für $n \to \infty$ konvergiert das zweite Glied rechts gleichmäßig in y, $-1 \leqq y \leqq 1$, gegen Null. Für $-1 < \lambda < 0$ ist aber

$$\frac{1}{n} \sum_{h=1}^{N} n_h |y - x_h|^\lambda \geqq \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{N-1} n_h |y - x_h|^\lambda \geqq \sum_{h=1}^{N-1} \mu_h |y - x_h|^\lambda,$$

so daß in allen Fällen

$$R^{(\lambda)} \leqq \operatorname*{Max}_{-1\leqq y\leqq 1} \{ \sum_{h=1}^{N}{}' \mu_h \, |y - x_h|^\lambda \}^{\frac{1}{\lambda}}$$

gilt. Das Zeichen Σ' bedeutet hier die gewöhnliche Summe $\sum_{h=1}^{N}$ für $0 < \lambda < 1$ und die Summe $\sum_{h=1}^{N-1}$ für $-1 < \lambda < 0$.

Im Falle $0 < \lambda < 1$ folgt hieraus die Behauptung unmittelbar. In der Tat konvergiert die obige Summe für $N \to \infty$ gegen das Integral

$$\int_{-1}^{1} \mu(x) \, |y - x|^\lambda \, dx,$$

und zwar gleichmäßig in y, $-1 \leqq y \leqq 1$. Die Funktion $\mu(x)$ ist nun ähnlich wie bei der unteren Abschätzung von $R^{(\lambda)}$ zu wählen (das Verschwinden an den Intervallenden ist zunächst zu vermeiden); es ist ferner, wie dort, noch ein Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ erforderlich.

Im Falle $-1 < \lambda < 0$ muß etwas vorsichtiger geschlossen werden. Es sei $\omega = [N^\varrho]$, wobei ϱ gemäß der Bedingung

$$\frac{-\lambda}{1-\lambda} < \varrho < 1$$

zu bestimmen ist. Der Punkt y liege in dem Intervall i_k, $1 \leqq k \leqq N$, $k = k(y)$. Man hat dann

$$\int_{-1}^{1-\frac{2}{N}} \mu(x) \, |y - x|^\lambda \, dx = \sum_{h=1}^{N-1} \int_{i_h} \mu(x) \, |y - x|^\lambda \, dx = \sum_{|h-k|\leqq\omega} + \sum_{|h-k|>\omega}.$$

Die erste Summe ist

$$\leqq \operatorname{Max} \mu(x) \cdot \operatorname*{Max}_{-\frac{1}{N}\leqq y\leqq\frac{1}{N}} \int_{-\frac{2\omega+1}{N}}^{\frac{2\omega+1}{N}} |y - x|^\lambda \, dx$$

$$\leqq \operatorname{Max} \mu(x) \cdot \frac{2}{1+\lambda} \left(\frac{2\omega+2}{N}\right)^{1+\lambda} \to 0 \qquad \text{für } N \to \infty.$$

In der zweiten Summe kann $|y - x|^\lambda$ durch $|y - x_h|^\lambda$ ersetzt werden; der dabei begangene Fehler ist nach dem Mittelwertsatz

$$\leqq |x - x_h| \, |\lambda| \left(\frac{2\omega}{N}\right)^{\lambda-1} \leqq \frac{1}{N} \, |\lambda| \left(\frac{2\omega}{N}\right)^{\lambda-1} \sim 2^{\lambda-1} \, |\lambda| \, N^{\varrho(\lambda-1)-\lambda} \to 0 \qquad \text{für } N \to \infty,$$

so daß

$$\int_{-1}^{1-\frac{2}{N}} \mu(x) \, |y - x|^\lambda \, dx = \sum_{|h-k|>\omega} \mu_h \, |y - x_h|^\lambda + \varepsilon_N$$

$$\leqq \sum_{h=1}^{N-1} \mu_h \, |y - x_h|^\lambda + \varepsilon_N,$$

wobei $\varepsilon_N = \varepsilon_N(y)$ für $N \to \infty$ gegen 0 konvergiert, und zwar gleichmäßig in y, $-1 \leqq y \leqq 1$. Es gilt somit, wenn ε eine beliebige positive Zahl bezeichnet, für genügend große N

$$\operatorname*{Min}_{-1\leqq y\leqq 1} \sum_{h=1}^{N-1} \mu_h |y - x_h|^\lambda \geqq \operatorname*{Min}_{-1\leqq y\leqq 1} \int_{-1}^{1} \mu(x) \, |y - x|^\lambda \, dx - \varepsilon,$$

so daß

$$R^{(\lambda)} \leqq \operatorname*{Max}_{-1\leqq y\leqq 1} \{\int_{-1}^{1} \mu(x)\,|y-x|^{\lambda}\,dx\}^{\frac{1}{\lambda}}$$

wird. Das weitere ergibt sich wie im Falle $0 < \lambda < 1$.

Wir haben damit die Gleichung

$$R^{(\lambda)} = \left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}^{\frac{1}{\lambda}} \qquad (-1 \leqq \lambda \leqq 1) \tag{11}$$

bewiesen. Für $\lambda = -1, 0, +1$ ist die rechte Seite bzw. durch ihren Grenzwert $0, \frac{1}{2}, 1$ zu ersetzen.

5. Wir gehen jetzt zur Berechnung von $D^{(\lambda)}$ über.

Die Fälle $\lambda \geqq 1$, $\lambda \leqq -1$ haben wir bereits erledigt (siehe **2**). Es soll nun gezeigt werden, daß

$$D^{(\lambda)} = R^{(\lambda)} \qquad (0 \leqq \lambda \leqq 1)$$

gilt. Wegen $D^{(\lambda)} \geqq R^{(\lambda)}$ und (11) genügt es dazu

$$D^{(\lambda)} \leqq \left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}^{\frac{1}{\lambda}} \qquad (0 < \lambda \leqq 1) \tag{12}$$

nachzuweisen.

Im folgenden benutzen wir die speziellen *Jacobischen Polynome* (ultrasphärischen Polynome) $P_m^{(\nu)}(x)$, definiert durch die erzeugende Reihe [31])

$$\frac{1}{(1-2xw+w^2)^{\nu}} = P_0^{(\nu)}(x) + P_1^{(\nu)}(x)\,w + P_2^{(\nu)}(x)\,w^2 + \cdots + P_m^{(\nu)}(x)\,w^m + \cdots. \tag{13}$$

(Für $\nu = \frac{1}{2}$ reduziert sich $P_m^{(\nu)}$ auf das m-te Legendresche Polynom P_m.) Wir beweisen den

Hilfssatz II. — *Es sei* $-1 \leqq x \leqq 1$, $-1 \leqq y \leqq 1$, $\lambda > 0$. *Dann gilt die Entwicklung*

$$|x-y|^{\lambda} = \frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{m=0}^{\infty}\left(1-\frac{2}{\lambda}\,m\right) P_m^{\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}(x)\; P_m^{\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}(y). \tag{14}$$

Die absolute und gleichmäßige Konvergenz der rechtsstehenden Reihe folgt aus der bekannten Abschätzung

$$P_m^{\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}(x) = O(m^{-1-\frac{\lambda}{2}}), \tag{15}$$

die gleichmäßig für $-1 \leqq x \leqq 1$ gilt. Es möge hier, der Vollständigkeit halber, ein kurzer Beweis von (15) folgen. Man hat, wenn $x = \cos\xi$, $0 \leqq \xi \leqq \pi$, ist,

$$(1-2xw+w^2)^{\frac{\lambda}{2}} = (1-we^{i\xi})^{\frac{\lambda}{2}}\,(1-we^{-i\xi})^{\frac{\lambda}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} u_m (we^{i\xi})^m \sum_{m=0}^{\infty} u_m (we^{-i\xi})^m,$$

wobei

---

[31]) Vgl. etwa H. Rau, Über die Lebesgueschen Konstanten der Reihenentwicklungen nach Jacobischen Polynomen. Dieses Journal **161** (1929), S. 237—254; s. insbesondere S. 247 ff.

$$(1-w)^{\frac{\lambda}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} u_m w^m$$

gesetzt worden ist. Nun sind die Koeffizienten u_m, wie leicht ersichtlich, dem Betrage nach monoton abnehmend, ferner

$$u_m = O(m^{-1-\frac{\lambda}{2}}).$$

Aus

$$|P_m^{(-\frac{\lambda}{2})}(x)| = |\sum_{k=0}^{m} u_k e^{ik\xi} u_{m-k} e^{-i(m-k)\xi}| \leqq \sum_{k=0}^{m} |u_k|\,|u_{m-k}|$$

folgt also durch Zerlegung der letzten Summe in zwei Teile $\sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} + \sum_{k=\left[\frac{m}{2}\right]+1}^{m}$ die Behauptung.

Zum Beweis von (14) bemerken wir zunächst, daß aus (13) durch Differentiation nach w

$$(13') \quad \frac{1-w^2}{1-2xw+w^2}(1-2xw+w^2)^{\frac{\lambda}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(1-\frac{2}{\lambda}m\right)P_m^{(-\frac{\lambda}{2})}(x)\,w^m$$

folgt. Es sei $w = re^{i\varphi}$, $\bar{w} = re^{-i\varphi}$, $0 < r < 1$. Aus (13) und (13′) erhalten wir

$$(16) \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-w^2}{1-2xw+w^2}(1-2xw+w^2)^{\frac{\lambda}{2}}(1-2y\bar{w}+\bar{w}^2)^{\frac{\lambda}{2}}\,d\varphi$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left(1-\frac{2}{\lambda}m\right)r^{2m}P_m^{(-\frac{\lambda}{2})}(x)\,P_m^{(-\frac{\lambda}{2})}(y).$$

Läßt man r gegen 1 konvergieren, so geht die letzte Reihe nach dem Abelschen Stetigkeitssatz in die Reihe (14) über. Auf der linken Seite können wir die Integration über den Einheitskreis $w = e^{i\varphi}$ ausdehnen. Setzt man $x = \cos\xi$, $y = \cos\eta$ und ist etwa $0 < \xi < \eta < \pi$, so liefern die fünf Bogen

$$0, \xi; \quad \xi, \eta; \quad \eta, 2\pi-\eta; \quad 2\pi-\eta, 2\pi-\xi; \quad 2\pi-\xi, 2\pi$$

mit Rücksicht auf

$$\frac{1-w^2}{1-2xw+w^2} = \frac{\frac{1}{w}-w}{\frac{1}{w}+w-2\cos\xi} = \frac{-i\sin\varphi}{\cos\varphi-\cos\xi},$$

$$1-2xw+w^2 = w\left(\frac{1}{w}+w-2\cos\xi\right) = 2e^{i\varphi}(\cos\varphi-\cos\xi),$$

$$1-2y\bar{w}+\bar{w}^2 = \frac{1}{w}\left(\frac{1}{w}+w-2\cos\eta\right) = 2e^{-i\varphi}(\cos\varphi-\cos\eta)$$

bzw. die Beiträge

$$-\frac{i}{2\pi}2^{\lambda}\int_0^{\xi}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi-\cos\xi}(\cos\varphi-\cos\xi)^{\frac{\lambda}{2}}(\cos\varphi-\cos\eta)^{\frac{\lambda}{2}}\,d\varphi$$

$$-\frac{i}{2\pi}2^{\lambda}e^{-\frac{i\pi\lambda}{2}}\int_{\xi}^{\eta}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi-\cos\xi}(\cos\xi-\cos\varphi)^{\frac{\lambda}{2}}(\cos\varphi-\cos\eta)^{\frac{\lambda}{2}}\,d\varphi$$

$$-\frac{i}{2\pi}2^{\lambda}\int_{\eta}^{2\pi-\eta}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi-\cos\xi}(\cos\xi-\cos\varphi)^{\frac{\lambda}{2}}(\cos\eta-\cos\varphi)^{\frac{\lambda}{2}}\,d\varphi$$

$$-\frac{i}{2\pi}2^{\lambda}e^{\frac{i\pi\lambda}{2}}\int_{2\pi-\eta}^{2\pi-\xi}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi-\cos\xi}(\cos\xi-\cos\varphi)^{\frac{\lambda}{2}}(\cos\varphi-\cos\eta)^{\frac{\lambda}{2}}d\varphi$$

$$-\frac{i}{2\pi}2^{\lambda}\int_{2\pi-\xi}^{2\pi}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi-\cos\xi}(\cos\varphi-\cos\xi)^{\frac{\lambda}{2}}(\cos\varphi-\cos\eta)^{\frac{\lambda}{2}}d\varphi\,.$$

Das erste und fünfte Integral ergeben die Summe 0; das dritte Integral verschwindet für sich. Wir erhalten somit nach Zusammenziehung des zweiten und vierten Integrals

$$2^{\lambda}\frac{\sin\frac{\pi\lambda}{2}}{\pi}\int_{\xi}^{\eta}\sin\varphi\,(\cos\xi-\cos\varphi)^{\frac{\lambda}{2}-1}(\cos\varphi-\cos\eta)^{\frac{\lambda}{2}}d\varphi$$

$$=2^{\lambda}\frac{\sin\frac{\pi\lambda}{2}}{\pi}\int_{y}^{x}(x-t)^{\frac{\lambda}{2}-1}(t-y)^{\frac{\lambda}{2}}dt=2^{\lambda}\frac{\sin\frac{\pi\lambda}{2}}{\pi}(x-y)^{\lambda}\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma(1+\lambda)}\,.$$

Wegen der bekannten Formeln

$$(17)\quad \frac{\pi}{\sin\frac{\pi\lambda}{2}}=\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right),\quad \Gamma(1+\lambda)=2^{\lambda}\frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

folgt hieraus die Behauptung.

Dieser Beweis ändert sich für $-1<x=y<1$ nur insofern, als das zweite und vierte Integral von vornherein fehlen. Die Gültigkeit von (14) in diesem Falle, ferner auch für $x=1$ oder $y=1$ folgt übrigens aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (14) für $-1\leqq x\leqq 1,\ -1\leqq y\leqq 1$.

Die Entwicklung (14) gilt schließlich, wie eine vorsichtigere Analyse zeigt, auch für $-1<\lambda<0, x\neq y$. Die Reihe ist dann bedingt konvergent; für $x=y$ wird sie divergent. Dieser Fall wird übrigens im folgenden nicht benutzt.

Das eben bewiesene Resultat kann, mit Rücksicht auf die bekannte Orthogonalitätseigenschaft der Jacobischen Polynome [31])

$$(18)\quad \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-\frac{1+\lambda}{2}}P_m^{\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}(x)\,P_n^{\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}(x)\,dx=\varepsilon_{mn}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma(-\lambda)}\frac{1}{1-\frac{2}{\lambda}m}\frac{\Gamma(m-\lambda)}{\Gamma(m+1)}$$

($\varepsilon_{mn}=0$ oder 1, je nachdem $m\neq n$ oder $m=n$ ist), auch in der folgenden Gestalt geschrieben werden:

$$(19)\quad \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-\frac{1+\lambda}{2}}|x-y|^{\lambda}P_m^{\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}(x)\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)}\frac{\Gamma(m-\lambda)}{\Gamma(m+1)}P_m^{\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}(y)$$

$$(m=0,1,2,\ldots;\quad -1\leqq y\leqq 1;\quad \lambda>0),$$

d. h. die Jacobischen Polynome $P_m^{\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}(x)$ liefern die Eigenfunktionen der Integralgleichung

$$\varphi(y)=k\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-\frac{1+\lambda}{2}}|x-y|^{\lambda}\varphi(x)\,dx.$$

Für $m = 0$ folgt Hilfssatz I. Auch (19) kann übrigens durch komplexe Integration bewiesen werden [32]).

6. Die angekündigte obere Abschätzung von $D^{(\lambda)}$ ergibt sich nun aus (14) einfach folgendermaßen. Man hat, wenn $-1 \leqq x_\nu \leqq 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ ist, für $0 < \lambda \leqq 1$,

$$\frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n} |x_\mu - x_\nu|^\lambda = \frac{n}{n-1}\frac{1}{n^2}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}|x_\mu - x_\nu|^\lambda$$

$$= \frac{n}{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\sum_{m=0}^{\infty}\left(1-\frac{2}{\lambda}m\right)\left\{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}P_m^{\left(-\frac{\lambda}{2}\right)}(x_\nu)\right\}^2$$

$$\leqq \frac{n}{n-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)},$$

so daß

$$D_n^{(\lambda)} \leqq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}^{\frac{1}{\lambda}}$$

gilt, woraus in der Tat (12) folgt.

§ 8. Beispiele: Kreislinie, Vollkreis (Kreisscheibe).

1. Kreislinie. Der Radius sei gleich 1. Man hat wegen $R^{(-1)} = D^{(-1)} = 0$ [23])

$$R^{(\lambda)} = D^{(\lambda)} = 0 \qquad (\lambda \leqq -1). \tag{1}$$

Aus der Definition von $R_n^{(\lambda)}$ folgt ferner, indem man die Punkte p_ν sämtlich in dem Mittelpunkt des Kreises vereinigt,

$$R_n^{(\lambda)} \leqq 1.$$

Wegen $R_n^{(0)} = 1$ erhält man also

$$R_n^{(\lambda)} = R^{(\lambda)} = 1 \qquad (\lambda \geqq 0). \tag{2}$$

Die untere Abschätzung von $R^{(\lambda)}$ $(-1 < \lambda < 0)$ erfolgt auf Grund von § 6, (2): Man hat

$$R^{(\lambda)} \geqq \operatorname*{Min}_{|z|\leqq 1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|z - e^{i\varphi}|^\lambda d\varphi\right\}^{\frac{1}{\lambda}}, \tag{3}$$

wobei z den Einheitskreis $|z| \leqq 1$ durchläuft. Nun ist für $|z| \leqq 1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|z - e^{i\varphi}|^\lambda\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|1 - \bar{z}e^{i\varphi}|^\lambda\, d\varphi \tag{3'}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{\lambda}{2}}{n}(-\bar{z}e^{i\varphi})^n\right|^2 d\varphi$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{\lambda}{2}}{n}^2|z|^{2n}$$

[32]) Auf Grund der Gleichung (19), die auch für $-1 < \lambda < 0$ gilt, läßt sich eine von Herrn T. Carleman

monoton wachsend mit $|z|$, so daß das fragliche Minimum für $|z| = 1$ erreicht wird. Man hat somit

$$R^{(\lambda)} \geqq \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |1 - e^{i\varphi}|^{\lambda}\, d\varphi\right\}^{\frac{1}{\lambda}} = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|2 \sin\frac{\varphi}{2}\right|^{\lambda} d\varphi\right\}^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$= \frac{\Gamma(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{2}{\lambda}}}. \tag{4}$$

Da das Integral (3′) für $|z| = 1$ konstant ist, so kann wegen § 6, (3) geschlossen werden, daß in (4) das Gleichheitszeichen gilt, $-1 < \lambda < 0$.

Dieselbe Rechnung liefert gemäß § 6, (4)

$$D^{(\lambda)} \geqq \left\{\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2}|^{\lambda}\, d\varphi_1\, d\varphi_2\right\}^{\frac{1}{\lambda}} = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |1 - e^{i\varphi}|^{\lambda}\, d\varphi\right\}^{\frac{1}{\lambda}} \tag{5}$$

$$= \frac{\Gamma(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{2}{\lambda}}} \qquad (\lambda > -1),$$

eine Abschätzung, die natürlich für $-1 < \lambda < 0$ aus (4) folgt. Für $\lambda = 0$ ist der letzte Ausdruck durch seinen Grenzwert 1 zu ersetzen.

2. Zur oberen Abschätzung von $D^{(\lambda)}$ benutzen wir die folgenden Hilfssätze:

Hilfssatz III. — *Es sei* $0 < r < 1$. *Die Koeffizienten der Entwicklung*

$$(1 + r^2 - 2r\cos\varphi)^{\frac{\lambda}{2}} = a_0(r) + 2\sum_{m=1}^{\infty} a_m(r)\cos m\varphi \tag{6}$$

sind für $\lambda < 0$ *sämtlich positiv. Für* $0 < \lambda < 2$ *gelten die Ungleichungen*

$$a_0(r) > 0; \quad a_1(r) < 0, \quad a_2(r) < 0, \quad a_3(r) < 0, \ldots .$$

Bezeichnet nämlich $f(\cos\varphi)$ die Funktion auf der linken Seite von (6), so hat man für $m \geqq 1$ nach einer Formel von Jacobi (vgl. Pólya-Szegö, 22, Bd. II, Abschnitt VI, Aufgabe 6, S. 76 bzw. S. 267)

$$\pi a_m(r) = \int_0^{\pi} f(\cos\varphi)\cos m\varphi\, d\varphi = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)}\int_0^{\pi} f^{(m)}(\cos\varphi)\sin^{2m}\varphi\, d\varphi.$$

Es habe nun $f^{(m)}(x)$ in dem Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ konstantes Vorzeichen. Die letzte Formel besagt, daß der m-te Fourierkoeffizient von $f(\cos\varphi)$ dem Vorzeichen nach mit $f^{(m)}(x)$ übereinstimmt. Der Fall $\lambda < 0$ erledigt sich übrigens auch durch die Zerlegung

$$(1 + r^2 - 2r\cos\varphi)^{\frac{\lambda}{2}} = (1 - re^{i\varphi})^{\frac{\lambda}{2}}\,(1 - re^{-i\varphi})^{\frac{\lambda}{2}}.$$

Nach dem Grenzübergang $r \to 1$ erhalten wir für die Koeffizienten der Entwicklung

$$\left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right|^{\lambda} = a_0 + 2\sum_{m=1}^{\infty} a_m\cos m\varphi \tag{6′}$$

die Ungleichungen

---

behandelte Aufgabe auf eine neue Weise lösen. Vgl. T. Carleman, Über die Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen. Math. Zeitschr. **15** (1922), S. 111—120.

$$(7)\qquad \begin{matrix} a_m \geqq 0 & \text{für} & -1 < \lambda < 0, \\ a_m \leqq 0 & \text{für} & 0 < \lambda \leqq 2 \end{matrix} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dies könnte man für $-1 < \lambda \leqq 1$ auch noch anders einsehen, vgl. Pólya-Szegö, 22, Bd. II, Abschnitt VI, Aufgabe 36, S. 81 bzw. S. 273—274.

Die Koeffizienten von (6′) lassen sich auch in expliziter Form berechnen [33]). Auf diese Weise können die Ungleichungen (7) bestätigt werden. In der Tat erhält man durch Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes auf die Funktion

$$z^{m-\frac{\lambda}{2}-1}(1-z)^{\lambda} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots;\ -1 < \lambda \leqq 2)$$

längs der in der Figur 2 angedeuteten Integrationskurve

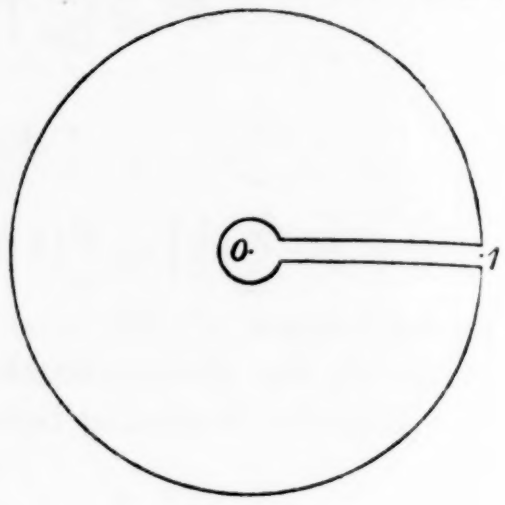

Fig. 2.

$$(8)\qquad a_m = -\frac{\sin\frac{\pi\lambda}{2}}{\pi}\,\frac{\Gamma(1+\lambda)\,\Gamma\left(m-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}+m\right)} = (-1)^m\,\frac{\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}-m\right)\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}+m\right)}.$$

Diese Formel gilt übrigens auch für $m = 0$. Sie liefert ohne weiteres die obige Behauptung bezüglich des Vorzeichens von a_m.

Die Entwicklung (6) ist für alle Werte von φ gültig, während (6′) für $\lambda > 0$ restlos gilt, für $-1 < \lambda < 0$ dagegen nur mit Ausnahme von $\varphi = 0$.

Weiter brauchen wir den

Hilfssatz IV. — *Es seien $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ beliebige Winkel, m eine positive ganze Zahl. Man hat*

$$(9)\qquad \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n} \cos m(\varphi_\mu - \varphi_\nu) \geqq -\frac{n}{2}.$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Ungleichung

$$\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} \cos m(\varphi_\mu - \varphi_\nu) = \left(\sum_{\nu=1}^{n} \cos m\varphi_\nu\right)^2 + \left(\sum_{\nu=1}^{n} \sin m\varphi_\nu\right)^2 \geqq 0.$$

3. Wir wollen nun $D^{(\lambda)}$ zunächst für $-1 < \lambda < 0$ nach oben abschätzen. Man hat

$$\{D_n^{(\lambda)}\}^{\lambda} = \operatorname{Min} \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n} |e^{i\varphi_\mu} - e^{i\varphi_\nu}|^{\lambda},$$

wobei $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sämtliche reellen Werte durchlaufen. Es ist aber für $0 < r < 1$

$$\begin{aligned} r\,|e^{i\varphi_\mu} - e^{i\varphi_\nu}|^2 &= 2r\,(1 - \cos(\varphi_\mu - \varphi_\nu)) \\ &\leqq 1 + r^2 - 2r\cos(\varphi_\mu - \varphi_\nu), \end{aligned}$$

so daß nach (6) und Hilfssatz IV (es ist $a_m(r) \geqq 0$, $m = 1, 2, 3, \ldots$)

---

[33]) Vgl. etwa E. T. Whittaker and G. N. Watson, A course of modern analysis, 4. Auflage, Cambridge 1927, S. 263, Aufgabe 40.

$$\frac{r^{\frac{\lambda}{2}}}{\binom{n}{2}} \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n} |e^{i\varphi_\mu} - e^{i\varphi_\nu}|^\lambda \geqq \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n} \{1 + r^2 - 2r\cos(\varphi_\mu - \varphi_\nu)\}^{\frac{\lambda}{2}}$$

$$= a_0(r) + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m(r)}{\binom{n}{2}} \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n} \cos m(\varphi_\mu - \varphi_\nu)$$

$$\geqq a_0(r) - \frac{2}{n-1}\sum_{m=1}^{\infty} a_m(r)$$

gilt. Hieraus schließt man

$$r^{\frac{\lambda}{2}} \{D_n^{(\lambda)}\}^\lambda \geqq a_0(r) - \frac{2}{n-1}\sum_{m=1}^{\infty} a_m(r).$$

Nach dem Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt sich somit

$$r^{\frac{\lambda}{2}} \{D^{(\lambda)}\}^\lambda \geqq a_0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + r^2 - 2r\cos\varphi)^{\frac{\lambda}{2}}\, d\varphi,$$

woraus für $r \to 1$

$$D^{(\lambda)} \leqq \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (2 - 2\cos\varphi)^{\frac{\lambda}{2}}\, d\varphi\right\}^{\frac{1}{\lambda}} = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|2\sin\frac{\varphi}{2}\right|^\lambda d\varphi\right\}^{\frac{1}{\lambda}} = \frac{\Gamma(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{2}{\lambda}}}$$

hervorgeht. Damit ist die Gleichung

$$D^{(\lambda)} = \frac{\Gamma(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{2}{\lambda}}} \tag{10}$$

für $-1 \leqq \lambda \leqq 0$ bewiesen. Für $\lambda = -1$ und $\lambda = 0$ ist der rechtsstehende Ausdruck durch 0 bzw. 1 zu ersetzen.

Im Falle $0 < \lambda \leqq 2$ erfährt diese Schlußweise nur eine geringfügige Modifikation. Sie gestaltet sich jetzt insofern einfacher, als der Grenzübergang $r \to 1$ sich als überflüssig erweist. Man hat wegen (6′) und Hilfssatz IV (es ist $a_m \leqq 0$ für $m = 1, 2, 3, \ldots$)

$$\frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n} |e^{i\varphi_\mu} - e^{i\varphi_\nu}|^\lambda = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n} \left|2\sin\frac{\varphi_\mu - \varphi_\nu}{2}\right|^\lambda$$

$$= a_0 + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{\binom{n}{2}} \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n} \cos m(\varphi_\mu - \varphi_\nu)$$

$$\leqq a_0 - \frac{2}{n-1}\sum_{m=1}^{\infty} a_m,$$

folglich nach dem Grenzübergang $n \to \infty$

$$D^{(\lambda)} \leqq a_0^{\frac{1}{\lambda}} = \frac{\Gamma(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{2}{\lambda}}}.$$

4. Es sei schließlich $\lambda \geqq 2$. Wir zeigen in diesem Falle

$$D^{(\lambda)} = 2^{1-\frac{1}{\lambda}}. \tag{11}$$

Für $\lambda = 2$ ist dies wegen $\frac{\Gamma(3)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(2)} = 2^{\frac{1}{2}}$ bereits bekannt. Nun gilt $D^{(\lambda)} \geqq 2^{1-\frac{1}{\lambda}}$ sogar für $\lambda > 0$, da $D^{(\lambda)}$ eine monotone Mengenfunktion ist [vgl. § 7, (3)]. Andererseits sieht man unmittelbar, daß der Ausdruck

$$2^{-\lambda} \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n} |e^{i\varphi_\mu} - e^{i\varphi_\nu}|^\lambda = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n} \left|\sin\frac{\varphi_\mu - \varphi_\nu}{2}\right|^\lambda$$

mit wachsendem λ abnimmt. Hieraus folgt dasselbe für $2^{-\lambda}\{D_n^{(\lambda)}\}^\lambda$, d. h. es gilt, wenn $\lambda \geqq 2$ ist,

$$2^{-\lambda}\{D_n^{(\lambda)}\}^\lambda \leqq 2^{-2}\{D_n^{(2)}\}^2, \quad 2^{-\lambda}\{D^{(\lambda)}\}^\lambda \leqq 2^{-2}\{D^{(2)}\}^2,$$

$$D^{(\lambda)} \leqq 2^{1-\frac{2}{\lambda}}\{D^{(2)}\}^{\frac{2}{\lambda}} = 2^{1-\frac{1}{\lambda}}, \qquad \text{w. z. b. w.}^{34}).$$

5. Vollkreis (Kreisscheibe). Der Radius sei gleich 1. Infolge der Bemerkung in § 5, **3** stimmen die Zahlen $R^{(\lambda)}$, $D^{(\lambda)}$ für $\lambda \geqq 0$ mit den oben für die Kreislinie berechneten Werten überein. Außerdem zeigen wir in § 10

$$R^{(\lambda)} = D^{(\lambda)} = 0 \qquad (\lambda \leqq -2). \tag{12}$$

Man kann also im folgenden stets $-2 < \lambda < 0$ annehmen. Es gilt übrigens [vgl. § 4, e)]

$$R^{(-1)} = D^{(-1)} = \frac{2}{\pi}. \tag{13}$$

Wir zeigen, daß

$$R^{(\lambda)} = \left\{\frac{\Gamma\left(\frac{2+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)}\right\}^{\frac{1}{\lambda}} = \left(\frac{\frac{\pi\lambda}{2}}{\sin\frac{\pi\lambda}{2}}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \qquad (-2 \leqq \lambda \leqq 0) \tag{14}$$

ist. [Man vgl. (14) mit § 7, (11).] Für $\lambda = -2$ und $\lambda = 0$ ist der letzte Ausdruck durch 0 bzw. 1 zu ersetzen.

Zum Beweis von (14) genügt es nach § 6, **2**, eine im Innern der fraglichen Kreisscheibe stückweise stetige, nichtnegative Funktion $m(p)$ anzugeben, für welche

$$\int m(p)\, d\sigma_p = 1$$

gilt und das Integral

---

[34]) Man erhält genauer $\{D_n^{(2)}\}^2 = 2\frac{n}{n-1}$, folglich

$$D_n^{(\lambda)} \leqq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{\lambda}} 2^{1-\frac{1}{\lambda}}.$$

Schreibt man diese Ungleichung in der Form

$$D_n^{(\lambda)} \leqq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{\lambda}} D^{(\lambda)},$$

so trifft sie, wie die Überlegung in **3** zeigt, sogar für $\lambda \geqq 0$, $n = 2, 3, 4, \ldots$ zu. Hier gilt das Gleichheitszeichen für $\lambda \geqq 2$, n gerade.

(15) $$\int m(p)\,|pq|^{\lambda}\,d\sigma_p \qquad (-2<\lambda<0)$$

von q unabhängig ist; hier bedeutet q einen beliebigen Punkt der Kreisscheibe, $d\sigma_p$ ihr Flächenelement.

Diese „natürliche Belegung" wird geliefert durch den

Hilfssatz V. — *Es sei* $-2<\lambda<0$. *Das Integral*

$$\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}(1-r^2)^{-\frac{2+\lambda}{2}}\,|z-re^{i\varphi}|^{\lambda}\,r\,dr\,d\varphi$$

ist für $|z|\leqq 1$ *konstant und gleich*

$$\frac{\pi^2}{-\sin\frac{\pi\lambda}{2}}.$$

Das ist das „zweidimensionale Analogon" des Hilfssatzes I. An die Stelle der dort betrachteten Belegung $(1-r^2)^{-\frac{1+\lambda}{2}}$ tritt hier $(1-r^2)^{-\frac{2+\lambda}{2}}$. Man kann den dort angeführten zweiten Beweis mühelos auf diesen Fall übertragen.

Wir setzen $\zeta=re^{i\varphi}$ und wenden die Substitution

$$\zeta=\frac{z+\zeta'}{1+\bar z\zeta'}$$

an, wodurch der Einheitskreis in sich transformiert wird. Man hat

$$1-r^2=1-|\zeta|^2=\frac{(1-|z|^2)\,(1-|\zeta'|^2)}{|1+\bar z\zeta'|^2},$$

$$|z-\zeta|^{\lambda}=\frac{(1-|z|^2)^{\lambda}\,|\zeta'|^{\lambda}}{|1+\bar z\zeta'|^{\lambda}},\quad \frac{d\zeta}{d\zeta'}=-\frac{1-|z|^2}{(1+\bar z\zeta')^2},$$

so daß das fragliche Integral in das folgende übergeht (wir schreiben wieder $\zeta'=re^{i\varphi}$):

$$(1-|z|^2)^{\frac{2+\lambda}{2}}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r^{\lambda}(1-r^2)^{-\frac{2+\lambda}{2}}}{|1+\bar z re^{i\varphi}|^2}\,r\,dr\,d\varphi.$$

Die Integration nach φ liefert

$$2\pi(1-|z|^2)^{\frac{2+\lambda}{2}}\int_0^1\frac{r^{\lambda+1}(1-r^2)^{-\frac{2+\lambda}{2}}}{1-|z|^2r^2}\,dr.$$

Setzt man hier

$$\frac{1-r^2}{1-|z|^2r^2}=t,$$

so folgt schließlich der Wert

$$\pi\int_0^1(1-t)^{\frac{\lambda}{2}}\,t^{-\frac{2+\lambda}{2}}\,dt=\pi\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)\Gamma\left(-\frac{\lambda}{2}\right)=\frac{\pi^2}{-\sin\frac{\pi\lambda}{2}}.$$

Die „natürliche Belegung" wird also

$$m(p)=(1-r^2)^{-\frac{2+\lambda}{2}}\left\{\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}(1-r^2)^{-\frac{2+\lambda}{2}}\,r\,dr\,d\varphi\right\}^{-1}=\frac{-\lambda}{2\pi}\,(1-r^2)^{-\frac{2+\lambda}{2}},$$

und das Integral (15) erhält den Wert

$$\frac{-\lambda}{2\pi}\frac{\pi^2}{-\sin\frac{\pi\lambda}{2}}=\frac{\frac{\pi\lambda}{2}}{\sin\frac{\pi\lambda}{2}},$$

womit (14) bewiesen ist.

§ 9. Beispiele: Kugelschale, Vollkugel.

Die Methoden und Resultate dieses Paragraphen sind denen des vorangehenden sehr ähnlich. Wir können also die Ausführungen etwas kürzer fassen.

1. Kugelschale. Der Radius sei gleich 1. Wir werden weiter unten [vgl. (9)] $D^{(-2)}=0$ zeigen. Daraus folgt

$$R^{(\lambda)}=D^{(\lambda)}=0 \qquad (\lambda\leqq -2). \tag{1}$$

Ferner hat man (vgl. § 8, **1**) $R_n^{(\lambda)}\leqq 1$, also wegen $R_n^{(-1)}=1$

$$R_n^{(\lambda)}=R^{(\lambda)}=1 \qquad (\lambda\geqq -1). \tag{2}$$

Wir schreiten zur Berechnung von $R^{(\lambda)}$ $(-2<\lambda<-1)$. Man hat

$$R^{(\lambda)}\geqq \operatorname*{Min}_{(q)}\left\{\frac{1}{4\pi}\int|pq|^{\lambda}d\sigma_p\right\}^{\frac{1}{\lambda}}, \tag{3}$$

wobei p die Einheitskugel E und q das Innere derselben durchläuft. Bedeutet ϱ den Abstand von q vom Kugelmittelpunkte, so wird der Ausdruck in der geschweiften Klammer $\{\ \}$ gleich

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(1+\varrho^2-2\varrho\cos\vartheta)^{\frac{\lambda}{2}}\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1+\varrho^2-2\varrho x)^{\frac{\lambda}{2}}dx$$

$$=\frac{(1+\varrho)^{\lambda+2}-(1-\varrho)^{\lambda+2}}{2\varrho(\lambda+2)}=\frac{1}{\lambda+2}\sum_{h=0}^{\infty}\binom{\lambda+2}{2h+1}\varrho^{2h}. \tag{4}$$

Dies wächst monoton mit ϱ, da sämtliche Binomialkoeffizienten positiv sind. Man erhält somit für $\varrho=1$

$$R^{(\lambda)}\geqq 2\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{1}{\lambda}} \qquad (-2<\lambda<-1). \tag{5}$$

Da das Integral (3) nur von ϱ abhängt, so ist es konstant, wenn q die Einheitskugel E durchläuft. Hieraus schließen wir, daß in (5) das Gleichheitszeichen gilt.

Eine ähnliche Rechnung liefert [vgl. § 8, (5)]

$$D^{(\lambda)}\geqq 2\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{1}{\lambda}} \qquad (\lambda>-2), \tag{6}$$

eine Ungleichung, die für $-2<\lambda<-1$ aus (5) folgt. Für $\lambda=0$ ist der letzte Ausdruck durch seinen Grenzwert $\frac{2}{\sqrt{e}}$ zu ersetzen.

2. Zur oberen Abschätzung von $D^{(\lambda)}$ dienen die folgenden Hilfssätze.

Hilfssatz VI. — *Es sei* $0<r<1$. *Die Koeffizienten der Legendreschen Entwicklung* [35])

[35]) Diese Entwicklung geht für $\lambda>-2$, $r\to 1$ in eine von F. Neumann berechnete und von Stieltjes diskutierte Reihe über. Vgl. L. Fejér, Über die Laplacesche Reihe, Math. Ann. **67** (1909), S. 76—109; s. insbesondere S. 100.

$$(7) \qquad (1 + r^2 - 2r\cos\vartheta)^{\frac{\lambda}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(r)\, P_m(\cos\vartheta)$$

(P_m das m-te Legendresche Polynom) sind für $-2 < \lambda < 0$ sämtlich positiv. Für $0 < \lambda < 2$ gelten die Ungleichungen

$$c_0(r) > 0; \quad c_1(r) < 0, \quad c_2(r) < 0, \quad c_3(r) < 0, \ldots .$$

Bezeichnet nämlich $f(\cos\vartheta)$ die Funktion auf der linken Seite von (7), so folgt durch m-malige partielle Integration

$$\frac{2}{2m+1}\, c_m(r) = \int_{-1}^{1} f(x)\, P_m(x)\, dx = \frac{1}{2^m\, m!} \int_{-1}^{1} f(x)\, \frac{d^m}{dx^m}\, (x^2-1)^m\, dx$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^m\, m!} \int_{-1}^{1} f^{(m)}(x)\, (x^2-1)^m\, dx.$$

Nun ist in dem ersten Falle offensichtlich $f^{(m)}(x) > 0$ für jedes x, $-1 \leqq x \leqq 1$. Im zweiten Falle ist $c_0(r) > 0$ klar; man hat ferner $f^{(m)}(x) < 0$ für $m \geqq 1$, $-1 \leqq x \leqq 1$.

Die Entwicklung (7) gilt übrigens im Falle $\lambda > 0$ auch für $r = 1$, im Falle $-2 < \lambda < 0$ jedoch nur, wenn $0 < \vartheta \leqq \pi$ ist.

Weiter brauchen wir den

Hilfssatz VII. — *Bezeichnen $\vartheta_\nu, \varphi_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) beliebige Punkte auf der Einheitskugel (ϑ_ν ist die Poldistanz, φ_ν die geographische Länge), bedeutet ferner $\gamma_{\mu\nu}$ die sphärische Entfernung der beiden Punkte $\vartheta_\mu, \varphi_\mu$ und $\vartheta_\nu, \varphi_\nu$, so ist*

$$(8) \qquad \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n} P_m(\cos\gamma_{\mu\nu}) \geqq -\frac{n}{2}.$$

In der Tat folgt dies unmittelbar aus dem Additionstheorem der Kugelfunktionen [36])

$$P_m(\cos\gamma_{\mu\nu}) = P_m(\cos\vartheta_\mu)\, P_m(\cos\vartheta_\nu) + 2 \sum_{k=1}^{m} \frac{(m-k)!}{(m+k)!}\, P_m^k(\cos\vartheta_\mu)\, P_m^k(\cos\vartheta_\nu) \cos k(\varphi_\mu - \varphi_\nu),$$

wobei die P_m^k die zugeordneten Funktionen sind. Nach Verwandlung von $\cos k(\varphi_\mu - \varphi_\nu)$ stellt sich die Summe der n^2 analogen Glieder, $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n$, als eine Summe von $2m+1$ Quadraten dar. Man erhält somit

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} P_m(\cos\gamma_{\mu\nu}) \geqq 0.$$

3. Es sei zunächst $-2 < \lambda < 0$. Die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ mögen unabhängig voneinander die Einheitskugel E durchlaufen; $\gamma_{\mu\nu}$ bezeichne die sphärische Entfernung des μ-ten Punktes p_μ von dem ν-ten Punkte p_ν. Man hat

$$\{D_n^{(\lambda)}\}^\lambda = \operatorname{Min} \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n} \{2(1-\cos\gamma_{\mu\nu})\}^{\frac{\lambda}{2}}.$$

Weiter gilt, wenn $0 < r < 1$ ist,

---

[36]) Vgl. etwa Riemann-Weber, 23, S. 400.

$$\frac{r^{\frac{\lambda}{2}}}{\binom{n}{2}} \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n} \{2(1-\cos\gamma_{\mu\nu})\}^{\frac{\lambda}{2}} \geqq \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n} (1+r^2-2r\cos\gamma_{\mu\nu})^{\frac{\lambda}{2}}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m(r)}{\binom{n}{2}} \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n} P_m(\cos\gamma_{\mu\nu})$$

$$\geqq c_0(r) - \frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^{\infty} c_m(r),$$

woraus ähnlich wie bei der Kreislinie,

$$D^{(\lambda)} \leqq \lim_{r\to 1} \{c_0(r)\}^{\frac{1}{\lambda}} = \left\{\frac{1}{2}\int_0^{\pi} (2-2\cos\vartheta)^{\frac{\lambda}{2}} \sin\vartheta\, d\vartheta\right\}^{\frac{1}{\lambda}} = 2\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{1}{\lambda}}$$

folgt. Damit ist die Gleichung

$$D^{(\lambda)} = 2\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{1}{\lambda}} \tag{9}$$

für $-2 \leqq \lambda \leqq 0$ bewiesen. In den Fällen $\lambda = -2$ und $\lambda = 0$ ist der rechtsstehende Ausdruck durch 0 bzw. $\frac{2}{\sqrt{e}}$ zu ersetzen. Für $0 < \lambda \leqq 2$ erfährt diese Schlußweise eine analoge Vereinfachung wie bei der Kreislinie. Es gilt somit (9) für $-2 \leqq \lambda \leqq 2$. Man hat z. B. $D^{(0)} = \frac{2}{\sqrt{e}}$ [37]).

4. Im Falle $\lambda \geqq 2$ zeigen wir

$$D^{(\lambda)} = 2^{1-\frac{1}{\lambda}}. \tag{10}$$

Für $\lambda = 2$ ist dies bereits bewiesen. Außerdem gilt $D^{(\lambda)} \geqq 2^{1-\frac{1}{\lambda}}$ sogar für $\lambda > 0$ [vgl. § 8, **4**]. Nun ist

$$2^{-\lambda} \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n} \{2(1-\cos\gamma_{\mu\nu})\}^{\frac{\lambda}{2}} = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n} \sin^{\lambda}\frac{\gamma_{\mu\nu}}{2}$$

eine monoton abnehmende Funktion von λ, woraus die Behauptung wie in § 8, **4** folgt [34]).

5. Vollkugel. Für $\lambda \geqq -1$ stimmen $R^{(\lambda)}$, $D^{(\lambda)}$ mit den bei der Kugelschale berechneten Werten überein. Außerdem gilt, wie wir in § 11 zeigen wollen,

$$R^{(\lambda)} = D^{(\lambda)} = 0 \qquad (\lambda \leqq -3). \tag{11}$$

Wir können somit $-3 \leqq \lambda \leqq -1$ annehmen. Wir zeigen

$$R^{(\lambda)} = \left\{\frac{\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right\}^{\frac{1}{\lambda}} \qquad (-3 \leqq \lambda \leqq -1). \tag{12}$$

[Man vgl. § 7, (11), § 8, (14).] Für $\lambda = -3$ ist dieser Ausdruck durch 0 zu ersetzen.

[37]) Einer brieflichen Mitteilung von Herrn Fekete zufolge (13. 8. 1929) hat Herr Hevroni schon früher $D^{(0)} \geqq \sqrt[18]{\frac{5}{4}}$ bewiesen.

Dazu ist wieder nur die Kenntnis einer „natürlichen Belegung" der Vollkugel nötig. Diese liefert hier der

Hilfssatz VIII. — *Es sei* $-3<\lambda<-1$. *Das Integral*

$$\int_0^1\int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-r^2)^{-\frac{3+\lambda}{2}}(\varrho^2-2\varrho r\cos\vartheta+r^2)^{\frac{\lambda}{2}}r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi$$

ist für $0\leqq\varrho\leqq 1$ *konstant und gleich*

$$\frac{2\pi^2}{-\cos\frac{\pi\lambda}{2}}=2\pi\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right).$$

Führt man nämlich die Integration nach φ und ϑ aus, so ergibt sich

$$\frac{2\pi}{\varrho(\lambda+2)}\int_0^1(1-r^2)^{-\frac{3+\lambda}{2}}(|r+\varrho|^{\lambda+2}-|r-\varrho|^{\lambda+2})\,r\,dr=-\frac{2\pi}{\varrho(\lambda+2)}\int_{-1}^1(1-r^2)^{-\frac{3+\lambda}{2}}|r-\varrho|^{\lambda+2}\,r\,dr.$$

Zur Berechnung des letzten Integrals wende man den Cauchyschen Integralsatz auf die Funktion

$$f(z)=(1-z^2)^{-\frac{3+\lambda}{2}}(\varrho-z)^{\lambda+2}z$$

an; die Integrationskurve sei dieselbe wie bei dem ersten Beweis von Hilfssatz I [Fig. 1, $y=\varrho$]. Man erhält

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{\varrho}(1-r^2)^{-\frac{3+\lambda}{2}}(\varrho-r)^{\lambda+2}\,r\,dr+e^{i\pi\lambda}\int_{\varrho}^{1}(1-r^2)^{-\frac{3+\lambda}{2}}(r-\varrho)^{\lambda+2}\,r\,dr\\&-\int_{1}^{\varrho}(1-r^2)^{-\frac{3+\lambda}{2}}(r-\varrho)^{\lambda+2}\,r\,dr-e^{i\pi\lambda}\int_{\varrho}^{-1}(1-r^2)^{-\frac{3+\lambda}{2}}(\varrho-r)^{\lambda+2}\,r\,dr\\&=(1+e^{i\pi\lambda})\int_{-1}^{1}(1-r^2)^{-\frac{3+\lambda}{2}}|r-\varrho|^{\lambda+2}r\,dr.\end{aligned}$$

Dies ist gleich dem Integral von

$$f(z)=e^{i\pi\frac{\lambda-3}{2}}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{3+\lambda}{2}}\left(1-\frac{\varrho}{z}\right)^{\lambda+2}=e^{i\pi\frac{\lambda-3}{2}}-e^{i\pi\frac{\lambda-3}{2}}\frac{\varrho(\lambda+2)}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\frac{c_3}{z^3}+\cdot$$

über einen beliebig großen, positiv durchlaufenen Kreis. Hieraus folgt

$$\int_{-1}^{1}(1-r^2)^{-\frac{3+\lambda}{2}}|r-\varrho|^{\lambda+2}\,r\,dr=-2\pi i\,e^{i\pi\frac{\lambda-3}{2}}\frac{\varrho(\lambda+2)}{1+e^{i\pi\lambda}}=\frac{\pi\varrho(\lambda+2)}{\cos\frac{\pi\lambda}{2}},$$

d. h. der Hilfssatz VIII. Die gesuchte „natürliche Belegung" wird somit

$$m(p)=(1-r^2)^{-\frac{3+\lambda}{2}}\left\{\int_0^1\int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-r^2)^{-\frac{3+\lambda}{2}}r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi\right\}^{-1}=\frac{\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}(1-r^2)^{-\frac{3+\lambda}{2}},$$

woraus die Behauptung hervorgeht.

§ 10. Zusammenfassung. Bemerkungen.

1. Die Ergebnisse der letzten drei Paragraphen lassen sich in der folgenden Tafel zusammenfassen:

$\mathfrak{M}$	$R^{(\lambda)}$	$D^{(\lambda)}$	$R^{(\lambda)} = D^{(\lambda)}$	$R^{(\lambda)}$, $D^{(\lambda)}$ stimmen überein für a und A, b und B, c und C
a) Zwei Punkte in der Entfernung 2	1 $\quad \lambda \geqq 1$ $2^{1-\frac{1}{\lambda}}$ $\quad 0 < \lambda \leqq 1$ 0 $\quad \lambda \leqq 0$	$2^{1-\frac{1}{\lambda}}$ $\quad \lambda > 0$ 0 $\quad \lambda \leqq 0$	ja für $\lambda \leqq 1$ nein für $\lambda > 1$	ja für $\lambda \geqq 1,\ \lambda \leqq -1$ nein für $-1 < \lambda < 1$
A) Vollstrecke von der Länge 2	1 $\quad \lambda \geqq 1$ $\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}^{\frac{1}{\lambda}}$ $\quad -1 \leqq \lambda \leqq 1$ 0 $\quad \lambda \leqq -1$	$2^{1-\frac{1}{\lambda}}$ $\quad \lambda \geqq 1$ $\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}^{\frac{1}{\lambda}}$ $\quad 0 \leqq \lambda \leqq 1$ 0 $\quad \lambda \leqq -1$	ja für $\lambda \leqq -1,\ 0 \leqq \lambda \leqq 1$ nein für $\lambda > 1$	
b) Kreislinie vom Radius 1	1 $\quad \lambda \geqq 0$ $\frac{\Gamma(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{2}{\lambda}}}$ $\quad -1 \leqq \lambda \leqq 0$ 0 $\quad \lambda \leqq -1$	$2^{1-\frac{1}{\lambda}}$ $\quad \lambda \geqq 2$ $\frac{\Gamma(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{2}{\lambda}}}$ $\quad -1 \leqq \lambda \leqq 2$ 0 $\quad \lambda \leqq -1$	ja für $\lambda \leqq 0$ nein für $\lambda > 0$	ja für $\lambda \geqq 0,\ \lambda \leqq -2$ nein für $-2 < \lambda < 0$
B) Vollkreis vom Radius 1	1 $\quad \lambda \geqq 0$ $\left(\frac{\frac{\pi\lambda}{2}}{\sin\frac{\pi\lambda}{2}}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$ $\quad -2 \leqq \lambda \leqq 0$ 0 $\quad \lambda \leqq -2$	$2^{1-\frac{1}{\lambda}}$ $\quad \lambda \geqq 2$ $\frac{\Gamma(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{2}{\lambda}}}$ $\quad 0 \leqq \lambda \leqq 2$ 0 $\quad \lambda \leqq -2$	ja für $\lambda \leqq -2$ nein für $\lambda > 0$	
c) Kugelschale vom Radius 1	1 $\quad \lambda \geqq -1$ $2\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{1}{\lambda}}$ $\quad -2 \leqq \lambda \leqq -1$ 0 $\quad \lambda \leqq -2$	$2^{1-\frac{1}{\lambda}}$ $\quad \lambda \geqq 2$ $2\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{1}{\lambda}}$ $\quad -2 \leqq \lambda \leqq 2$ 0 $\quad \lambda \leqq -2$	ja für $\lambda \leqq -1$ nein für $\lambda > -1$	ja für $\lambda \geqq -1,\ \lambda \leqq -3$
C) Vollkugel vom Radius 1	1 $\quad \lambda \geqq -1$ $\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\right\}^{\frac{1}{\lambda}}$ $\quad -3 \leqq \lambda \leqq -1$ 0 $\quad \lambda \leqq -3$	$2^{1-\frac{1}{\lambda}}$ $\quad \lambda \geqq 2$ $2\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{1}{\lambda}}$ $\quad -1 \leqq \lambda \leqq 2$ 0 $\quad \lambda \leqq -3$	ja für $\lambda \leqq -3$ nein für $\lambda > -1$	nein für $-3 < \lambda < -1$

Die Zahl $R^{(\lambda)}$ ist in allen sechs Fällen für sämtliche Werte von λ berechnet worden. Unbekannt ist $D^{(\lambda)}$

im Falle A) für $-1 < \lambda < 0$,
im Falle B) für $-2 < \lambda < 0$,
im Falle C) für $-3 < \lambda < -1$.

2. Die Behauptung der letzten Spalte ist mit den Ungleichungen

$$(1) \qquad \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \right\}^{\frac{1}{\lambda}} > 2^{1-\frac{1}{\lambda}} \qquad (0 < \lambda < 1),$$

$$(2) \qquad \left\{ \frac{\frac{\pi\lambda}{2}}{\sin\frac{\pi\lambda}{2}} \right\}^{\frac{1}{\lambda}} > \frac{\Gamma(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{2}{\lambda}}} \qquad (-1 < \lambda < 0),$$

$$(3) \qquad \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \right\}^{\frac{1}{\lambda}} > 2\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^{-\frac{1}{\lambda}} \qquad (-2 < \lambda < -1)$$

gleichbedeutend. (Es ist $R^{(\lambda)} \leqq D^{(\lambda)}$ zu berücksichtigen.) Man kann diese Ungleichungen, wie eine leichte Rechnung zeigt, folgendermaßen zusammenfassen:

$$(4) \qquad \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{d+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \right\}^{\frac{1}{\lambda}} > \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma(d-1+\lambda)}{\Gamma\left(d-1+\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+\lambda}{2}\right)} \right\}^{\frac{1}{\lambda}}$$
$$(1-d < \lambda < 2-d),$$

wobei d bzw. die Werte 1, 2, 3 bedeutet. Sie folgen mit dem Zeichen $\geqq$ trivialerweise aus der Deutung der einzelnen Seiten als $R^{(\lambda)}$ von geeigneten Mengen. Man kann sie aber leicht auch direkt begründen, wobei sich sogar das Zeichen $>$ ergibt.

In der Tat hat man wegen § 7, Hilfssatz I, $0 < \lambda < 1$,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1+\lambda}{2}} \frac{(1-x)^{\lambda}+(1+x)^{\lambda}}{2}\, dx.$$

Nun gilt für $-1 < x < 1$

$$(1-x)^{\lambda} + (1+x)^{\lambda} > 2^{\lambda},$$

woraus wegen § 7, (7)

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} > 2^{\lambda-1} \frac{\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1+\lambda}{2}}\, dx = 2^{\lambda-1}$$

folgt.

Zum Beweis von (2) berücksichtige man § 8, (3′) sowie Hilfssatz V. Man hat für $-1<\lambda<0,\ 0\leqq r<1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|1-re^{i\varphi}|^{\lambda}\,d\varphi<\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|1-e^{i\varphi}|^{\lambda}\,d\varphi=\frac{\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^2},$$

folglich

$$\frac{\frac{\pi\lambda}{2}}{\sin\frac{\pi\lambda}{2}}=\frac{-\lambda}{2\pi}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}(1-r^2)^{-\frac{2+\lambda}{2}}|1-re^{i\varphi}|^{\lambda}\,r\,dr\,d\varphi<-\lambda\int_0^1(1-r^2)^{-\frac{2+\lambda}{2}}\,r\,dr\,\frac{\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^2}.$$

Analog folgt (3) aus § 9, (4) sowie aus Hilfssatz VIII. Es ist für $-2<\lambda<-1$, $0\leqq r<1$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-2r\cos\vartheta+r^2)^{\frac{\lambda}{2}}\sin\vartheta\,d\vartheta=\frac{(1+r)^{\lambda+2}-(1-r)^{\lambda+2}}{2r(\lambda+2)}<2^{\lambda}\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^{-1},$$

also

$$\frac{\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}\int_0^1\int_0^{\pi}(1-r^2)^{-\frac{3+\lambda}{2}}(1-2r\cos\vartheta+r^2)^{\frac{\lambda}{2}}r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta$$

$$<\frac{\Gamma\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1+\lambda}{2}\right)}\int_0^1(1-r^2)^{-\frac{3+\lambda}{2}}\,r^2\,dr\cdot 2^{\lambda+1}\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^{-1}$$

$$=2^{\lambda}\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^{-1},\qquad\text{w. z. b. w.}$$

3. Wir haben in unseren Beispielen die asymptotische Verteilung der Extremalpunkte bei $D_n^{(\lambda)}$ und $R_n^{(\lambda)}$ (λ fest, $n\to\infty$) nur in wenigen einfachen Fällen nebenbei gefunden. Für die Strecke, Kreisfläche und Vollkugel stimmen diese „Endverteilungen“ in den Intervallen $-d<\lambda<2-d$, wo d die Bedeutung in (4) hat, — und diese λ-Intervalle sind besonders interessant — vermutlich mit den oben berechneten „natürlichen Belegungen“ überein. Man gelangt zu einem anschaulichen Verständnis der obigen Tafel, indem man das Verhalten dieser „Endverteilungen“ bei wachsendem λ verfolgt.

Die drei Fälle, die wir in den §§ 7—9 behandelt haben, nämlich der lineare, der ebene und der räumliche Fall, sind so ähnlich, daß wir uns bei der Beschreibung der Verhältnisse an den letzten halten können. Die „natürliche Belegung“ der Vollkugel ist für $-3<\lambda<-1$ (vgl. Ende von § 9) über das Innere derselben stetig verteilt. In der Nähe von $\lambda=-3$ ist die Verteilung nahezu gleichmäßig und wird, wenn λ wächst, immer dichter gegen die Berandung. Für den Wert $\lambda=-1$, dem der wichtige Fall des Newtonschen Potentials entspricht, gehen die „Endverteilungen“ für $D^{(\lambda)}$ und $R^{(\lambda)}$ auseinander. Die „Endverteilung“ für $D^{(\lambda)}$ geht völlig in die berandende Kugelschale über und erfüllt diese gleichmäßig. Sie verbleibt in diesem Zustande bis zum Wert $\lambda=2$. Beginnend

mit dem Wert $\lambda = 2$ konzentriert sie sich in zwei diametral gegenüberliegende Punkte. Die „Endverteilung" für $R^{(\lambda)}$ vereinigt für $\lambda \geqq -1$ die ganze Masse im Kugelmittelpunkt.

Im Falle der Kugelschale ist die „Endverteilung" für $D^{(\lambda)}$ und $R^{(\lambda)}$ dieselbe, solange λ zwischen -2 und -1 bleibt. Von dem kritischen Wert $\lambda = -1$ ab stimmt die Verteilung für Kugelschale und Vollkugel völlig überein. Zwischen -2 und -1 erstreckt sich die „Endverteilung" für die Vollkugel über das Innere und für die Kugelschale bloß über die Schale selbst. Daraus erklärt sich die Verschiedenheit von $D^{(\lambda)}$ bzw. $R^{(\lambda)}$ für Voll- und Randfigur in diesem Intervalle.

§ 11. Über die „Dimension" einer Menge.

1. Wir haben oben gesehen, daß für die Kreisscheibe und für die Kugelschale

$$D^{(\lambda)} = R^{(\lambda)} = 0 \qquad (\lambda \leqq -2), \tag{1}$$

$$D^{(\lambda)} \geqq R^{(\lambda)} > 0 \qquad (\lambda > -2) \tag{2}$$

gilt. Dieses interessante Resultat behält seine Gültigkeit, wie wir jetzt zeigen wollen, für eine beliebige Fläche mit stetiger Normale.

Die Behauptung (1) ist zunächst offenbar richtig für ein beliebiges *ebenes* Flächenstück. Weiter betrachten wir ein Flächenstück mit stetiger Normale, das man eineindeutig auf eine Ebene projizieren kann. Die Normale sei in keinem Punkte zu dieser Ebene parallel. Bezeichnen dann p und q zwei beliebige Punkte der Fläche, p' und q' ihre Projektionen, so bleibt der Quotient

$$\frac{|pq|}{|p'q'|}$$

offensichtlich kleiner als eine nur von der Fläche und der Projektionsebene abhängige Konstante A. Hieraus folgt, daß die zu der Fläche gehörige Zahl $D_n^{(\lambda)}$ das A-fache der zu der Projektionsmenge gehörigen Zahl $D_n^{(\lambda)}$ nicht übersteigen kann. Sie muß somit, wenn $\lambda \leqq -2$ ist, für $n \to \infty$ gleichfalls gegen 0 konvergieren.

Eine ähnliche Schlußweise lehrt übrigens die Richtigkeit von (2), sogar gleich für eine beliebige Fläche mit stetiger Normale. In der Tat kann man ein genügend kleines Stück einer solchen Fläche stets eineindeutig auf eine Ebene projizieren. Beim Übergang von dem Flächenstück zu der Projektionsmenge kann die Zahl $R_n^{(\lambda)}$ nur abnehmen.

Zum Beweis des Satzes (1) für eine beliebige Fläche mit stetiger Normale ist noch die folgende Bemerkung zu berücksichtigen. Gilt die Gleichung $D^{(\lambda)} = 0$ $(\lambda < 0)$ für zwei Mengen $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$, so gilt sie auch für $\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$. Es seien nämlich die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ auf $\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$ so gewählt, daß

$$\sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n} |p_\mu p_\nu|^\lambda = \binom{n}{2} D_n^\lambda$$

wird, wobei $D_n = D_n^{(\lambda)}$ die zu $\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$ gehörige Zahl bedeutet. Man bezeichne mit n' und n'' die Anzahl der zu $\mathfrak{M}'$ bzw. der nicht zu $\mathfrak{M}'$ (also zu $\mathfrak{M}''$) gehörigen Punkte, $n' + n'' = n$; es sei ferner etwa $n' \geqq \left[\frac{n}{2}\right] = N$. Dann ist offenbar

$$\binom{n}{2} D_n^\lambda \geqq \binom{n'}{2} D_{n'}^{\prime\lambda},$$

wobei D'_n zu $\mathfrak{M}'$ und zu demselben Werte von λ wie $D_n^{(\lambda)}$ gehört. Man hat aber $\binom{n'}{2} > c\binom{n}{2}$, wo c eine feste positive Zahl bedeutet, so daß wegen § 5, (4)

$$D_n \leqq c^{\frac{1}{\lambda}} D'_{n'} \leqq c^{\frac{1}{\lambda}} D'_N$$

ist, woraus für $n \to \infty$ die Behauptung folgt.

2. Man kann übrigens (1) auch direkt, unabhängig von den Resultaten der §§ 8, 9 begründen. Es genügt wieder, ein ebenes Flächenstück, etwa ein abgeschlossenes Quadrat Q zu betrachten; man kann ferner $\lambda = -2$ setzen. Es sei n positiv ganz, $n \geqq 2$, und die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ von Q so gewählt, daß

$$\sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,n} |p_\mu p_\nu|^{-2} = \binom{n}{2} \{D_n^{(-2)}\}^{-2}$$

wird. Wir teilen Q in 4 kongruente Teilquadrate Q_i ein und bezeichnen mit n_i die Anzahl derjenigen Punkte p_ν, die in Q_i liegen ($i = 1, 2, 3, 4$; die an der gemeinsamen Begrenzung zweier Teilquadrate gelegenen Punkte werden etwa dem mit kleinerem Index zugewiesen). Man hat dann

$$\binom{n}{2} \{D_n^{(-2)}\}^{-2} \geqq \sum_{i=1}^{4} \binom{n_i}{2} \left\{\frac{D_{n_i}^{(-2)}}{2}\right\}^{-2} + (n_1 n_2 + n_1 n_3 + \cdots + n_3 n_4)\, D^{-2},$$

wobei D den Durchmesser von Q bedeutet. Beschränkt man sich nun auf eine solche Folge von n-Werten, für welche die Grenzwerte

$$\lim \frac{n_i}{n} = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

existieren, so folgt unter der Voraussetzung $D^{(-2)} > 0$

$$\{D^{(-2)}\}^{-2} \geqq \{D^{(-2)}\}^{-2}\, 4 \sum_{i=1}^{4} \alpha_i^2 + 2\,(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_3\alpha_4)\, D^{-2},$$

also

$$1 \geqq 4 \sum_{i=1}^{4} \alpha_i^2.$$

Wegen $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 1$ kann die zweite Ungleichung nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{4}$ bestehen; dann lautet aber die erste

$$0 \geqq 2\binom{4}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 D^{-2},$$

was offenbar unmöglich ist.

Noch einmal zusammenfassend erhalten wir also:

Für eine beliebige Fläche mit stetiger Normale gilt $D^{(\lambda)} = R^{(\lambda)} = 0$ *bei* $\lambda \leqq -2$ *und* $D^{(\lambda)} \geqq R^{(\lambda)} > 0$ *bei* $\lambda > -2$.

Die durchgeführte Schlußweise ergibt allgemein:

Es sei $\mathfrak{M}$ *eine beschränkte abgeschlossene Menge,*

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots + \mathfrak{M}_t,$$

und die t *Teilmengen* $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_t$ *seien einander kongruent und* $\mathfrak{M}$ *ähnlich, und zwar so, daß die entsprechenden linearen Abmessungen in* $\mathfrak{M}$ *und* $\mathfrak{M}_1$ *sich wie* 1 *zu* θ *verhalten,* $0 < \theta < 1$. *Dann ist*

$$D^{(\lambda)} = 0 \quad \textit{für} \quad \lambda = \frac{\log t}{\log \theta}.$$

Im eben behandelten Fall des Quadrates hatten wir $t = 4$ Teilquadrate und es war $\theta = \frac{1}{2}$. Indem wir einen Würfel in $t = 8$ Teilwürfel mit $\theta = \frac{1}{2}$ teilen, erhalten wir $D^{(-3)} = 0$. Also:

Für eine beliebige beschränkte und abgeschlossene Menge gilt $D^{(\lambda)} = R^{(\lambda)} = 0$, *sobald* $\lambda \leqq -3$ *ist.*

Für eine Strecke ergibt die Teilung in $t = 2$ Teilstrecken mit $\theta = \frac{1}{2}$ ein schon aus § 4, d) bekanntes Resultat. Wir erhalten durch ähnliche Schlüsse wie vorher:

Für eine beliebige Kurve mit stetiger Tangente ist $D^{(\lambda)} = R^{(\lambda)} = 0$, *wenn* $\lambda \leqq -1$, *und* $D^{(\lambda)} \geqq R^{(\lambda)} > 0$, *wenn* $\lambda > -1$ [38]).

3. Es sei $\mathfrak{M}$ eine beliebige endliche oder unendliche Menge. Ist sie unendlich, so möge sie beschränkt und abgeschlossen sein. Die obere Grenze sämtlicher Werte von λ, für welche $D^{(\lambda)}(\mathfrak{M}) = D^{(\lambda)}$ bzw. $R^{(\lambda)}(\mathfrak{M}) = R^{(\lambda)}$ verschwindet, bezeichnen wir mit $-d'$ bzw. $-d''$ [39]). Aus der Ungleichung § 5, (7) folgt $d' \geqq d''$.

Nach dem Vorhergehenden gilt für eine Kurve mit stetiger Tangente $d' = d'' = 1$ und für eine Fläche mit stetiger Normale $d' = d'' = 2$. Enthält $\mathfrak{M}$ eine Vollkugel, so muß $d' = d'' = 3$ sein. Enthält $\mathfrak{M}$ nur endlich viele (mindestens zwei) Punkte, so ist (vgl. § 7, **1**) $d' = d'' = 0$.

Beim Übergang von einer Menge zu einer ihrer Teilmengen können die Zahlen d' und d'' nur abnehmen. Da nach § 7, **1** für eine Menge mit genau zwei verschiedenen Punkten $d' = d'' = 0$ gilt, so hat man allgemein

$$0 \leqq d' \leqq 3, \quad 0 \leqq d'' \leqq 3, \tag{3}$$

vorausgesetzt, daß die Menge, die aus einem einzigen Punkte besteht (sowie natürlich die leere Menge) ausgeschlossen bleibt. Die Zahlen d' (oder d'') können also zur Definition einer Art „Dimension" einer Menge dienen.

Auf alle Fälle gilt bei dieser Definition (vgl. **1**): *Ist* d' *die Dimension von* $\mathfrak{M}_1$ *und hat keine der Mengen* $\mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_t$ *eine höhere Dimension als* d', *so ist* d' *auch die Dimension von* $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots + \mathfrak{M}_t$.

Wir stellen nun die folgende Frage: *Gibt es stets Mengen mit vorgeschriebener Dimension* d'?

Es muß natürlich $0 \leqq d' \leqq 3$ vorausgesetzt werden. Wir zeigen, daß diese Frage in bejahendem Sinne zu beantworten ist. Man kann sogar Mengen auf einer Geraden bzw. in einer Ebene definieren, für welche d' einen vorgeschriebenen Wert mit $0 \leqq d' \leqq 1$ bzw. $0 \leqq d' \leqq 2$ besitzt. Man bedient sich zu diesem Zwecke der bekannten, von G. Cantor in die Mengenlehre eingeführten perfekten und nirgends dichten Mengen, ähnlich wie in der Hausdorffschen Dimensionstheorie [40]).

4. Betrachten wir zunächst die wohlbekannte Cantorsche Menge $\mathfrak{M}$, die aus dem abgeschlossenen Intervall $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ nach Tilgung des offenen mittleren Drittels, sodann durch fortgesetzte Anwendung dieser Operation auf die restierenden abgeschlossenen Intervalle entsteht. Nach einer Bemerkung des Herrn J. v. Neumann [41]) gilt bei dieser Menge

$$D^{(0)} = R^{(0)} > 0.$$

Wir zeigen genauer

---

[38]) Vgl. Kellogg, 16, S. 331, Aufgabe 5.

[39]) In sämtlichen untersuchten Beispielen ist $-d'$ bzw. $-d''$ gleich dem *Maximum* der genannten λ-Werte.

[40]) F. Hausdorff, Dimension und äußeres Maß. Math. Ann. **79** (1918), S. 157–179. Vgl. insbesondere S. 167 ff.

[41]) Fekete, 11, I. Mitt., S. 113–114.

$$D^{(\lambda)} > 0 \qquad \text{für} \quad \lambda > -\frac{\log 2}{\log 3}\,, \tag{4}$$

$$D^{(\lambda)} = 0 \qquad \text{für} \quad \lambda \leqq -\frac{\log 2}{\log 3}\,, \tag{5}$$

so daß dieser Menge die „Dimension"

$$d' = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.630\,93\ldots \tag{6}$$

zuzuschreiben ist. Diese Zahl stimmt übrigens merkwürdigerweise mit der Hausdorffschen „Dimension" von $\mathfrak{M}$ überein [42]).

Zum Beweis von (5) bemerke man, daß die Menge in $t = 2$ zueinander kongruente Teile geteilt werden kann, die zu der ganzen Menge ähnlich sind, wobei die Linearabmessungen sich wie 1 zu $\frac{1}{3} = \theta$ verhalten, vgl. **2.**

Zum Beweis von (4) kann die v. Neumannsche Schlußweise fast ohne Änderung übernommen werden. Es sei $N = 2^n$ und die Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_N$ durch triadische Entwicklungen

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varepsilon_\nu}{3^\nu} + \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+2}} + \frac{1}{3^{n+3}} + \cdots$$

definiert, wobei die ε_ν der beiden Werte $-1, +1$ fähig sind. Die so definierten x_ν gehören zu $\mathfrak{M}$ und bilden die rechten Endpunkte der 2^n Intervalle, welche nach n-maliger Anwendung der oben geschilderten Tilgungsoperation übrigbleiben. Man betrachte nun die Paare (x_μ, x_ν), die sich zuerst in den k-ten Ziffern unterscheiden, in den vorigen jedoch übereinstimmen; ihre Anzahl ist $\frac{1}{2} \cdot 2^n \cdot 2^{n-k} = 2^{2n-k-1}$. Man hat ferner

$$|x_\mu - x_\nu| \geqq \frac{1}{3^k} + \frac{1}{3^n} > \frac{1}{3^k}\,. \tag{7}$$

Es ist somit für $\lambda < 0$

$$\{D_N^{(\lambda)}\}^\lambda \leqq \binom{N}{2}^{-1} \sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,N} |x_\mu - x_\nu|^\lambda < \binom{N}{2}^{-1} \sum_{k=1}^{n} 2^{2n-k-1} 3^{-\lambda k} = \frac{2^n}{2^n - 1} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3^{-\lambda}}{2}\right)^k,$$

und dieser Ausdruck bleibt für $n \to \infty$ beschränkt, wenn $3^{-\lambda} < 2$, d. h. $\lambda > -\frac{\log 2}{\log 3}$ gilt.

5. Die vorige Betrachtung kann leicht verallgemeinert werden. Es sei $0 < \theta < \frac{1}{2}$, und man tilge aus dem abgeschlossenen Intervall $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ das in bezug auf die Mitte symmetrische offene Intervall von der Länge $1-2\theta$ und wende die analoge Operation auf die beiden restierenden Intervalle von der Länge θ an. Man definiere die Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_N$ $(N = 2^n)$ als die rechten Endpunkte der Intervalle, welche nach n-maliger Wiederholung dieses Prozesses übrigbleiben. An die Stelle der Ungleichung (7) tritt dann

$$|x_\mu - x_\mu| \geqq \theta^{k-1}(1 - 2\theta) + \theta^n > \theta^{k-1}(1 - 2\theta) \tag{7'}$$

und es folgt wie dort $D^{(\lambda)} > 0$, sobald $\theta^\lambda < 2$ ist. Die Umkehrung $D^{(\lambda)} = 0$ für $\theta^\lambda \leqq 2$ läßt sich auch genau wie in **4** beweisen. Man hat somit [42])

$$d' = \frac{\log 2}{\log \frac{1}{\theta}} \tag{8}$$

---

[42]) A. a. O. [40]), S. 172. — Vgl. noch Myrberg, 17.

und dieser Ausdruck wächst monoton von 0 bis 1, wenn θ von 0 bis $\frac{1}{2}$ wächst. Die Grenzfälle $d' = 0$ und $d' = 1$ können durch die beiden in § 7 behandelten speziellen Mengen realisiert werden.

In der Ebene lassen sich analoge Mengen konstruieren. Man geht von einem abgeschlossenen Quadrat Q aus, teilt es in 9 kongruente Teilquadrate ein und tilgt 5 Teilquadrate, so daß die verbleibenden 4 abgeschlossenen Teilquadrate je eine Ecke mit Q gemein haben. Durch Fortsetzung dieser Operation entsteht eine Menge von der „Dimension“

$$d' = 2\frac{\log 2}{\log 3}. \tag{9}$$

Diese Konstruktion kann ähnlich wie oben verallgemeinert werden; man wird auf diese Weise auf eine Menge von der „Dimension“

$$d' = 2\frac{\log 2}{\log \frac{1}{\theta}} \qquad \left(0 < \theta < \frac{1}{2}\right) \tag{10}$$

geführt. Analoge Betrachtungen gelten im Raume.

§ 12. Über eine Extremalaufgabe.

Es seien λ und n feste Zahlen, n positiv ganz. Für die Gesamtheit aller abgeschlossenen Mengen $\mathfrak{M}$, deren orthogonale Projektion auf eine feste Gerade einen gegebenen äußeren Jordaninhalt besitzt, wird die Zahl $R_n^{(\lambda)}$ dann Minimum, wenn $\mathfrak{M}$ eine zu der gegebenen Geraden parallele Strecke ist.

Der Spezialfall $\lambda = 0$ dieses Satzes ist von G. Pólya, a. a. O. 21, I. Mitt., bewiesen worden. Die dortige Beweismethode führt nach einigen Änderungen auch zu dem eben ausgesprochenen allgemeinen Theorem. Hierbei ist insbesondere das Rechnen mit komplexen Zahlen durch geometrische Betrachtungen zu ersetzen.

Man kann von vornherein annehmen, daß die Menge $\mathfrak{M}$ auf der gegebenen Geraden liegt, da die Zahl $R_n^{(\lambda)}$ bei dem Übergang von einer gegebenen Menge zu ihrer orthogonalen Projektion nur eine Verkleinerung erfahren kann. Es seien $p_1, p_2, \ldots, p_n$ so gewählt, daß

$$\operatorname*{Max}_{(p \text{ auf } \mathfrak{M})} \left\{ \frac{|p\,p_1|^\lambda + |p\,p_2|^\lambda + \cdots + |p\,p_n|^\lambda}{n} \right\}^{\frac{1}{\lambda}} = R_n^{(\lambda)} \tag{1}$$

wird. Die Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ liegen dann auf derselben Geraden wie $\mathfrak{M}$ [14]). Wir bezeichnen mit $\mathfrak{N}$ die Menge der Punkte p, für welche

$$\left\{ \frac{|p\,p_1|^\lambda + |p\,p_2|^\lambda + \cdots + |p\,p_n|^\lambda}{n} \right\}^{\frac{1}{\lambda}} \leqq R_n^{(\lambda)} \tag{2}$$

gilt. Sie enthält $\mathfrak{M}$ und es gehört zu ihr offensichtlich dieselbe Zahl $R_n^{(\lambda)}$ wie zu $\mathfrak{M}$. Sie besteht ferner aus einer endlichen Anzahl von getrennten abgeschlossenen Strecken. Ob die einzelnen Strecken Punkte p_ν enthalten oder nicht, ist für uns ohne Belang; es steht jedenfalls fest, daß dies für die beiden *äußersten* Strecken zutrifft. In der Tat ist der Ausdruck auf der linken Seite von (2) rechts von dem „letzten“ p_ν monoton wachsend; analoges gilt ferner links von dem „ersten“ p_ν.

Wir verschieben nun die rechtsäußerste Strecke nach links, bis sie an die benachbarte Strecke stößt. Ersetzt man die in der verschobenen Strecke gelegenen p_ν durch die Punkte, in welche sie nach der Verschiebung übergehen, so entsteht eine ganz bestimmte neue Punktgruppe

$$p_1', p_2', \ldots, p_n';$$

sie besitzt die Eigenschaft, daß auf der nach der Verschiebung der letzten Strecke entstehenden Menge $\mathfrak{N}'$ die Ungleichung

$$\left\{\frac{|pp_1'|^\lambda + |pp_2'|^\lambda + \cdots + |pp_n'|^\lambda}{n}\right\}^{\frac{1}{\lambda}} \leqq R_n^{(\lambda)}$$

erfüllt ist. Wendet man weiter denselben Verschiebungsprozeß auf die rechtsäußerste Strecke von $\mathfrak{N}'$ an (sie enthält mindestens einen Punkt p_ν'), so gelangt man zu einer weiteren Punktgruppe

$$p_1'', p_2'', \ldots, p_n''$$

und zu einer Menge $\mathfrak{N}''$ von ähnlicher Beschaffenheit wie $\mathfrak{N}'$. Nach endlich-oft-maliger Wiederholung dieses Verfahrens entsteht schließlich eine Punktgruppe

$$p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \ldots, p_n^{(k)}$$

sowie eine *Strecke* $\mathfrak{N}^{(k)}$ von derselben Länge wie $\mathfrak{N}$ derart, daß sämtliche Punkte von $\mathfrak{N}^{(k)}$ die Bedingung

$$\left\{\frac{|pp_1^{(k)}|^\lambda + |pp_2^{(k)}|^\lambda + \cdots + |pp_n^{(k)}|^\lambda}{n}\right\}^{\frac{1}{\lambda}} \leqq R_n^{(\lambda)}$$

erfüllen. Daraus folgt aber

$$\underset{(p_\nu \text{ beliebig})}{\text{Min}} \quad \underset{(p \text{ auf } \mathfrak{N}^{(k)})}{\text{Max}} \left\{\frac{|pp_1|^\lambda + |pp_2|^\lambda + \cdots + |pp_n|^\lambda}{n}\right\}^{\frac{1}{\lambda}} \leqq R_n^{(\lambda)},$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Der eben dargetane Satz bleibt übrigens richtig, wenn darin $R_n^{(\lambda)}$ durch $D_n^{(\lambda)}$ ersetzt wird, wie man auf analoge Weise begründet. Liegen etwa die Punkte $p_{l+1}, p_{l+2}, \ldots, p_n$ in der nach links verschobenen rechtsäußersten Strecke, so bleiben bei dieser Verschiebung

$$\sum_{\mu<\nu}^{1,2,\ldots,l} |p_\mu p_\nu|^\lambda, \qquad \sum_{\mu<\nu}^{l+1,l+2,\ldots,n} |p_\mu p_\nu|^\lambda$$

unverändert, während die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{l} \sum_{\nu=l+1}^{n} |p_\mu p_\nu|^\lambda$$

abnimmt bzw. zunimmt, je nachdem $\lambda > 0$ bzw. $\lambda < 0$ ist. Man schließt nun ähnlich weiter wie oben.

Zitierte Literatur.

N. Achyeser.

1. Sur les polynomes de Tchebycheff pour deux segments. Comptes Rendus **191** (1930), S. 754—756.

F. Carlson.

2. Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten. Math. Zeitschr. **9** (1921), S. 1—13.

G. Faber.

3. Über Tschebyscheffsche Polynome. Journal für Math. **150** (1919), S. 79—106.
4. Potentialtheorie und konforme Abbildung. Sitzungsber. der Bayerischen Akad. der Wiss. 1920, S. 49—64.

L. Fejér.

5. Über die Lage der Nullstellen von Polynomen, die aus Minimumforderungen gewisser Art entspringen. Math. Ann. **85** (1922), S. 41—48.

M. Fekete.

6. Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. Math. Zeitschr. **17** (1923), S. 228—249.
7. Über Potenzreihen, deren Koeffizienten fast alle ganzzahlig sind. Math. Ann. **96** (1926), S. 410—417.

8. Über Interpolation. Zeitschr. für angew. Math. und Mechanik **6** (1926), S. 410—413.

9. Über den absoluten Betrag von Polynomen, welche auf einer Punktmenge gleichmäßig beschränkt sind. Math. Zeitschr. **26** (1927), S. 324—344.

10. Über die Wertverteilung bei ganzzahligen Polynomen. Math. Zeitschr. **31** (1930), S. 521—526.

11. Über den transfiniten Durchmesser ebener Punktmengen. I, II. Math. Zeitschr. **32** (1930), S. 108—114, S. 215—221; III. unter Drucklegung.

12. Über den transfiniten Durchmesser von linearen Punktmengen. Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae **5** (1930), S. 19—22.

M. Fekete und J. v. Neumann.

13. Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimumpolynome. Jahresbericht der Deutschen Math. Ver. **31** (1922), S. 125—138.

S. Fukasawa.

14. Über den Feketeschen Satz. The Tôhoku Mathematical Journal **26** (1926), S. 201—204. Bemerkung dazu ebenda **28** (1927), S. 265.

D. Hilbert.

15. Über die Entwickelung einer beliebigen analytischen Funktion einer Variablen in eine unendliche nach ganzen Rationalen fortschreitende Reihe. Göttinger Nachrichten 1897, S. 63—70.

O. D. Kellogg.

16. Foundations of potential theory. Berlin 1929.

P. J. Myrberg.

17. Bemerkung zur Theorie des transfiniten Durchmessers einer ebenen Punktmenge. Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Serie A, **33** (1930), Nr. 7, S. 1—4.

G. Pólya.

18. Arithmetische Eigenschaften und analytischer Charakter. Jahresbericht der Deutschen Math. Ver. **31** (1922), S. 107—115.

19. Sur les séries entières à coefficients entiers. Proceedings of the London Math. Soc. (2) **21** (1922), S. 22—38.

20. Über gewisse notwendige Determinantenkriterien für die Fortsetzbarkeit einer Potenzreihe. Math. Ann. **99** (1928), S. 687—706.

21. Beitrag zur Verallgemeinerung des Verzerrungssatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete. I, II, III. Sitzungsberichte der Preußischen Akad. der Wiss. 1928, S. 228—232, S. 280—282; 1929, S. 55—62.

G. Pólya und G. Szegö.

22. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. Bd. I und II. Berlin 1925, 1926.

Riemann-Weber.

23. Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Herausgegeben von R. v. Mises. Bd. I, zweite Auflage, Braunschweig 1930.

I. Schur.

24. Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. Math. Zeitschr. **1** (1918), S. 377—402.

G. Szegö.

25. Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören. Math. Zeitschr. **9** (1921), S. 218—270.

26. Über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten. Sitzungsberichte der Preußischen Akad. der Wiss. 1922, S. 88—91.

27. Tschebyscheffsche Polynome und nichtfortsetzbare Potenzreihen. Math. Ann. **87** (1922), S. 90—111.

28. Über die Tschebyscheffschen Polynome. Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae **1** (1923), S. 65—73.

29. Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn M. Fekete: Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. Math. Zeitschr. **21** (1924), S. 203—208.

30. Über einen Satz von A. Markoff. Math. Zeitschr. **23** (1925), S. 45—61.

31. Verallgemeinerung des ersten Bieberbachschen Flächensatzes auf mehrfach zusammenhängende Gebiete. Sitzungsberichte der Preußischen Akad. der Wiss. 1928, S. 477—481.

L. Tonelli.

32. I polinomi d'approssimazione di Tschebychev. Annali di Matematica (3) **15** (1908), S. 47—119.

de la Vallée Poussin.

33. Sur les polynomes d'approximation à une variable complexe. Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, Classe des Sciences, Nr. 3, 1911, S. 199—211.

Eingegangen 21. Dezember 1930.

Kleine Bemerkung zur Theorie der elliptischen Differentialgleichungen.

Von *Eberhard Hopf* in Berlin-Dahlem.

Es sei

$$L(u) \equiv a u''_{xx} + 2b u''_{xy} + c u''_{yy} = 0; \quad ac - b^2 > 0, \quad a > 0$$

eine in der ganzen $x - y$-Ebene elliptische lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Koeffizienten $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ seien überall stetig. Nach Herrn S. Bernstein [1]) ist jede in der ganzen Ebene zweimal stetig differenzierbare und beschränkte Lösung $u(x, y)$ von $L(u) = 0$ notwendig eine Konstante. Dieses Theorem gilt nicht mehr, wenn man das Wort „beschränkte" durch „positive" ersetzt, wie das Beispiel

$$a = 1 + e^y, \quad b = 1, \quad c = e^{-y}; \quad u = e^{x - e^y}$$

zeigt. Unter besonderen Voraussetzungen über das Verhalten der Koeffizienten im Unendlichen ist jedoch zu erwarten, daß die entsprechende Verallgemeinerung des Harnackschen Satzes von den überall positiven harmonischen Funktionen richtig ist. Lediglich des äußerst einfachen Beweises halber sei im folgenden ein solcher Satz mitgeteilt.

Satz. *Für* $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$ *gelte* $a \to a^*$, $b \to b^*$, $c \to c^*$ *und es sei auch* $a^* c^* - b^{*2} > 0$, $a^* > 0$. *Über die Konvergenzgeschwindigkeit sei*

$$|a - a^*|, \quad |b - b^*|, \quad |c - c^*| = 0(r^{-\lambda})$$

mit konstantem $\lambda > 0$ *vorausgesetzt. Dann ist jede in der ganzen Ebene positive, zweimal stetig differenzierbare Lösung von* $L(u) = 0$ *eine Konstante.*

Beweis: Durch eine lineare Transformation der x, y kann man immer erreichen, daß

$$a^* = c^* = 1, \quad b^* = 0 \tag{1}$$

ist. Dann ist nach Voraussetzung

$$|a - c|, \ |b| = 0(r^{-\lambda}); \quad r \geqq r_0 > 0. \tag{2}$$

Wir bilden zuerst eine Hilfsfunktion

$$U(r) = f(\gamma r^{-\lambda}) - f(\gamma r_0^{-\lambda}), \quad f(t) = \int_t^1 \frac{e^t}{t}\, dt$$

mit noch näher zu bestimmendem $\gamma > 0$. Eine leichte Rechnung ergibt

$$L(U) = -U' \frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{r^{\lambda+3}} \cdot \left[\gamma\lambda - r^\lambda \frac{(c - a)(x^2 - y^2) - 4bxy}{ax^2 + 2bxy + cy^2}\right], \quad U' = \frac{dU}{dr} > 0.$$

Wegen der Elliptizitätsvoraussetzungen ist $r^{-2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$ nach unten positiv

[1]) S. Bernstein, Math. Zeitschr. **26** (1927), S. 551–558.

beschränkt. Hieraus und aus (2) folgt die Beschränktheit des Subtrahenden in der eckigen Klammer. Durch passende Wahl der Konstanten γ erreicht man also, daß

$$L(U) < 0, \quad r \geqq r_0 \tag{3}$$

besteht. Weiter gilt

$$U(r_0) = 0, \quad U(r) \to +\infty \text{ für } r \to \infty . \tag{4}$$

Es bedeute nun m das Minimum der überall positiven Lösung $u(x, y)$ im Kreise $r \leqq r_0$. Wegen des Satzes über die Lage der Extrema [2]) wird das Minimum jedenfalls auf dem Kreisrande angenommen, etwa im Punkte $x = x_0, y = y_0$. Dann ist

$$u \geqq m \text{ für } r \leqq r_0; \quad u(x_0, y_0) = m, \; x_0^2 + y_0^2 = r_0^2. \tag{5}$$

Wir setzen

$$v = u - m + \varepsilon U; \quad \varepsilon > 0 .$$

Dann ist wegen (3)

$$L(v) = \varepsilon L(U) < 0, \quad r \geqq r_0 . \tag{6}$$

Weiter ist wegen (4) und (5) $v \geqq 0$ für $r = r_0$ und $v \geqq 0$ für alle hinreichend großen r (hier wird die Positivität von u benützt). Da v wegen (6) kein negatives Minimum für $r > r_0$ annehmen kann (vgl. l. c.[2]), doch folgt dies schon aus der einfachen Betrachtung von Paraf), ist $v \geqq 0$ für alle $r \geqq r_0$. Da dies bei beliebigem $\varepsilon > 0$ gilt, folgt durch $\varepsilon \to 0$

$$u \geqq m \text{ für } r \geqq r_0 .$$

Der Vergleich mit (5) zeigt, daß die Lösung u im Punkte x_0, y_0 ihren kleinsten Wert annimmt, was nach dem Satze über die Extrema der Lösungen [2]) nur möglich ist, wenn sie konstant ist.

---

[2]) E. Hopf, Berliner Sitzungsber. Math. Phys. Klasse 1927 (XIX), S. 147–152.

Eingegangen 22. Dezember 1930.

Affektlose Gleichungen in der Theorie der Laguerreschen und Hermiteschen Polynome.

Von *J. Schur* in Berlin.

In einer vor kurzem erschienenen Arbeit [1]) bin ich zu folgenden Resultaten gelangt:

1. Bedeutet L_n das Laguerresche Polynom

$$L_n = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n} = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{(-x)^\nu}{\nu!},$$

so ist $L_n = 0$ für jedes n eine Gleichung ohne Affekt.

2. Die Galoissche Gruppe der Gleichung

$$E_n = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{x^\nu}{\nu!} = 0$$

ist für jedes durch 4 teilbare n die alternierende Gruppe n-ten Grades $\mathfrak{A}_n$. Für alle übrigen n ist die Gleichung ohne Affekt.

Im folgenden will ich noch auf einige weitere Folgen von Gleichungen aufmerksam machen, deren Galoissche Gruppe mit der symmetrischen oder alternierenden Gruppe übereinstimmt.

I. *Die Galoissche Gruppe der Gleichung*

$$J_n = \frac{1}{x}\int_0^x L_n dx = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{(-x)^\nu}{(\nu+1)!} = 0$$

ist für jedes ungerade n und für alle geraden n, für die $n+1$ eine Quadratzahl ist, die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_n$. In allen übrigen Fällen ist die Gleichung ohne Affekt [2]).

II. *Bedeutet*

$$H_m(x) = (-1)^m e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^m e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^m} = \sum_{\mu=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}(-1)^\mu\binom{m}{2\mu}1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\mu-1)x^{m-2\mu}$$

das m-te Hermitesche Polynom und setzt man

$$H_{2n}(x) = K_n^{(0)}(x^2), \qquad H_{2n+1}(x) = xK_n^{(1)}(x^2),$$

so sind

---

[1]) „Gleichungen ohne Affekt", Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1930, S. 443—449. — Im folgenden wird diese Arbeit kurz mit G. zitiert werden.

[2]) Das Polynom J_n kann auch mit Hilfe der Gleichung

$$J_n = -\frac{1}{n+1}\frac{dL_{n+1}}{dx}$$

gekennzeichnet werden.

$$K_n^{(0)}(x) = 0, \qquad K_n^{(1)}(x) = 0$$

für $n > 12$ *affektlose Gleichungen n-ten Grades* [3]).

Durch diese Spezialfälle erfährt der bekannte Hilbertsche Beweis für die Existenz von Gleichungen beliebigen Grades mit rationalen Koeffizienten, deren Galoissche Gruppe mit der symmetrischen bzw. alternierenden Gruppe übereinstimmt, eine bemerkenswert einfache Illustration. Insbesondere führen die Gleichungen $E_{4k} = 0$ und $J_{2k+1} = 0$ auf den Fall der alternierenden Gruppe. Es wäre von Interesse, diesen Fall auch für die bei diesen Beispielen noch nicht vorkommenden Gradzahlen der Form $4k + 2$ in ähnlich konkreter Weise zu verwirklichen.

§ 1. Einige Hilfssätze.

Der Beweis der Sätze I und II beruht in erster Linie auf einem Kriterium, das ich in der mit G. zitierten Arbeit (§ 1) abgeleitet habe:

A. *Es sei*

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{1}$$

eine Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten, die folgende Eigenschaften besitzt:

a) *Die Funktion* $F(x)$ *ist im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel.*

b) *Es läßt sich eine Primzahl* p *angeben, die in der Diskriminante* Δ *der Gleichung mindestens in der n-ten Potenz aufgeht.*

c) *Das konstante Glied* a_n *ist durch* p*, aber nicht durch* p^2 *teilbar.*

d) *Es gilt eine Kongruenz der Form*

$$F(x) \equiv x^k f(x) \pmod{p}, \qquad (k > 1)$$

wobei die Diskriminante Δ' *des Polynoms* $f(x)$ *zu* p *teilerfremd ist.*

Die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ *der Gleichung besitzt dann eine durch* p *teilbare Ordnung* g*. Ist hierbei insbesondere*

$$\frac{n}{2} < p < n - 2,$$

so ist $\mathfrak{G}$ *die symmetrische oder die alternierende Gruppe. Der zweite Fall tritt ein, wenn* Δ *eine Quadratzahl ist.*

Dieses Kriterium führt nur für genügend große Werte von n zum Ziele. Bei kleineren Werten von n mache ich von einem bekannten Satz von Dedekind Gebrauch:

B. *Es sei wieder* (1) *eine irreduzible ganzzahlige Gleichung. Gilt für irgendeine Primzahl* q *eine Zerlegung der Form*

$$F(x) \equiv F_1 F_2 \cdots F_r \pmod{q},$$

wobei $F_1, F_2, \ldots, F_r$ *mod.* q *irreduzible, untereinander inkongruente Polynome sind, so enthält die Galoissche Gruppe der Gleichung mindestens eine Permutation, die in* r *Zykeln zerfällt, deren Ordnungen mit den Graden der Polynome* $F_1, F_2, \ldots, F_r$ *übereinstimmen* [4]).

Von entscheidender Bedeutung sind für uns auch die Irreduzibilitätssätze, die ich in einer früheren Arbeit [5]) bewiesen habe:

---

[3]) Es ist zu vermuten, daß auch die Gradzahlen $n \leqq 12$ dasselbe Verhalten zeigen, doch konnte ich das bis jetzt nur für $n \leqq 7$ beweisen.

[4]) Diesen Satz hat zuerst Herr M. Bauer in seiner Arbeit „Ganzzahlige Gleichungen ohne Affekt", Math. Annalen **64** (1907), S. 325–327 zur Herstellung affektloser Gleichungen herangezogen. Einen elementaren Beweis des Dedekindschen Satzes habe ich in meiner Arbeit „Beispiele für Gleichungen ohne Affekt", Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **29** (1920), S. 145–150 angegeben.

[5]) „Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendungen auf Irreduzibilitätsfragen", II, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1929, S. 370–391.

C. *Im allgemeinen ist jedes Polynom der Form*

$$h(x) = 1 + g_1 \frac{x}{2!} + g_2 \frac{x^2}{3!} + \cdots + g_{n-1} \frac{x^{n-1}}{n!} \pm \frac{x^n}{(n+1)!} \tag{2}$$

mit ganzen rationalen g_ν im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel. Hier sind folgende Ausnahmen möglich: 1. *Ist n von der Form $2^r - 1$ ($r \geqq 2$), so kann $h(x)$ erst nach Forthebung des Faktors $x + 2$ oder $x - 2$ irreduzibel werden.* 2. *Für $n = 8$ kann $h(x)$ das Produkt zweier irreduzibler Funktionen der Grade 2 und 6 sein.*

D. *Die Polynome*

$$x^{-1}H_3(x), \quad H_4(x), \quad x^{-1}H_5(x), \quad H_6(x), \ldots$$

sind im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel.

§ 2. Die Diskriminanten der verallgemeinerten Laguerreschen Polynome.

In ihrem Buche „Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis", Bd. II, S. 94 und S. 294 haben G. Pólya und G. Szegö eine Verallgemeinerung der Laguerreschen Polynome eingeführt: Ist α eine Konstante, so setze man

$$\frac{d^n(e^{-x}x^{n+\alpha})}{dx^n} = n!\, e^{-x} x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x).$$

Es wird dann

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-\nu} \frac{(-x)^\nu}{\nu!}.$$

Für eine rationale Zahl $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ empfiehlt es sich, die Ausdrücke

$$F_n(x, \lambda, \mu) = (-1)^n\, n!\, \mu^n L_n^{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}\left(\frac{x}{\mu}\right)$$

einzuführen. Setzt man

$$k_n = n(\lambda + \mu n), \tag{3}$$

so kann dieses Polynom in der Form

$$F_n(x, \lambda, \mu) = x^n - \frac{k_n}{1} x^{n-1} + \frac{k_{n-1}k_n}{1 \cdot 2} x^{n-2} - \cdots + (-1)^n \frac{k_1 k_2 \cdots k_n}{1 \cdot 2 \cdots n} \tag{4}$$

geschrieben werden. Es bestehen dann, wie eine einfache Rechnung zeigt, die Relationen

$$x F_n' = n F_n + k_n F_{n-1} \qquad (n \geqq 1,\ F_0 = 1) \tag{5}$$

$$F_n = (x - l_n) F_{n-1} - m_n F_{n-2} \qquad (n \geqq 2), \tag{5'}$$

wobei

$$l_n = k_n - k_{n-1} = \lambda + \mu(2n-1), \qquad m_n = \mu k_{n-1} \tag{6}$$

zu setzen ist [6]).

Auf Grund dieser Formeln läßt sich die Diskriminante Δ_n des Polynoms $F_n(x, \lambda, \mu)$ in genau derselben Weise explizit berechnen, wie das im Laguerreschen Fall $\lambda = 0$, $\mu = 1$ gelingt (vgl. G., § 2). Man erhält den Ausdruck

$$\Delta_n = \mu^{\frac{n(n-1)}{2}}\, n!\, k_2 k_3^2 k_4^3 \cdots k_n^{n-1}. \tag{7}$$

---

[6]) Die Rekursionsformel (5) findet sich schon bei Pólya und Szegö a. a. O. Es läßt sich umgekehrt ohne Mühe folgendes beweisen: Kennt man für eine Folge von Polynomen

$$F_n = x^n + c_1^{(n)} x^{n-1} + \cdots + c_n^{(n)} \qquad (F_0 = 1)$$

Relationen von der Gestalt (5) und (5') mit konstanten k_n, l_n, m_n und von Null verschiedenen k_n, so muß die Konstante k_n die Form (2) und das Polynom F_n die Form (3) haben.

§ 3. Die Polynome J_n.

Setzt man in (4) $\lambda = \mu = 1$, also $k_n = n(n+1)$, so wird man auf den Ausdruck

$$(8) \quad G_n = x^n - \binom{n}{1}(n+1)\,x^{n-1} + \binom{n}{2}(n+1)\,n x^{n-2} - \cdots + (-1)^n (n+1)!$$

geführt, der mit unserem Polynom J_n in der Beziehung

$$G_n = (-1)^n (n+1)!\, J_n$$

steht. Für die Diskriminante Δ_n von G_n erhält man aus (7) den Wert [7])

$$\Delta_n = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 4^6 \cdots n^{2n-2} \cdot (n+1)^{n-1}.$$

Diese Formel setzt in Evidenz, daß Δ_n dann und nur dann eine Quadratzahl wird, wenn n ungerade oder $n+1$ ein ungerades Quadrat ist. Ferner geht aus ihr hervor, daß Δ_n durch keine oberhalb $n+1$ liegende Primzahl teilbar ist und eine Primzahl p des Intervalls

$$(9) \qquad \frac{n+1}{2} < p < n$$

genau in der Potenz p^{2p-2} enthält. Wegen

$$2p - 2 > n + 1 - 2$$

ist der hier auftretende Exponent mindestens gleich n.

Setzt man, wenn p eine dieser Primzahlen ist, $n = p + m$, so wird $p + m < 2p - 1$, also

$$(10) \qquad p > m + 1.$$

Aus (8) ergibt sich ohne Mühe die Kongruenz

$$G_n \equiv x^p G_m \pmod{p}$$

Hierbei ist wegen (10) die Diskriminante Δ_m des Faktors G_m zu p teilerfremd.

Da außerdem das konstante Glied $\pm (n+1)!$ von G_n unsere Primzahl nur in der ersten Potenz enthält, so erkennen wir, daß für das Polynom G_n die Bedingungen b), c) und d) des Hilfssatzes A. in bezug auf jede Primzahl des Intervalls (9) erfüllt sind.

Was nun die Bedingung a), also die Irreduzibilität von G_n anbetrifft, so beachte man, daß J_n die Form (2) hat. Ein Zerfallen von G_n in Faktoren mit rationalen Koeffizienten käme daher nach C. nur für $n = 2^r - 1$ und $n = 8$ in Betracht. Im ersten Fall müßte aber $G_n(2) = 0$ sein. Dies trifft nicht zu, weil n ungerade ist und für jede in n aufgehende Primzahl q aus (8)

$$G_n(2) \equiv 2^n \pmod{q}$$

folgt. Wäre ferner G_8 reduzibel, so könnte nur ein Zerfallen in zwei ganzzahlige Faktoren A, B der Grade 2 und 6 stattfinden. Es ist aber

$$G_8 \equiv x^7 (x-2) \pmod{7},$$

folglich müßten die konstanten Glieder von A und B beide durch 7 teilbar sein. Dies ist auszuschließen, weil ihr Produkt 9! die Primzahl 7 nur in der ersten Potenz enthält.

Die Funktion G_n ist daher für alle Werte von n irreduzibel. In Verbindung mit dem Früheren folgt hieraus auf Grund des Hilfssatzes A., daß die Ordnung g_n der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ unserer Gleichung durch jede Primzahl des Intervalls (9) teilbar sein muß.

Kommt unter diesen Primzahlen auch nur eine vor, die kleiner als $n-2$ ist, so wird $\mathfrak{G}$ nach A. entweder die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ oder die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_n$.

---

[7]) Auf anderem Wege habe ich diese Diskriminante in meiner Arbeit „Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten", Math. Zeitschrift **1** (1918), S. 377–402 (§ 3), berechnet.

Welcher Fall eintritt, hängt nur von dem Verhalten der Diskriminante Δ_n ab, das wir schon beherrschen. Der zu beweisende Satz I gilt also jedenfalls für alle Gradzahlen n, für die das Intervall

$$\frac{n+1}{2} < p < n-2$$

wenigstens eine Primzahl enthält.

Auf Grund der Tatsache, daß es für $x \geqq 24$ stets Primzahlen p gibt, die den Bedingungen

$$x < p \leqq \frac{5x}{4}$$

genügen [8]), erkennt man leicht, daß nur noch die Werte

$$n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 13$$

eine Ausnahme bilden könnten.

Die ersten beiden Fälle erledigen sich unmittelbar auf Grund der Bemerkung, daß die Galoissche Gruppe einer irreduziblen Gleichung zweiten oder dritten Grades allein durch das Verhalten der Diskriminante bestimmt ist. In den übrigen Fällen benutzen wir die Tatsache, daß $\mathfrak{G}$ jedenfalls transitiv ist und eine Ordnung g_n besitzt, die durch jede Primzahl des Intervalls (9) teilbar ist. Das liefert insbesondere

$$(11) \qquad g_4 \equiv 0 \pmod 3, \quad g_7 \equiv 0 \pmod 5, \quad g_{13} \equiv 0 \pmod{11}.$$

Hieraus folgt schon aus rein gruppentheoretischen Gründen, daß unsere Gruppe $\mathfrak{G}$ in den Fällen

$$n = 4, 7, 13$$

die alternierende Gruppe umfassen muß. Denn es gibt keine andere transitive Gruppe eines dieser Grade, deren Ordnung der zugehörigen Kongruenz (11) genügt [9]).

In den Fällen $n = 5, 6, 9$ reicht das bisher Bewiesene noch nicht aus, um $\mathfrak{G}$ als eine der Gruppen $\mathfrak{S}_n$ oder $\mathfrak{A}_n$ zu kennzeichnen. Hier schließen wir so: Aus der Transitivität von $\mathfrak{G}$ folgt in Verbindung mit

$$g_6 \equiv 0 \pmod 5, \quad g_9 \equiv 0 \pmod 7,$$

daß $\mathfrak{G}$ jedenfalls eine primitive Permutationsgruppe sein muß. Es gelten ferner, wie eine einfache Rechnung zeigt, die Kongruenzen

$$G_5 \equiv (x-3)(x-8)(x^3+4x^2-2x-7) \pmod{23},$$
$$G_6 \equiv (x+6)(x^2+3)(x^3-2x^2-5x+4) \pmod{23},$$
$$G_9 \equiv (x-5)(x^3+x^2+x+3)(x^5+5x^4+x^3-4x^2+3x+3) \pmod{13}.$$

Die hier auftretenden Faktoren sind nach dem zugehörigen Primzahlmodul irreduzibel. Aus dem Hilfssatz B. ergibt sich daher, daß unsere Gruppe $\mathfrak{G}$ in allen drei Fällen eine Permutation enthält, die in eine passend gewählte Potenz erhoben einen Zyklus der Ordnung 3 liefert. Eine primitive Gruppe, die einen solchen Zyklus enthält, muß aber bekanntlich die alternierende Gruppe umfassen.

Damit ist der Satz I für alle Werte von n als bewiesen anzusehen.

---

[8]) Vgl. meine Arbeit „Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendungen auf Irreduzibilitätsfragen", I, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1929, S. 125–136 (§ 2). – Dort wird dieser Satz für $x \geqq 29$ ausgesprochen, er gilt aber schon für $x \geqq 24$.

[9]) Der Fall $n = 4$ ist trivial. Für $n = 7$ vgl. W. Burnside, „Theory of Groups of finite Order", Cambridge 1911, S. 214, für $n = 13$ vgl. G. A. Miller, „On the transitive substitution groups of degrees thirteen and fourteen", Quarterly Journal **29** (1898), S. 224–249.

§ 4. Beweis des Satzes II.

Auch die Hermiteschen Polynome und die aus ihnen hervorgehenden Funktionen $K_n^{(0)}$ und $K_n^{(1)}$ hängen in einfacher Weise mit den verallgemeinerten Laguerreschen Polynomen zusammen (vgl. Pólya und Szegö, a. a. O., S. 295). In den Bezeichnungen des § 2 wird

$$K_n^{(0)}(x) = F_n(x, -1, 2), \qquad K_n^{(1)}(x) = F_n(x, 1, 2).$$

Die Diskriminanten $D_n^{(0)}$ und $D_n^{(1)}$ dieser Polynome lassen sich daher mit Hilfe der Formel (7) berechnen. Es ergibt sich

$$D_n^{(\varepsilon)} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{\nu=2}^{n} [\nu^\nu (2\nu - 1 + 2\varepsilon)^{\nu-1}] \qquad (\varepsilon = 0, 1). \tag{12}$$

Für $n > 1$ kann keine dieser Zahlen eine Quadratzahl sein.

Dies läßt sich für $n < 7$ durch eine direkte Rechnung bestätigen. Ist aber $n \geqq 7$, so wende man folgende präzisere Fassung des Tschebyscheffschen Satzes an, die man Herrn Robert Breusch [10]) verdankt.

Sobald $n \geqq 7$ ist, enthält das Intervall $n < p < 2n$ wenigstens zwei Primzahlen, von denen die eine von der Form $4x - 1$, die andere von der Form $4x + 1$ ist.

Aus der Formel (12) geht hervor, daß eine Primzahl p dieses Intervalls in $D_n^{(\varepsilon)}$ genau in der Potenz $p^{\frac{p-2\varepsilon-1}{2}}$ enthalten ist. Wählt man, was nach Breusch möglich ist, $p \equiv 2\varepsilon - 1 \pmod 4$, so wird der Exponent ungerade. Folglich kann $D_n^{(\varepsilon)}$ keine Quadratzahl sein.

Hieraus folgt, daß die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}^{(\varepsilon)}$ der Gleichung

$$K_n^{(\varepsilon)}(x) = 0 \qquad (n > 1) \tag{13}$$

von der alternierenden Gruppe verschieden sein muß.

Um auf diese Gleichung den Hilfssatz A. anwenden zu können, muß man die Betrachtung auf die Primzahlen des Intervalls

$$\frac{2n + 2\varepsilon}{3} < p < n \tag{14}$$

beschränken.

Eine solche Primzahl p geht in $D_n^{(\varepsilon)}$ genau in der Potenz

$$p^p \cdot p^{\frac{p-2\varepsilon-1}{2}} = p^{\frac{3p-2\varepsilon-1}{2}}$$

auf, und der hier auftretende Exponent ist größer als $\frac{1}{2}(2n-1)$, also mindestens gleich n. Ferner ist das konstante Glied

$$(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1 + 2\varepsilon)$$

von $K_n^{(\varepsilon)}$ nur durch die erste Potenz von p teilbar. Setzt man $n = p + m$, so wird

$$p + m < \frac{3p - 2\varepsilon}{2}, \quad \text{also} \quad p > 2m + 2\varepsilon.$$

Man beweist nun ohne Mühe, daß die Kongruenz

$$K_n^{(\varepsilon)}(x) \equiv x^p K_m^{(\varepsilon)}(x) \pmod p$$

gilt. Da die Diskriminante $D_m^{(\varepsilon)}$ von $K_m^{(\varepsilon)}(x)$ wegen (12) nur durch Primzahlen unterhalb $2m + 2\varepsilon$ teilbar ist, muß sie zu p teilerfremd sein. Endlich ist auch die Irreduzibilität

[10]) Die Arbeit des Herrn Breusch wird demnächst in der Mathematischen Zeitschrift erscheinen.

der Funktion $K_n^{(\varepsilon)}(x)$ gesichert. Denn der Hilfssatz D. besagt sogar, daß $K_n^{(\varepsilon)}(x^2)$ ein im Gebiet der rationalen Zahlen irreduzibles Polynom ist.

Wir sehen also, daß für die Gleichung (13) die vier Bedingungen des Hilfssatzes A. in bezug auf jede Primzahl des Intervalls (14) erfüllt sind. Folglich ist die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}^{(\varepsilon)}$ der Gleichung jedenfalls eine transitive Permutationsgruppe, deren Ordnung diese Primzahlen als Teiler aufweisen muß.

Existiert wenigstens eine Primzahl p, die den Bedingungen

$$\frac{2n+2\varepsilon}{3} < p < n-2 \tag{15}$$

genügt, so lehrt unser Hilfssatz in Verbindung mit dem Früheren, daß $\mathfrak{G}^{(\varepsilon)}$ mit der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ übereinstimmen muß.

Auf Grund der in § 3 angeführten Regel über die Primzahlen eines Intervalls $\left(x, \frac{5x}{4}\right)$ erkennt man leicht, daß das Intervall (15) stets Primzahlen enthält, wenn nicht einer der folgenden Ausnahmefälle vorliegt:

$$\varepsilon = 0, \quad n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13,$$
$$\varepsilon = 1, \quad n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 19.$$

Diese Fälle $n = 2$ und $n = 3$ führen wieder ohne weiteres auf $\mathfrak{G}^{(\varepsilon)} = \mathfrak{S}_n$. Auch die Fälle $n = 13$ und $n = 19$ bilden keine Ausnahme. Es muß nämlich bei uns

$$G_{13}^{(0)} \equiv G_{13}^{(1)} \equiv 0 \pmod{11}, \quad G_{19}^{(1)} \equiv 0 \pmod{17}$$

sein, weil die Primzahl 11 bzw. 17 in das zugehörige Intervall (14) fällt. Abgesehen von der symmetrischen und der alternierenden Gruppe existiert aber keine transitive Permutationsgruppe des Grades 13 oder 19, deren Ordnung den Teiler 11 oder 17 aufweist. Für $n = 13$ habe ich das schon auf S. 56 benutzt, für $n = 19$ folgt die Richtigkeit der Behauptung aus den Ergebnissen von E. Martin [11]) über primitive Permutationsgruppen des Grades 18.

Ebenso erledigt sich auch der Fall $\varepsilon = 0$, $n = 4$ auf Grund der Bemerkung, daß $\frac{8}{3} < 3 < 4$ ist und daher $G_4^{(0)}$ durch 3 teilbar sein muß.

Auf die übrigen Ausnahmefälle $n \leqq 12$ soll hier nicht eingegangen werden.

---

[11]) „On the imprimitive substitution groups of degree fifteen and the primitive substitution groups of degree eighteen", American Journal **23** (1901), S. 259–286.

Eingegangen 31. Dezember 1930.

Über das Schwarzsche Lemma.

Von *Ernst Jacobsthal* in Berlin.

Ist

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{1}$$

für $|x| \leqq r$ regulär und für $0 \leqq \varrho \leqq r$

$$\operatorname*{Max}_{|x|=\varrho} |F(x)| = M(\varrho), \tag{2}$$

so ist bei nicht konstantem $F(x)$ und $0 \leqq \varrho' < \varrho \leqq r$ stets $M(\varrho') < M(\varrho)$. Diese Aussage über das Verhalten von $M(\varrho)$ hat, falls $a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-1} = 0$, $a_p \neq 0$ ist, Schwarz dahin verschärft, daß für $0 \leqq \varrho' \leqq \varrho \leqq r$

$$M(\varrho') \leqq \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^p M(\varrho) \tag{3}$$

ist. Hierin gilt das Zeichen $=$ bei $\varrho' = 0$ und $\varrho' = \varrho$; dagegen ist bei $F(x) \not\equiv a_p x^p$ und $0 < \varrho' < \varrho$ in (3) das Zeichen $<$ zu nehmen.

Dieses in (3) ausgesprochene sogenannte *Schwarzsche Lemma* läßt sich durch Verwendung wiederholter linearer Abbildungen verallgemeinern und verschärfen, wobei die späteren Reihenglieder der Entwicklung (1) zur Geltung kommen [1]). Und hieraus läßt sich dann eine untere Schranke für $\varrho \dfrac{M'(\varrho)}{M(\varrho)}$ aufstellen, worin $M'(\varrho)$ die linke oder rechte Ableitung von $M(\varrho)$ bedeutet.

§ 1. Die Verallgemeinerung des Lemmas.

Es sei in veränderter Bezeichnung

$$F(x) = a_{\nu_0} x^{\nu_0} + a_{\mu_0} x^{\nu_0 + \nu_1} + \cdots \qquad (\mu_0 = \nu_0 + \nu_1) \tag{4}$$

für $|x| \leqq r$ regulär [2]). Ferner sei

$$|a_{\nu_0}| = \alpha_0 > 0 \tag{5}$$

und $a_{\mu_0} \neq 0$. Es bedeute $\varrho \leqq r$ eine positive im folgenden festgehaltene Zahl und ϱ' sei auf das Intervall $0 \ldots \varrho$ [2]) beschränkt. Dann ist sicher

$$F_0(x|\varrho) = F_0(x) = \frac{F(x)}{M(\varrho)} \tag{6}$$

für $|x| \leqq \varrho$ regulär [2]). Mit

$$\operatorname*{Max}_{|x|=\varrho'} |F_0(x)| = M_0(\varrho') = \frac{M(\varrho')}{M(\varrho)} \tag{7}$$

---

[1]) Vgl. des Verf. Aufsatz: Über das Maximum des absoluten Betrages einer analytischen Funktion, Jahresbericht d. Deutschen Math. Ver. **40** (1931), Heft 1–4, § 1. — J. Schur, über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind, diese Zeitschrift **147** (1917), S. 206 ff.

[2]) ν_0 ganz; ν_1 positiv ganz; bei $\nu_0 < 0$ ist im Text statt $|x| \leqq r$ natürlich $0 < |x| \leqq r$ zu setzen, also ist mit $|x| = \varrho'$ dann $\varrho' > 0$, während bei $\nu_0 \geqq 0$ auch $\varrho' = 0$ erlaubt ist.

ist daher $M_0(\varrho) = 1$. Setzt man

(6 a) $$F_0(x) = a_{0\nu_0} x^{\nu_0} + a_{0\mu_0} x^{\nu_0+\nu_1} + \cdots,$$

so ist $a_{0\nu_0} M(\varrho) = a_{\nu_0}$, $a_{0\mu_0} M(\varrho) = a_{\mu_0}$ usw., und es ist

(5 a) $$|a_{0\nu_0}| = \frac{\alpha_0}{M(\varrho)} = \alpha_0' > 0.$$

Wegen $a_{0\mu_0} \neq 0$ und $M_0(\varrho) = 1$ ist weiter

(8) $$\alpha_0' \varrho^{\nu_0} < 1.$$

Nach bekannten Sätzen über lineare Abbildungen wird dann

(9) $$F_1(x|\varrho) = F_1(x) = \alpha_0' \varrho^{\nu_0} \frac{F_0(x) - a_{0\nu_0} x^{\nu_0}}{a_{0\nu_0} x^{\nu_0} - \alpha_0'^2 \varrho^{2\nu_0} F_0(x)}$$
$$= a_{1\nu_1} x^{\nu_1} + a_{1\mu_1} x^{\nu_1+\nu_2} + \cdots \qquad (\mu_1 = \nu_1 + \nu_2)$$

für $|x| \leqq \varrho$ regulär und absolut $\leqq 1$. Dabei ist

(10) $$a_{1\nu_1} = \frac{\alpha_0' a_{0\mu_0} \varrho^{\nu_0}}{a_{0\nu_0}(1 - \alpha_0'^2 \varrho^{2\nu_0})}, \quad |a_{1\nu_1}| = \alpha_1 > 0.$$

Mit

(11) $$\operatorname*{Max}_{|x|=\varrho'} |F_1(x)| = M_1(\varrho')$$

ist dann

(11 a) $$M_1(\varrho) = 1.$$

Wenn nun $a_{1\mu_1} \neq 0$ ist, was mit

(8 a) $$\alpha_1 \varrho^{\nu_1} < 1$$

gleichbedeutend ist, kann man aus der *ersten Transformierten* $F_1(x)$ von $F_0(x)$ zu (9) analog die *zweite Transformierte* $F_2(x|\varrho) = F_2(x)$ gewinnen usw. Setzt man allgemein die für $|x| \leqq \varrho$ reguläre λ-te *Transformierte*

(12) $$F_\lambda(x|\varrho) = F_\lambda(x) = a_{\lambda\nu_\lambda} x^{\nu_\lambda} + a_{\lambda\mu_\lambda} x^{\nu_\lambda+\nu_{\lambda+1}} + \cdots \qquad (\mu_\lambda = \nu_\lambda + \nu_{\lambda+1}),$$

für die

(5 b) $$|a_{\lambda\nu_\lambda}| = \alpha_\lambda > 0$$

und

(11 b) $$\operatorname*{Max}_{|x|=\varrho'} |F_\lambda(x)| = M_\lambda(\varrho') \leqq M_\lambda(\varrho) = 1$$

ist, so wird bei

(8 b) $$a_{\lambda\mu_\lambda} \neq 0, \quad \text{d. h.} \quad \alpha_\lambda \varrho^{\nu_\lambda} < 1,$$

die nächste Transformierte

(9 a) $$F_{\lambda+1}(x|\varrho) = F_{\lambda+1}(x) = \alpha_\lambda \varrho^{\nu_\lambda} \frac{F_\lambda(x) - a_{\lambda\nu_\lambda} x^{\nu_\lambda}}{a_{\lambda\nu_\lambda} x^{\nu_\lambda} - \alpha_\lambda^2 \varrho^{2\nu_\lambda} F_\lambda(x)}$$
$$= a_{\lambda+1,\,\nu_{\lambda+1}} x^{\nu_{\lambda+1}} + a_{\lambda+1,\,\mu_{\lambda+1}} x^{\nu_{\lambda+1}+\nu_{\lambda+2}} + \cdots,$$

worin $\mu_{\lambda+1} = \nu_{\lambda+1} + \nu_{\lambda+2}$ der zweite wirklich auftretende Exponent ist. Dabei ist $F_{\lambda+1}(x)$ wieder für $|x| \leqq \varrho$ regulär und absolut $\leqq 1$, und es ist

(10 a) $$a_{\lambda+1,\,\nu_{\lambda+1}} = \frac{\alpha_\lambda a_{\lambda\mu_\lambda} \varrho^{\nu_\lambda}}{a_{\lambda\nu_\lambda}(1 - \alpha_\lambda^2 \varrho^{2\nu_\lambda})}.$$ [3])

Die Auflösung von (9 a) nach $F_\lambda(x)$ ergibt:

---

[3]) In den letzten Formeln ist sinngemäß, falls man sie für $\lambda = 0$ benutzt, α_0 durch α_0' zu ersetzen, wie der Vergleich mit den Formeln (8)—(10) zeigt. Das gilt entsprechend auch später.

$$F_\lambda(x) = \frac{a_{\lambda\nu_\lambda}}{\alpha_\lambda}\left(\frac{x}{\varrho}\right)^{\nu_\lambda}\frac{F_{\lambda+1}(x)+\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda}}{\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda}F_{\lambda+1}(x)+1}, \tag{13}$$

woraus in Verbindung mit der für $|w| \leqq 1,\ 0 < B < 1$ geltenden Beziehung

$$\left|\frac{w+B}{Bw+1}\right| \leqq \frac{|w|+B}{B|w|+1}$$

für $|x| = \varrho' \leqq \varrho$ folgt:

$$M_\lambda(\varrho') \leqq \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{\nu_\lambda}\frac{M_{\lambda+1}(\varrho')+\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda}}{\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda}M_{\lambda+1}(\varrho')+1}. \tag{13 a}$$

Hierin ist für $\lambda = 0$ Fußnote 2 und 3 beachten. Mit Benutzung der Matrix

$$S_\lambda = \begin{pmatrix} \varrho'^{\nu_\lambda}, & \alpha_\lambda\varrho'^{\nu_\lambda}\varrho^{\nu_\lambda} \\ \alpha_\lambda\varrho^{2\nu_\lambda}, & \varrho^{\nu_\lambda}\end{pmatrix} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots\ ^3)) \tag{14}$$

können wir statt (13 a) kürzer schreiben:

$$M_\lambda(\varrho') \leqq S_\lambda[M_{\lambda+1}(\varrho')], \tag{13 b}$$

falls man für eine Matrix $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ die zugehörige lineare Funktion $\frac{ax+b}{cx+d}$ mit $S[x]$ bezeichnet. Da bei reellen a, b, c, d, x und $ad - bc > 0$ mit x zugleich $S[x]$ wächst, (was bei der Herleitung von (13 a) stillschweigend verwendet wurde), so folgt, da jedes S_λ eine positive Determinante hat, aus (13 b) durch wiederholte Benutzung und Zusammensetzung:

$$M_0(\varrho') \leqq S_0 S_1 \cdots S_n[M_{n+1}(\varrho')]. \tag{15}$$

Dies gilt, falls $\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda} < 1$ für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n$ [3]) ist, für $0 \leqq \varrho' \leqq \varrho$[2]). Für $\varrho' = 0$ [2]) und $\varrho' = \varrho$ gilt in (15) das Zeichen $=$. Verwendet man in (15) nun noch das gewöhnliche Lemma von Schwarz: $M_{n+1}(\varrho') \leqq \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{\nu_{n+1}}$, so folgt schließlich die gesuchte *Verschärfung des Schwarzschen Lemmas*:

$$M_0(\varrho') \leqq S_0 S_1 \cdots S_n\left[\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{\nu_{n+1}}\right] \tag{I}$$

oder

$$M(\varrho') \leqq \left\{S_0 S_1 \cdots S_n\left[\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{\nu_{n+1}}\right]\right\} M(\varrho). \tag{I'}$$

Dies gilt unter den bei (15) angegebenen Bedingungen nebst allen zusätzlichen Bemerkungen. Bei $0 < \varrho' < \varrho$ wird (I), (I') mit steigendem n immer besser, d. h. die rechte Seite nimmt mit wachsendem n beständig ab, was bei $\alpha_{n+1}\varrho^{\nu_{n+1}} < 1$ aus der leicht zu zeigenden Ungleichheit

$$S_{n+1}\left[\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{\nu_{n+2}}\right] < \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{\nu_{n+1}} \qquad (0 < \varrho' < \varrho) \tag{16}$$

folgt. Noch drei Bemerkungen: 1. Ist $F(x) \equiv a_{\nu_0}x^{\nu_0}$, also $\alpha_0'\varrho^{\nu_0} = 1$, dann gilt (I), (I') als Gleichung für $n = 0$ und beliebiges $\nu_1 \geqq 1$. 2. Ist $n \geqq 1$, $\alpha_n\varrho^{\nu_n} = 1$, aber für $0 \leqq \lambda \leqq n-1$ [3]) stets $\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda} < 1$, so gilt (I), (I') auch noch; dann sind die Ausdrücke rechter Hand in (I), (I') gleich denen, die man erhält, wenn man rechts statt n einfach $n-1$ schreibt. Das folgt aus der in diesem Falle geltenden Beziehung $S_n\left[\left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{\nu_{n+1}}\right] = \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{\nu_n}$. 3. Bei $\nu_0 = 0$, $F(x) \neq 0$ in $|x| \leqq \varrho$ läßt sich die mit $n = 0$ erhaltene Formel (I), (I') noch weiter verschärfen [4]).

---

[4]) Vgl. die in Fußnote 1 angegebene Note (§ 1, Satz 3, S. 58).

§ 2. Eine untere Schranke für $\varrho \dfrac{M'(\varrho)}{M(\varrho)}$.

Bedeutet $M'(\varrho)$ die linke oder rechte Ableitung von $M(\varrho)$, dann behaupten wir unter den Voraussetzungen, unter denen (I), (I′) gelten, die Richtigkeit von

$$\varrho \frac{M'(\varrho)}{M(\varrho)} \geqq \nu_0 + \sum_{\lambda}^{n}{}_0 \nu_{\lambda+1} Q_\lambda, \tag{II}$$

worin

$$Q_\lambda = \prod_{\sigma}^{\lambda}{}_0 \frac{1-\alpha_\sigma \varrho^{\nu_\sigma}}{1+\alpha_\sigma \varrho^{\nu_\sigma}} \tag{17}$$

bedeutet; (der erste Faktor von Q_λ lautet entsprechend Fußnote 3: $\dfrac{1-\alpha_0' \varrho^{\nu_0}}{1+\alpha_0' \varrho^{\nu_0}}$).

Aus dem gewöhnlichen Lemma von Schwarz $M(\varrho') \leqq \left(\dfrac{\varrho'}{\varrho}\right)^{\nu_0} M(\varrho)$ folgt nur

$$\varrho \frac{M'(\varrho)}{M(\varrho)} \geqq \nu_0,$$

d. h. (II) ohne die rechts stehende Summe.

Wegen der aus dem Dreikreisesatz folgenden Beziehung $M'_-(\varrho) \leqq M'_+(\varrho)$ braucht man (II) nur für $M'_-(\varrho)$ zu zeigen. Für $M'_-(\varrho)$ schreiben wir im folgenden $M'(\varrho)$.

Um nun (II) aus (I), (I′) zu entwickeln, setzen wir $\varrho' = \vartheta\varrho$, $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ [2]). Dann wird

$$S_\lambda = \varrho^{\nu_\lambda} T_\lambda; \quad T_\lambda = \begin{pmatrix} \vartheta^{\nu_\lambda}, & \alpha_\lambda \vartheta^{\nu_\lambda} \varrho^{\nu_\lambda} \\ \alpha_\lambda \varrho^{\nu_\lambda}, & 1 \end{pmatrix}^{3}). \tag{14a}$$

Wir können mit Hilfe von (14 a) statt (I′) schreiben:

$$\frac{M(\vartheta\varrho)}{M(\varrho)} \leqq T_0 T_1 \cdots T_n[\vartheta^{\nu_{n+1}}] \tag{II′}$$

Bei $\vartheta < 1$ folgt dann hieraus:

$$\frac{M(\varrho)-M(\vartheta\varrho)}{\varrho(1-\vartheta)} \cdot \frac{\varrho}{M(\varrho)} \geqq \frac{1-T_0 T_1 \cdots T_n[\vartheta^{\nu_{n+1}}]}{1-\vartheta}. \tag{18}$$

Bei $\vartheta \to 1-0$ geht die linke Seite von (18) gegen $\varrho \dfrac{M'(\varrho)}{M(\varrho)}$. Um also (II) zu zeigen, ist nur noch der Nachweis von

$$\lim_{\vartheta \to 1-0} \frac{1-T_0 T_1 \cdots T_n[\vartheta^{\nu_{n+1}}]}{1-\vartheta} = \nu_0 + \sum_{\lambda}^{n}{}_0 \nu_{\lambda+1} Q_\lambda \tag{18a}$$

zu führen. Nun ist für $n = 0$ zunächst

$$\frac{1-T_0[\vartheta^{\nu_1}]}{1-\vartheta} = \frac{1}{1-\vartheta}\left\{1 - \frac{\vartheta^{\nu_0}\vartheta^{\nu_1} + \alpha_0' \vartheta^{\nu_0} \varrho^{\nu_0}}{\alpha_0' \varrho^{\nu_0} \vartheta^{\nu_1} + 1}\right\}$$

$$= \frac{1}{\alpha_0' \varrho^{\nu_0} \vartheta^{\nu_1} + 1}\left\{\frac{1 - \vartheta^{\nu_0+\nu_1} + \alpha_0' \varrho^{\nu_0}(\vartheta^{\nu_1} - \vartheta^{\nu_0})}{1-\vartheta}\right.$$

Bei $\vartheta \to 1$ strebt hier die rechte Seite gegen

$$\frac{\nu_0 + \nu_1 + (\nu_0 - \nu_1)\alpha_0' \varrho^{\nu_0}}{1+\alpha_0' \varrho^{\nu_0}} = \nu_0 + \nu_1 \frac{1-\alpha_0' \varrho^{\nu_0}}{1+\alpha_0' \varrho^{\nu_0}} = \nu_0 + \nu_1 Q_0,$$

so daß also (18 a) für $n = 0$ richtig ist. Da nun

$$1 - T_0 T_1 \cdots T_n[\vartheta^{\nu_{n+1}}] = 1 - T_0[\vartheta^{\nu_1}] + \sum_{\lambda}^{n}{}_1 \{T_0 T_1 \cdots T_{\lambda-1}[\vartheta^{\nu_\lambda}] - T_0 T_1 \cdots T_\lambda[\vartheta^{\nu_{\lambda+1}}]\} \tag{19}$$

ist und (18 a) bereits für $n = 0$ bewiesen ist, folgt (18 a) allgemein, sobald für $\lambda = 1, 2, \ldots, n$

$$(20)\qquad \lim_{\vartheta\to 1}\frac{T_0T_1\cdots T_{\lambda-1}[\vartheta^{\nu_\lambda}]-T_0T_1\cdots T_\lambda[\vartheta^{\nu_{\lambda+1}}]}{1-\vartheta}=\nu_{\lambda+1}Q_\lambda$$
$$=\nu_{\lambda+1}\frac{M(\varrho)-\alpha_0\varrho^{\nu_0}}{M(\varrho)+\alpha_0\varrho^{\nu_0}}\frac{1-\alpha_1\varrho^{\nu_1}}{1+\alpha_1\varrho^{\nu_1}}\cdots\frac{1-\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda}}{1+\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda}}$$

gezeigt ist. Um das noch zu zeigen, bemerken wir, daß für jede Matrix $S=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ mit der Determinante $|S|$ stets

$$S[x]-S[y]=\frac{(x-y)\,|S|}{(cx+d)\,(cy+d)}$$

ist. Setzt man

$$(21)\qquad T_0T_1\cdots T_{\lambda-1}=P_{\lambda-1}(\vartheta)=\begin{pmatrix}a_{\lambda-1}(\vartheta),&b_{\lambda-1}(\vartheta)\\c_{\lambda-1}(\vartheta),&d_{\lambda-1}(\vartheta)\end{pmatrix},$$

dann ist auf Grund der soeben gemachten Bemerkung

$$(22)\quad T_0T_1\cdots T_{\lambda-1}[\vartheta^{\nu_\lambda}]-T_0T_1\cdots T_\lambda[\vartheta^{\nu_{\lambda+1}}]=P_{\lambda-1}[\vartheta^{\nu_\lambda}]-P_{\lambda-1}[T_\lambda[\vartheta^{\nu_{\lambda+1}}]]$$
$$=\frac{\{\vartheta^{\nu_\lambda}-T_\lambda[\vartheta^{\nu_{\lambda+1}}]\}\,|P_{\lambda-1}|}{\{c_{\lambda-1}(\vartheta)\,\vartheta^{\nu_\lambda}+d_{\lambda-1}(\vartheta)\}\{c_{\lambda-1}(\vartheta)\,(T_\lambda[\vartheta^{\nu_{\lambda+1}}])+d_{\lambda-1}(\vartheta)\}}.$$

Hierin ist der Zähler gleich

$$(1-\vartheta^{\nu_{\lambda+1}})\frac{\vartheta^{\nu_\lambda}(1-\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda})}{1+\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda}\vartheta^{\nu_{\lambda+1}}}\,|T_0|\,|T_1|\cdots|T_{\lambda-1}|.$$

Nach Division durch $1-\vartheta$ und $\vartheta\to 1$ folgt daraus:

$$\nu_{\lambda+1}\frac{1-\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda}}{1+\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda}}(1-\alpha_0'^2\varrho^{2\nu_0})(1-\alpha_1^2\varrho^{2\nu_1})\cdots(1-\alpha_{\lambda-1}^2\varrho^{2\nu_\lambda-1}).$$

Dagegen wird für $\vartheta\to 1$ der Nenner des in (22) rechts stehenden Bruches wegen $T_\lambda[1]=1$ gleich

$$(c_{\lambda-1}(1)+d_{\lambda-1}(1))^2.$$

Nun ist $c_{\lambda-1}(1)+d_{\lambda-1}(1)$ die Summe der Elemente der zweiten Zeile in der Matrix

$$P_{\lambda-1}(1)=(T_0T_1\cdots T_{\lambda-1})_{\vartheta=1}.$$

Jede der Matrizen T_σ hat aber für $\vartheta=1$ die Eigenschaft, eine konstante Zeilensumme $(1+\alpha_\sigma\varrho^{\nu_\sigma})$ [3]) zu besitzen. Alle Matrizen mit konstanter Zeilensumme und nicht verschwindender Determinante bilden aber eine Gruppe, und die Zeilensumme eines Matrizenproduktes ist gleich dem Produkte der Zeilensummen der einzelnen Faktoren. Daher ist

$$c_{\lambda-1}(1)+d_{\lambda-1}(1)=(1+\alpha_0'\varrho^{\nu_0})(1+\alpha_1\varrho^{\nu_1})\cdots(1+\alpha_{\lambda-1}\varrho^{\nu_\lambda-1}).$$

Dividiert man also in (22) durch $1-\vartheta$, so folgt aus $\vartheta\to 1$ schließlich als Grenzwert der linken Seite von (20):

$$\nu_{\lambda+1}\frac{1-\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda}}{1+\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda}}\frac{(1-\alpha_0'^2\varrho^{2\nu_0})(1-\alpha_1^2\varrho^{2\nu_1})\cdots(1-\alpha_{\lambda-1}^2\varrho^{2\nu_\lambda-1})}{(1+\alpha_0'\varrho^{\nu_0})^2\,(1+\alpha_1\varrho^{\nu_1})^2\cdots(1+\alpha_{\lambda-1}\varrho^{\nu_\lambda-1})^2}$$
$$=\nu_{\lambda+1}\frac{1-\alpha_0'\varrho^{\nu_0}}{1+\alpha_0'\varrho^{\nu_0}}\frac{1-\alpha_1\varrho^{\nu_1}}{1+\alpha_1\varrho^{\nu_1}}\cdots\frac{1-\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda}}{1+\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda}}=\nu_{\lambda+1}Q_\lambda,$$

womit (20), also auch (II) gezeigt ist [5]).

[5]) Der Fall $n=1$ der Formel (II) ist loc. cit. in § 1, Satz 6 angegeben.

Eingegangen 31. Dezember 1930.

§ 2. Eine untere Schranke für $\varrho \dfrac{M'(\varrho)}{M(\varrho)}$.

Bedeutet $M'(\varrho)$ die linke oder rechte Ableitung von $M(\varrho)$, dann behaupten wir unter den Voraussetzungen, unter denen (I), (I′) gelten, die Richtigkeit von

$$\varrho \frac{M'(\varrho)}{M(\varrho)} \geqq \nu_0 + \sum_{\lambda}^{n}{}_0 \, \nu_{\lambda+1} Q_\lambda, \tag{II}$$

worin

$$Q_\lambda = \prod_{\sigma}^{\lambda}{}_0 \frac{1 - \alpha_\sigma \varrho^{\nu_\sigma}}{1 + \alpha_\sigma \varrho^{\nu_\sigma}} \tag{17}$$

bedeutet; $\left(\text{der erste Faktor von } Q_\lambda \text{ lautet entsprechend Fußnote 3: } \frac{1 - \alpha_0' \varrho^{\nu_0}}{1 + \alpha_0' \varrho^{\nu_0}}\right)$.

Aus dem gewöhnlichen Lemma von Schwarz $M(\varrho') \leqq \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^{\nu_0} M(\varrho)$ folgt nur

$$\varrho \frac{M'(\varrho)}{M(\varrho)} \geqq \nu_0,$$

d. h. (II) ohne die rechts stehende Summe.

Wegen der aus dem Dreikreisesatz folgenden Beziehung $M'_-(\varrho) \leqq M'_+(\varrho)$ braucht man (II) nur für $M'_-(\varrho)$ zu zeigen. Für $M'_-(\varrho)$ schreiben wir im folgenden $M'(\varrho)$.

Um nun (II) aus (I), (I′) zu entwickeln, setzen wir $\varrho' = \vartheta\varrho$, $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ [2]). Dann wird

$$S_\lambda = \varrho^{\nu_\lambda} T_\lambda; \quad T_\lambda = \begin{pmatrix} \vartheta^{\nu_\lambda}, & \alpha_\lambda \vartheta^{\nu_\lambda} \varrho^{\nu_\lambda} \\ \alpha_\lambda \varrho^{\nu_\lambda}, & 1 \end{pmatrix}^{3)}. \tag{14a}$$

Wir können mit Hilfe von (14 a) statt (I′) schreiben:

$$\frac{M(\vartheta\varrho)}{M(\varrho)} \leqq T_0 T_1 \cdots T_n[\vartheta^{\nu_{n+1}}] \tag{II′}$$

Bei $\vartheta < 1$ folgt dann hieraus:

$$\frac{M(\varrho) - M(\vartheta\varrho)}{\varrho(1-\vartheta)} \cdot \frac{\varrho}{M(\varrho)} \geqq \frac{1 - T_0 T_1 \cdots T_n[\vartheta^{\nu_{n+1}}]}{1-\vartheta}. \tag{18}$$

Bei $\vartheta \to 1 - 0$ geht die linke Seite von (18) gegen $\varrho \dfrac{M'(\varrho)}{M(\varrho)}$. Um also (II) zu zeigen, ist nur noch der Nachweis von

$$\lim_{\vartheta \to 1-0} \frac{1 - T_0 T_1 \cdots T_n[\vartheta^{\nu_{n+1}}]}{1-\vartheta} = \nu_0 + \sum_{\lambda}^{n}{}_0 \, \nu_{\lambda+1} Q_\lambda \tag{18a}$$

zu führen. Nun ist für $n = 0$ zunächst

$$\frac{1 - T_0[\vartheta^{\nu_1}]}{1-\vartheta} = \frac{1}{1-\vartheta}\left\{1 - \frac{\vartheta^{\nu_0}\vartheta^{\nu_1} + \alpha_0' \vartheta^{\nu_0} \varrho^{\nu_0}}{\alpha_0' \varrho^{\nu_0} \vartheta^{\nu_1} + 1}\right\}$$

$$= \frac{1}{\alpha_0' \varrho^{\nu_0} \vartheta^{\nu_1} + 1}\left\{\frac{1 - \vartheta^{\nu_0 + \nu_1} + \alpha_0' \varrho^{\nu_0}(\vartheta^{\nu_1} - \vartheta^{\nu_0})}{1-\vartheta}\right.$$

Bei $\vartheta \to 1$ strebt hier die rechte Seite gegen

$$\frac{\nu_0 + \nu_1 + (\nu_0 - \nu_1)\alpha_0' \varrho^{\nu_0}}{1 + \alpha_0' \varrho^{\nu_0}} = \nu_0 + \nu_1 \frac{1 - \alpha_0' \varrho^{\nu_0}}{1 + \alpha_0' \varrho^{\nu_0}} = \nu_0 + \nu_1 Q_0,$$

so daß also (18 a) für $n = 0$ richtig ist. Da nun

$$1 - T_0 T_1 \cdots T_n[\vartheta^{\nu_{n+1}}] = 1 - T_0[\vartheta^{\nu_1}] + \sum_{\lambda}^{n}{}_1 \{T_0 T_1 \cdots T_{\lambda-1}[\vartheta^{\nu_\lambda}] - T_0 T_1 \cdots T_\lambda[\vartheta^{\nu_{\lambda+1}}]\} \tag{19}$$

ist und (18 a) bereits für $n = 0$ bewiesen ist, folgt (18 a) allgemein, sobald für $\lambda = 1, 2, \ldots, n$

$$(20)\qquad \lim_{\vartheta\to 1}\frac{T_0T_1\cdots T_{\lambda-1}[\vartheta^{\nu_\lambda}]-T_0T_1\cdots T_\lambda[\vartheta^{\nu_{\lambda+1}}]}{1-\vartheta}=\nu_{\lambda+1}Q_\lambda$$
$$=\nu_{\lambda+1}\frac{M(\varrho)-\alpha_0\varrho^{\nu_0}}{M(\varrho)+\alpha_0\varrho^{\nu_0}}\frac{1-\alpha_1\varrho^{\nu_1}}{1+\alpha_1\varrho^{\nu_1}}\cdots\frac{1-\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda}}{1+\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda}}$$

gezeigt ist. Um das noch zu zeigen, bemerken wir, daß für jede Matrix $S=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ mit der Determinante $|S|$ stets

$$S[x]-S[y]=\frac{(x-y)\,|S|}{(cx+d)\,(cy+d)}$$

ist. Setzt man

$$(21)\qquad T_0T_1\cdots T_{\lambda-1}=P_{\lambda-1}(\vartheta)=\begin{pmatrix}a_{\lambda-1}(\vartheta), & b_{\lambda-1}(\vartheta)\\ c_{\lambda-1}(\vartheta), & d_{\lambda-1}(\vartheta)\end{pmatrix},$$

dann ist auf Grund der soeben gemachten Bemerkung

$$(22)\quad T_0T_1\cdots T_{\lambda-1}[\vartheta^{\nu_\lambda}]-T_0T_1\cdots T_\lambda[\vartheta^{\nu_{\lambda+1}}]=P_{\lambda-1}[\vartheta^{\nu_\lambda}]-P_{\lambda-1}[T_\lambda[\vartheta^{\nu_{\lambda+1}}]]$$
$$=\frac{\{\vartheta^{\nu_\lambda}-T_\lambda[\vartheta^{\nu_{\lambda+1}}]\}\,|P_{\lambda-1}|}{\{c_{\lambda-1}(\vartheta)\,\vartheta^{\nu_\lambda}+d_{\lambda-1}(\vartheta)\}\{c_{\lambda-1}(\vartheta)\,(T_\lambda[\vartheta^{\nu_{\lambda+1}}])+d_{\lambda-1}(\vartheta)\}}.$$

Hierin ist der Zähler gleich

$$(1-\vartheta^{\nu_{\lambda+1}})\frac{\vartheta^{\nu_\lambda}(1-\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda})}{1+\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda}\vartheta^{\nu_{\lambda+1}}}\,|T_0|\,|T_1|\cdots|T_{\lambda-1}|.$$

Nach Division durch $1-\vartheta$ und $\vartheta\to 1$ folgt daraus:

$$\nu_{\lambda+1}\frac{1-\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda}}{1+\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda}}(1-\alpha_0'^2\varrho^{2\nu_0})(1-\alpha_1^2\varrho^{2\nu_1})\cdots(1-\alpha_{\lambda-1}^2\varrho^{2\nu_{\lambda-1}}).$$

Dagegen wird für $\vartheta\to 1$ der Nenner des in (22) rechts stehenden Bruches wegen $T_\lambda[1]=1$ gleich

$$(c_{\lambda-1}(1)+d_{\lambda-1}(1))^2.$$

Nun ist $c_{\lambda-1}(1)+d_{\lambda-1}(1)$ die Summe der Elemente der zweiten Zeile in der Matrix

$$P_{\lambda-1}(1)=(T_0T_1\cdots T_{\lambda-1})_{\vartheta=1}.$$

Jede der Matrizen T_σ hat aber für $\vartheta=1$ die Eigenschaft, eine konstante Zeilensumme $(1+\alpha_\sigma\varrho^{\nu_\sigma})$ [3]) zu besitzen. Alle Matrizen mit konstanter Zeilensumme und nicht verschwindender Determinante bilden aber eine Gruppe, und die Zeilensumme eines Matrizenproduktes ist gleich dem Produkte der Zeilensummen der einzelnen Faktoren. Daher ist

$$c_{\lambda-1}(1)+d_{\lambda-1}(1)=(1+\alpha_0'\varrho^{\nu_0})(1+\alpha_1\varrho^{\nu_1})\cdots(1+\alpha_{\lambda-1}\varrho^{\nu_{\lambda-1}}).$$

Dividiert man also in (22) durch $1-\vartheta$, so folgt aus $\vartheta\to 1$ schließlich als Grenzwert der linken Seite von (20):

$$\nu_{\lambda+1}\frac{1-\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda}}{1+\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda}}\frac{(1-\alpha_0'^2\varrho^{2\nu_0})(1-\alpha_1^2\varrho^{2\nu_1})\cdots(1-\alpha_{\lambda-1}^2\varrho^{2\nu_{\lambda-1}})}{(1+\alpha_0'\varrho^{\nu_0})^2\,(1+\alpha_1\varrho^{\nu_1})^2\cdots(1+\alpha_{\lambda-1}\varrho^{\nu_{\lambda-1}})^2}$$
$$=\nu_{\lambda+1}\frac{1-\alpha_0'\varrho^{\nu_0}}{1+\alpha_0'\varrho^{\nu_0}}\frac{1-\alpha_1\varrho^{\nu_1}}{1+\alpha_1\varrho^{\nu_1}}\cdots\frac{1-\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda}}{1+\alpha_\lambda\varrho^{\nu_\lambda}}=\nu_{\lambda+1}Q_\lambda,$$

womit (20), also auch (II) gezeigt ist [5]).

[5]) Der Fall $n=1$ der Formel (II) ist loc. cit. in § 1, Satz 6 angegeben.

Eingegangen 31. Dezember 1930.

Neue Begründung der komplexen Multiplikation.

Zweiter Teil: Aufbau ohne Benutzung der allgemeinen Klassenkörpertheorie.

Von *Helmut Hasse* in Marburg.

Inhalt.

Seite

Einleitung 64

I. Der absolute Klassenkörper K zu Ω 66

§ 1. Die absolute Klassengleichung von Ω 66

§ 2. Die Galoissche Gruppe des absoluten Klassenkörpers zu Ω 71

§ 3. Das Zerlegungsgesetz für die Primideale von Ω im absoluten Klassenkörper zu Ω 75

II. Der Strahlklassenkörper $K_{\mathfrak{m}}$ mod. $\mathfrak{m}$ zu Ω 78

§ 1. Die Strahlklassengleichung mod. $\mathfrak{m}$ von Ω 78

§ 2. Die Galoissche Gruppe des Strahlklassenkörpers mod. $\mathfrak{m}$ zu Ω 85

§ 3. Das Zerlegungsgesetz für die Primideale von Ω im Strahlklassenkörper mod. $\mathfrak{m}$ zu Ω 87

Einleitung.

Die folgenden Ausführungen bilden den zweiten Teil eines vollständigen Abrisses, der unter dem Namen: *Komplexe Multiplikation* bekannten Theorie, dessen erster Teil vor vier Jahren im ersten Jubiläumsband dieses Journals erschienen ist [1]). Während ich dort den in der dortigen Einleitung mit a) bezeichneten, im dortigen Untertitel näher gekennzeichneten Gesichtspunkt zugrunde legte, füge ich hier diejenigen Ergänzungen hinzu, die unter dem ebenfalls dort schon angeführten, im jetzigen Untertitel gekennzeichneten Gesichtspunkt b) erforderlich werden. Es handelt sich im wesentlichen um die Herleitung der Sätze über Grad und Gruppe der fraglichen Klassenkörper auf direktem Wege, d. h. ohne Benutzung der allgemeinen Klassenkörpertheorie.

Wie im ersten Teil zerfällt der Aufbau in zwei Abschnitte, von denen der erste die Theorie des absoluten Klassenkörpers zu dem gegebenen imaginär-quadratischen Grundkörper Ω (kurz: *Theorie I*), der zweite die Theorie des Strahlklassenkörpers mod. $\mathfrak{m}$ (kurz: *Theorie II*) behandelt.

In der Theorie I führe ich keine wesentlichen Abweichungen gegenüber dem bereits bekannten Aufbau ein, wie er in den im ersten Teil zitierten Darstellungen in den Büchern von Weber und Fueter vorliegt. Ich darf mir dennoch erlauben, eine Darstellung der Theorie I voranzustellen, damit nachher wieder die Analogie mit der Theorie II möglichst deutlich hervortritt, und damit auch der zweite Teil meiner Abhandlung im Anschluß an den ersten Teil als Abriß eines systematischen Aufbaus der ganzen Theorie dienen kann.

---

[1]) H. Hasse, Neue Begründung der komplexen Multiplikation. Erster Teil: Einordnung in die allgemeine Klassenkörpertheorie. Dieses Journal **157** (1927). — Im folgenden zitiert mit **1.**

In der Theorie II führe ich, wie im ersten Teil, so auch hier, die gegenüber allem bisherigen grundlegende Abweichung ein, daß ich mich lediglich der Modulfunktionen und elliptischen Funktionen erster Stufe bediene.

Was die dabei verwendete Methode betrifft, so handelt es sich um eine Verallgemeinerung des Prinzips der komplexen Multiplikation, die darin besteht, daß man an Stelle der Multiplikation des Arguments u der elliptischen Funktionen mit einem ganzen Hauptideal (ν) aus Ω oder also — was auf Grund der Homogenität 0. Dimension dasselbe bedeutet — Division des Periodenideals $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ aus Ω durch (ν) die Division durch ein beliebiges ganzes Ideal $\mathfrak{n}$ aus Ω treten läßt.

Dazu seien mir noch die folgenden Bemerkungen gestattet: In zwei inzwischen erschienenen Mitteilungen hat auch Herr Fueter [2]) diese Verallgemeinerung des Prinzips der komplexen Multiplikation angegeben, sie auf die Herleitung von Teilaussagen des Reziprozitätsgesetzes über Ω angewendet, sowie auf die Anwendbarkeit für die Bestimmung von Grad und Gruppe der Strahlklassenkörper hingewiesen. Wenn Herr Fueter dort behauptet, diese allgemeine Formulierung der komplexen Multiplikation sei seines Wissens bisher noch nicht beachtet worden, so darf ich mir erlauben, auf meine ausdrückliche Angabe der in Rede stehenden Verallgemeinerung und ihrer Anwendung auf die Bestimmung von Grad und Gruppe der Strahlklassenkörper zu Ω im ersten Teil meines Berichts über algebraische Zahlkörper [3]) hinzuweisen. Ferner möchte ich bemerken, daß auch die grundlegende Kongruenz

$$\tau(\mathfrak{f}^*)^p \equiv \tau(\mathfrak{f}_\mathfrak{p}^* \mathfrak{f}^*) \bmod^*. \mathfrak{p},$$

die ich in **1**, Satz 23 hergeleitet und auf den Beweis des Zerlegungsgesetzes in den Strahlklassenkörpern zu Ω angewendet habe, ein Ausfluß jenes verallgemeinerten Prinzips der komplexen Multiplikation ist. Sie entsteht ja, wie aus dem Beweise ersichtlich, indem man die beiden durch die Multiplikation mit der Strahlklasse $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}^*$ von $\mathfrak{p}$ verbundenen Strahlklasseninvarianten

$$\tau(\mathfrak{f}^*) \quad \text{und} \quad \tau(\mathfrak{f}_\mathfrak{p}^* \mathfrak{f}^*)$$

als singuläre Werte der beiden Funktionen

$$\tau(u, \mathfrak{a}) \text{ und } \tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}}\right) = \tau(pu, \bar{\mathfrak{p}}\mathfrak{a})$$

darstellt, wo $p = N(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$ ist, die eben durch das angeführte verallgemeinerte Prinzip der komplexen Multiplikation zusammenhängen.

Bei jenem Beweise konnte ich — anders als Herr Fueter beim Beweise der analogen grundlegenden Kongruenz für seine Funktion zweiter Stufe — die nachher herzuleitende eigentliche Formel der verallgemeinerten komplexen Multiplikation

$$\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right) = R_\mathfrak{n}(\tau(u, \mathfrak{a}))$$

vermeiden und mußte das sogar, weil sich hier für Zähler und Nenner der für den Primidealfall $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}$ gebildeten rationalen Funktion $R_\mathfrak{p}(t)$ nicht die entsprechenden erforderlichen Kongruenzeigenschaften nachweisen lassen, wie bei Herrn Fueter im Fall der zweiten Stufe. Ich kam vielmehr direkt dadurch zum Ziel, daß ich anstatt die Abhängigkeit von der Variablen u bei singulär gewähltem Periodenmodul $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ zu studieren, u von vornherein auf den Teilpunkt $\varrho = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}} = \frac{r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2}{m}$ spezialisierte, ferner $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}} = \frac{1}{p}\bar{\mathfrak{p}}\mathfrak{a}$

[2]) R. Fueter, Reziprozitätsgesetze in quadratisch-imaginären Körpern. Göttinger Nachrichten 1927.

[3]) H. Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. Teil I: Klassenkörpertheorie. Jahresbericht der D. M.-V. **35** (1926). — Siehe dort Erläuterung 49, S. 55.

in der Form $\frac{1}{p}\,\overline{P}(\alpha_1, \alpha_2)$ durch eine Transformation p-ten Grades $\overline{P}$ herleitete, und dann

$$\tau\left(\frac{r_1 w_1 + r_2 w_2}{m};\ w_1, w_2\right) \text{ und } \tau\left(\frac{r_1 w_1 + r_2 w_2}{m};\ \frac{1}{p}\,\overline{P}(w_1, w_2)\right)$$
$$= \tau\left(\frac{p(r_1 w_1 + r_2 w_2)}{m};\ \overline{P}(w_1, w_2)\right)$$

als Funktionen von w_1, w_2 studierte. Die für $(w_1, w_2) = (\alpha_1, \alpha_2)$ gelieferten singulären Werte dieser Funktionen sind gerade die zu untersuchenden beiden Strahlklasseninvarianten $\tau(\mathfrak{k}^*)$ und $\tau(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^*\,\mathfrak{k}^*)$.

Übrigens habe ich auch die eben genannte eigentliche Formel der verallgemeinerten komplexen Multiplikation bereits früher angegeben und ihre Anwendung auf die Herleitung der Sätze über Grad und Gruppe der Strahlklassenkörper zu Ω hervorgehoben, nämlich in zwei Vorträgen [4]), von denen allerdings Herr Fueter wohl keine Kenntnis haben konnte.

I. Der absolute Klassenkörper K zu Ω.

§ 1. Die absolute Klassengleichung von Ω.

In **1**, Satz 8 wurde gezeigt, daß die absoluten Klasseninvarianten $j(\mathfrak{k})$ von Ω ganze algebraische Zahlen sind. Wir wollen jetzt darüber hinaus zeigen, daß die *absolute Klassengleichung* von Ω, d. i. das Polynom

$$H(t) = \prod_{\mathfrak{k}} (t - j(\mathfrak{k})),$$

ganze rationale Zahlkoeffizienten hat.

Dazu knüpfen wir an die bereits in **1** im Beweise zu Satz 8 erhaltene genauere Feststellung an, wonach die $j(\mathfrak{k})$ für jedes $m = N(\mu)$ mit ganzem μ ohne ganz-rationalen Teiler aus Ω Wurzeln des Polynoms $J_m(t, t)$ sind, und bestimmen jetzt die sämtlichen Wurzeln von $J_m(t, t)$ inkl. ihrer Vielfachheiten. Wegen $J_1(t, t) = 0$ sei dabei $m > 1$ vorausgesetzt.

Satz 1. *Eine komplexe Zahl $\xi = j(\alpha_1, \alpha_2)$ ist dann und nur dann Wurzel von $J_m(t, t)$, wenn eine ganzzahlige primitive Transformation m-ten Grades M existiert, so daß*

$$M(\alpha_1, \alpha_2) \approx (\alpha_1, \alpha_2)$$ [5])

ist.

Die Vielfachheit der Wurzel ξ ist gleich der Anzahl der nicht äquivalenten solchen Transformationen M.

Beweis: Die erste Behauptung ergibt sich ohne weiteres aus der gemäß **1**, S. 120 gültigen Produktzerlegung

$$J_m(j(w_1, w_2),\ j(w_1, w_2)) = \prod_{\nu=1}^{\varphi(m)} (j(w_1, w_2) - j(M_\nu(w_1, w_2)))$$

und den in **1**, Satz 3 zusammengestellten Eigenschaften der Funktion $j(w_1, w_2)$.

Es sei nun n die Anzahl der nicht äquivalenten ganzzahligen primitiven Transformationen m-ten Grades M mit $M(\alpha_1, \alpha_2) \approx (\alpha_1, \alpha_2)$, so daß also genau n Faktoren der eben angeführten Produktzerlegung für $(w_1, w_2) = (\alpha_1, \alpha_2)$ verschwinden.

Es sei ferner v die Vielfachheit einer Wurzel $\xi = j(\alpha_1, \alpha_2)$ von $J_m(t, t)$. Dann ist v der höchste Exponent, für den die rationale Funktion

---

[4]) Marburg, November 1926, im mathematischen Kolloquium der Universitäten Marburg, Gießen, Frankfurt. Kissingen, September 1927, auf der Jahresversammlung der D. M.-V.

[5]) Das Zeichen $\approx$ soll *proportional* bedeuten.

$$\frac{J_m(t, t)}{(t - \xi)^v}$$

bei $t \to \xi$ noch endlich bleibt. Daher ist v auch der höchste Exponent, für den die analytische Funktion

$$\frac{J_m(j(w_1, w_2), j(w_1, w_2))}{(j(w_1, w_2) - j(\alpha_1, \alpha_2))^v} = \frac{\prod_{\nu=1}^{\psi(m)} (j(w_1, w_2) - j(M_\nu(w_1, w_2)))}{(j(w_1, w_2) - j(\alpha_1, \alpha_2))^v}$$

bei $(w_1, w_2) \to (\alpha_1, \alpha_2)$ noch endlich bleibt.

Wenn also gezeigt werden kann, daß

$$\lim_{(w_1, w_2) \to (\alpha_1, \alpha_2)} \frac{j(w_1, w_2) - j(M(w_1, w_2))}{j(w_1, w_2) - j(\alpha_1, \alpha_2)} \text{ endlich und } \neq 0$$

ist, wenn $M(\alpha_1, \alpha_2) \approx (\alpha_1, \alpha_2)$, so folgt ersichtlich die Behauptung $v = n$.

In inhomogener Schreibweise, d. h. wenn

$$w = \frac{w_1}{w_2}, \quad j(w) = j(w_1, w_2), \quad M(w) = M(w_1, w_2), \quad \alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

gesetzt wird, bestimmt sich nun der fragliche Grenzwert zu

$$\lim_{(w_1, w_2) \to (\alpha_1, \alpha_2)} \frac{j(w_1, w_2) - j(M(w_1, w_2))}{j(w_1, w_2) - j(\alpha_1, \alpha_2)}$$

$$= \lim_{w \to \alpha} \frac{j(w) - j(M(w))}{j(w) - j(\alpha)}$$

$$= \lim_{w \to \alpha} \frac{j'(w) - j'(M(w))\, M'(w)}{j'(w)}$$

$$= 1 - M'(\alpha) \lim_{w \to \alpha} \frac{j'(M(w))}{j'(w)},$$

also

$$= 1 - M'(\alpha), \quad \text{falls } j'(\alpha) \neq 0,$$

und andernfalls durch weitere Differentiation

$$= 1 - (M'(\alpha))^2, \quad \text{falls } j'(\alpha) = 0, \quad j''(\alpha) \neq 0,$$

$$= 1 - (M'(\alpha))^3, \quad \text{falls } j'(\alpha) = 0, \quad j''(\alpha) = 0, \quad j'''(\alpha) \neq 0.$$

Wäre nun $1 - M'(\alpha) = 0$, so wäre α zweifache Nullstelle von $w - M(w)$, also auch zweifache Nullstelle des Zählers dieser rationalen Funktion. Ist $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so lautet dieser Zähler $cw^2 + (d - a)\, w - b$. Wäre er nicht identisch Null, so wäre also α rational, was für ein j-Argument nicht der Fall ist. Also müßte der fragliche Zähler identisch Null sein; dann wäre aber $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, also nicht primitiv.

Daher ist $1 - M'(\alpha) \neq 0$, wie im Falle $j'(\alpha) \neq 0$ zu beweisen war.

Für $j'(\alpha) = 0$ ist α nach **1**, S. 118 zu i oder ϱ nach der Modulgruppe γ äquivalent und sicherlich $j''(\alpha) \neq 0$ bzw. $j'''(\alpha) \neq 0$; man kann dann ohne Einschränkung $\alpha = i$ bzw. $\alpha = \varrho$ annehmen und rechnet leicht aus, daß auch in diesen Fällen aus $1 - (M'(\alpha))^2 = 0$ bzw. $1 - (M'(\alpha))^3 = 0$ folgen würde, daß M nicht primitiv wäre.

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Wir wenden Satz 1 zunächst auf den speziellen Fall an, daß α_1, α_2 eine Ideal-

basis aus Ω, also $j(\alpha_1, \alpha_2)$ eine absolute Klasseninvariante von Ω ist. Dann gilt in Ergänzung zu Satz 1

Satz 2. *Ist α_1, α_2 eine Idealbasis aus Ω, so ist die Anzahl der nicht äquivalenten ganzzahligen primitiven Transformationen m-ten Grades M mit $M(\alpha_1, \alpha_2) \approx (\alpha_1, \alpha_2)$ gleich der Anzahl der nicht assoziierten ganzen Zahlen μ ohne ganz-rationalen Teiler aus Ω mit $N(\mu) = m$.*

Beweis: Jene Transformationen M und diese Zahlen μ entsprechen sich gegenseitig eindeutig auf Grund der Beziehung

$$M(\alpha_1, \alpha_2) = \mu(\alpha_1, \alpha_2),$$

und dabei entsprechen sich überdies äquivalente M und assoziierte μ.

Mittels der Sätze 1 und 2 lassen sich die Vielfachheiten bestimmen, mit denen die absoluten Klasseninvarianten von Ω in gewissen speziellen $J_m(t, t)$ als Wurzeln stecken. Es sei d die Diskriminante von Ω und d_0 ihr quadratfreier Kern, also $d = d_0$ oder $d = 4\,d_0$, je nachdem $d_0 \equiv 1 \bmod 4$ oder $d_0 \equiv 2, 3 \bmod 4$. Dann gilt

Satz 3. *Für $d_0 \neq -1$ sind alle absoluten Klasseninvarianten von Ω genau einfache Wurzeln von $J_{-d_0}(t, t)$.*

Für $d_0 \equiv 1$ mod. 4, $d_0 \neq -3$ sind außerdem alle absoluten Klasseninvarianten von Ω (genau zweifache) Wurzeln von $J_{\frac{1-d_0}{4}}(t, t)$.

Beweis: $-d_0 = N(\sqrt{d_0})$ und $\dfrac{1-d_0}{4} = N\left(\dfrac{1+\sqrt{d_0}}{2}\right)$ erweisen sich leicht als einzige im Sinne von Satz 2 zu zählende Normdarstellungen von $-d_0$ und $\dfrac{1-d_0}{4}$.[6])

Wir wenden jetzt Satz 1 auf den allgemeinen Fall eines beliebigen j-Argumentpaars α_1, α_2 (nicht notwendig Idealbasis, nicht notwendig aus Ω) an, um die übrigen Wurzeln der eben behandelten speziellen $J_m(t, t)$ von den von den uns interessierenden abtrennen zu können.

Satz 4. *Für $d_0 \equiv 2, 3$ mod. 4, $d_0 \neq -1, -2$ sind die absoluten Klasseninvarianten von Ω genau die einfachen Wurzeln von $J_{-d_0}(t, t)$.*

Für $d_0 \equiv 1$ mod. 4, $d_0 \neq -3$ sind die absoluten Klasseninvarianten von Ω genau diejenigen einfachen Wurzeln von $J_{-d_0}(t, t)$, die auch Wurzeln von $J_{\frac{1-d_0}{4}}(t, t)$ sind.

Beweis: Es ist über Satz 3 hinaus zu zeigen, daß jede Wurzel von $J_{-d_0}(t, t)$ mit der in Satz 4 angegebenen Beschaffenheit absolute Klasseninvariante von Ω ist.

Sei also $m = -d_0$ gesetzt, und sei $j(\alpha_1, \alpha_2)$ zunächst irgendeine Wurzel von $J_m(t, t)$. Dann ist nach Satz 1 jedenfalls

$$(\alpha_1, \alpha_2) \approx M(\alpha_1, \alpha_2),$$

also

$$\mu(\alpha_1, \alpha_2) = M(\alpha_1, \alpha_2)$$

mit einer ganzzahligen primitiven Transformation m-ten Grades M und einem gewissen Proportionalitätsfaktor μ. Für den letzteren folgt daraus

$$|M - \mu E| = 0.$$

μ genügt also einer quadratischen Gleichung im rationalen Zahlkörper P, und α_1, α_2 sind in $\mathsf{P}(\mu)$ wählbar. Daher ist μ eine echte imaginär-quadratische Irrationalität, und zwar eine ganze Zahl, mit

[6]) Die Einschränkungen $d_0 \neq -1$, $d_0 \neq -3$ sind durch die für Satz 1 notwendige Annahme $m > 1$ bedingt.

$$N(\mu) = m.$$

Wird nun $j(\alpha_1, \alpha_2)$ als genau einfache Wurzel von $J_m(t, t)$ vorausgesetzt, so muß wegen

$$mM^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) = m\,\mu(\alpha_1, \alpha_2),$$

wo auch mM^{-1} ganzzahlig primitiv vom Grade m ist, nach Satz 1 notwendig

$$mM^{-1} \sim M,$$

d. h.

$$M^2 = mS$$

mit einer Modulsubstitution S sein. Daraus folgt weiter

$$M^2(\alpha_1, \alpha_2) = mS(\alpha_1, \alpha_2) = \mu^2(\alpha_1, \alpha_2)$$
$$|mS - \mu^2 E| = 0$$
$$|S - \frac{\mu^2}{m} E| = 0.$$

$\frac{\mu^2}{m}$ ist also eine Einheit aus $\mathsf{P}(\mu)$.

Die Annahme, es sei $\frac{\mu^2}{m}$ eine der nicht-trivialen imaginär-quadratischen Einheiten $\pm i$ bzw. $\pm \varrho$, $\pm \varrho^2$ führt leicht auf die im Satz ausgeschlossenen Fälle $m = 2$ bzw. $m = 3$. Also folgt $\frac{\mu^2}{m} = \pm 1$. Weil ferner μ echte imaginär-quadratische Irrationalzahl ist, kommt $\frac{\mu^2}{m} = +1$ nicht in Frage. Also gilt

$$\frac{\mu^2}{m} = -1,$$

$$\mu = \pm\sqrt{-m} = \pm\sqrt{d_0}, \qquad \mathsf{P}(\mu) = \Omega,$$
$$\alpha_1, \alpha_2 \text{ in } \Omega,$$
$$\pm\sqrt{d_0}\,(\alpha_1, \alpha_2) = M(\alpha_1, \alpha_2).$$

Ist nun zunächst $d_0 \equiv 2, 3 \bmod 4$, also $1, \pm\sqrt{d_0}$ Basen der ganzen Zahlen von Ω, so besagt die letztere Relation, daß α_1, α_2 Idealbasis aus Ω ist. Dann ist also $j(\alpha_1, \alpha_2)$ absolute Klasseninvariante von Ω, wie in diesem Falle zu zeigen war.

Ist ferner $d_0 \equiv 1 \bmod 4$, also $1, \pm\frac{1 \pm \sqrt{d_0}}{2}$ Basen der ganzen Zahlen von Ω, so kann nicht allgemein so geschlossen werden[7]). Vielmehr läßt sich dann ein analoger Schluß nur für diejenigen einfachen Wurzeln $j(\alpha_1, \alpha_2)$ von $J_{-d_0}(t, t)$ durchführen, die zugleich Wurzeln von $J_{\frac{1-d_0}{4}}(t, t)$ sind. Ist nämlich auch das der Fall, so gilt zufolge Satz 1 für das nach dem bisherigen sicher zu Ω gehörige System α_1, α_2 überdies

$$M_0(\alpha_1, \alpha_2) = \mu_0(\alpha_1, \alpha_2)$$

mit einer ganzzahligen primitiven Transformation M_0 vom Grade $\frac{1 - d_0}{4}$ und einem gewissen Proportionalitätsfaktor μ_0. Aus dieser Relation folgt ähnlich wie vorher, daß μ_0

[7]) Das hat Herr Fueter im ersten Bande seines in 1 zitierten Buches auf S. 66 übersehen und kommt so zu der falschen Behauptung, daß stets die absoluten Klasseninvarianten allein die einfachen Wurzeln von $J_{-d_0}(t, t)$ wären.

eine zu Ω gehörige ganze Zahl mit $N(\mu_0) = \frac{1-d_0}{4}$ ist. Das leisten nur $\mu_0 = \pm \frac{1 \pm \sqrt{d_0}}{2}$.
Die Relation

$$\pm \frac{1 \pm \sqrt{d_0}}{2} (\alpha_1, \alpha_2) = M_0(\alpha_1, \alpha_2)$$

besagt aber im jetzigen Falle, daß α_1, α_2 Idealbasis aus Ω, also $j(\alpha_1, \alpha_2)$ absolute Klasseninvariante von Ω ist.

Damit ist Satz 4 bewiesen.

Für $d_0 = -2$ gilt Satz 4 tatsächlich nicht mehr; man hat vielmehr

Zusatz. *$J_2(t, t)$ hat neben der (einzigen) absoluten Klasseninvariante von $\mathsf{P}(\sqrt{-2})$ noch die (einzige) absolute Klasseninvariante von $\mathsf{P}(\sqrt{-1})$ und nur sie zur einfachen Wurzel.*

Beweis: Die Notwendigkeit, den Fall $d_0 = -2$ auszuschließen, kam in den vorhergehenden Schlüssen nur an einer Stelle in Betracht, nämlich bei Ausschluß der Annahme, $\frac{\mu^2}{m} = \pm i$ im Beweise von Satz 4, S. 69. Läßt man auch $d_0 = -2$, also $m = 2$ zu, so bleibt dort die Möglichkeit

$$\mu^2 = \pm 2i, \quad \mu = \pm (1 \pm i), \quad \mathsf{P}(\mu) = \mathsf{P}(\sqrt{-1}), \quad \alpha_1, \alpha_2 \text{ in } \mathsf{P}(\sqrt{-1}),$$
$$\pm (1 \pm i)\,(\alpha_1, \alpha_2) = M(\alpha_1, \alpha_2).$$

Da $1, \pm (1 \pm i)$ Basen der ganzen Zahlen von $\mathsf{P}(\sqrt{-1})$ sind, liegt dabei in α_1, α_2 eine Idealbasis aus $\mathsf{P}(\sqrt{-1})$, also in $j(\alpha_1, \alpha_2)$ die absolute Klasseninvariante von $\mathsf{P}(\sqrt{-1})$ vor. Daß diese in der Tat einfache Wurzel von $J_2(t, t)$ ist, sieht man sofort mittels der Sätze 1, 2 ein.

Jetzt können wir feststellen

Satz 5. *Die absolute Klassengleichung von Ω*

$$H(t) = \prod_{\mathfrak{k}} (t - j(\mathfrak{k}))$$

ist ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten.

Beweis: Für $d_0 \neq -1, -2, -3$ folgt aus Satz 4 und der Rationalität der Koeffizienten der $J_m(t, t)$ (**1**, Satz 7), daß $H(t)$ rationale Koeffizienten hat. Nach **1**, Satz 8 sind diese ganz.

Für $d_0 = -2$ folgt Entsprechendes aus dem Zusatz, wenn man bedenkt, daß die absolute Klasseninvariante von $\mathsf{P}(\sqrt{-1})$ rational ist, nämlich $j(i, 1) = 2^6 3^3$.

Ebenso ist die (einzige) absolute Klasseninvariante von $\mathsf{P}(\sqrt{-3})$ rational, nämlich $j(\varrho, 1) = 0$. Für $d_0 = -1$ und $d_0 = -3$ hat man also ohne weiteres $H(t) = t - 2^6 3^3$ bzw. $H(t) = t$.

Satz 6. *Die absolute Klassengleichung $H(t)$ von Ω ist irreduzibel in Ω.*

Beweis: Wir stützen uns auf die in **1**, Satz 11 für jede absolute Klasseninvariante $j(\mathfrak{k})$ von Ω bewiesene Kongruenz

$$j(\mathfrak{k})^p \equiv j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^{-1}\,\mathfrak{k}) \bmod \mathfrak{p},$$

wo $\mathfrak{p}$ ein nicht in der Diskriminante d von Ω aufgehendes Primideal 1. Grades aus Ω und $p = N(\mathfrak{p})$ ist.

Es sei $F(t)$ der zu $j(\mathfrak{k})$ gehörige in Ω irreduzible Teiler von $H(t)$. Ferner sei $j(\mathfrak{k}_1)$ irgendeine andere absolute Klasseninvariante von Ω. Wir setzen dann $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_0^{-1}\,\mathfrak{k}$ und bestimmen in der Klasse $\mathfrak{k}_0$ ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r$, das nur aus nicht in der

Diskriminante d von Ω nicht aufgehenden Primidealen 1. Grades $\mathfrak{p}_i$ von Ω zusammengesetzt ist, so daß obige Kongruenz für die $\mathfrak{p}_i$ anwendbar ist.

Ein solches Ideal $\mathfrak{a}_0$ gibt es sicher in $\mathfrak{k}_0$. Man braucht ja nur ein zu d primes ganzes Ideal $\mathfrak{a}_0'$ in $\mathfrak{k}_0$ zu wählen, und aus ihm alle Primfaktoren 2. Grades (die ja durchweg zur Hauptklasse gehören) wegzulassen. Es kann und soll ferner auch noch $\mathfrak{a}_0$ prim zur Diskriminante D von $H(t)$ — diese ist nach **1**, Satz 6 von Null verschieden — gewählt werden.

Weil nun $\mathfrak{p}_1$ vom 1. Grade und $F(t)$ ein ganzzahliges Polynom in Ω ist, folgt aus

$$F(j(\mathfrak{k})) = 0$$

durch Potenzierung mit $p_1 = N(\mathfrak{p}_1)$ in bekannter Weise zunächst

$$F(j(\mathfrak{k})^{p_1}) \equiv 0 \bmod. \mathfrak{p}_1 .$$

Wendet man dann die obige Kongruenz

$$j(\mathfrak{k})^{p_1} \equiv j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_1}^{-1}\mathfrak{k}) \bmod. \mathfrak{p}_1$$

an, so ergibt sich ferner

$$F(j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_1}^{-1}\mathfrak{k})) \equiv 0 \bmod. \mathfrak{p}_1 .$$

Da schließlich $\mathfrak{p}_1$ prim zur Diskriminante D von $H(t)$ gewählt ist, so hat die letztere Kongruenz die Gleichung

$$F(j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_1}^{-1}\mathfrak{k})) = 0$$

zur Folge.

So mit $\mathfrak{p}_2, , \ldots, \mathfrak{p}_r$ fortfahrend erhält man schließlich

$$F(j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_1}^{-1} \cdots \mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_r}^{-1}\mathfrak{k})) = 0 .$$

Es ist aber nach Wahl von $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r$

$$\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_1} \cdots \mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_r} = \mathfrak{k}_{\mathfrak{a}_0} = \mathfrak{k}_0 .$$

Daher hat sich ergeben

$$F(j(\mathfrak{k}_0^{-1}\mathfrak{k})) = 0 ,$$

d. h. nach Wahl von $\mathfrak{k}_0$

$$F(j(\mathfrak{k}_1)) = 0 .$$

Das besagt aber die Irreduzibilität von $H(t)$ in Ω.

Beiläufig ist durch Satz 6 erkannt, daß in dem in **1**, Satz 12 ausgesprochenen Zerlegungsgesetz die Forderungen 2 und 3 und in dem in **1**, Satz 24 ausgesprochenen Zerlegungsgesetz die Forderungen 3 und 5 je dasselbe besagen.

§ 2. Die Galoissche Gruppe des absoluten Klassenkörpers zu Ω.

Die in den Sätzen 5, 6 enthaltenen Hauptresultate von § 1 besagen, daß die den absoluten Klasseninvarianten $j(\mathfrak{k})$ von Ω zugeordneten Körper $\Omega(j(\mathfrak{k}))$ ein volles System zueinander in bezug auf Ω konjugierter sind. Wir wollen jetzt zeigen, daß diese Körper alle identisch sind, daß also die absolute Klassengleichung $H(t)$ Galoissch in bezug auf Ω ist.

Dazu zeigen wir, daß durch eine absolute Klasseninvariante $j(\mathfrak{k})$ jede andere $j(\mathfrak{k}_1)$ rational über Ω darstellbar ist. Ähnlich wie im Beweis von Satz 6 geschieht das wieder, indem wir $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_0\mathfrak{k}$ setzen, ein $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r$ in $\mathfrak{k}_0$ wählen und von $\mathfrak{k}$ schrittweise durch Multiplikation mit den $\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_i}$ zu $\mathfrak{k}_1$ vordringen. Es kommt also zunächst darauf an, für ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus Ω die Beziehung zwischen $j(\mathfrak{k})$ und $j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{k})$ zu studieren. In dieser Hinsicht beweisen wir

Satz 7. *Es sei $j(\mathfrak{k})$ eine absolute Klasseninvariante von Ω und p eine Primzahl. Die singuläre Invariantengleichung $J_p(t, j(\mathfrak{k}))$ für den Grad p hat mit der absoluten Klassengleichung $H(t)$ von Ω alle und nur diejenigen absoluten Klasseninvarianten $j(\mathfrak{k}_0\mathfrak{k})$ als gemeinsame Wurzeln, für die $\mathfrak{k}_0$ ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $N(\mathfrak{p}) = p$ enthält.*

Beweis: Sei die Klasse $\mathfrak{k}$ durch das Ideal $\mathfrak{a}$ mit der Idealbasis α_1, α_2 repräsentiert, also $j(\mathfrak{k}) = j(\alpha_1, \alpha_2)$. Dann ist

$$J_p(t, j(\mathfrak{k})) = \prod_{\nu=1}^{p+1} (t - j(P_\nu(\alpha_1, \alpha_2))),$$

wo die P_ν ein volles Repräsentantensystem der $\psi(p) = p + 1$ Transformationsklassen p-ten Grades (siehe **1**, S. 123) bedeuten. Eine absolute Klasseninvariante $j(\mathfrak{k}_1)$ ist also dann und nur dann auch Wurzel von $J_p(t, j(\mathfrak{k}))$, wenn

$$j(\mathfrak{k}_1) = j(P(\alpha_1, \alpha_2))$$

mit einer geeigneten Transformation p-ten Grades P ist. Das bedeutet die Existenz eines Ideals $\mathfrak{a}_1$ in $\mathfrak{k}_1$ mit einer Basis β_1, β_2, für die

$$(\beta_1, \beta_2) = P(\alpha_1, \alpha_2)$$

ist, d. h. daß $\mathfrak{a}_1$ ein ganzes Vielfaches $\mathfrak{p}\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{a}$ mit $N(\mathfrak{p}) = |P| = p$ ist, was die Behauptung ergibt.

Mittels Satz 7 folgt jetzt leicht weiter

Satz 8. *Ist $p = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$ mit $\mathfrak{p} \sim \bar{\mathfrak{p}}$ in Ω, so gilt für jede absolute Klasseninvariante $j(\mathfrak{k})$ von Ω*

$$j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}) = R(j(\mathfrak{k})).$$

Ist aber $p = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$ mit $\mathfrak{p} \nsim \bar{\mathfrak{p}}$ in Ω, so gilt für jede absolute Klasseninvariante $j(\mathfrak{k})$ von Ω

$$j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}) + j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}) = R_1(j(\mathfrak{k}))$$
$$j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k})\, j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}) = R_2(j(\mathfrak{k})).$$

Dabei bedeuten $R_1(t)$ und $R_2(t)$ nur von p und Ω, nicht von $\mathfrak{k}$ abhängige Polynome mit rationalen Koeffizienten.

Beweis: Ist $p = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$ mit $\mathfrak{p} \sim \bar{\mathfrak{p}}$ in Ω, so hat einzig die Klasse $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_\mathfrak{p} = \mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ die in Satz 7 genannte Eigenschaft. Nach Satz 7 ist dann also der größte gemeinsame Teiler von $H(t)$ und $J_p(t, j(\mathfrak{k}))$ gleich $t - j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k})$.

Ist aber $p = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$ mit $\mathfrak{p} \nsim \bar{\mathfrak{p}}$ in Ω, so haben einzig die beiden Klassen $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ die in Satz 7 genannte Eigenschaft. Nach Satz 7 ist dann also der größte gemeinsame Teiler von $H(t)$ und $J_p(t, j(\mathfrak{k}))$ gleich $(t - j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}))\,(t - j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}))$. Dieser größte gemeinsame Teiler gehört zum Rationalitätsbereich der Koeffizienten von $H(t)$ und $J_p(t, j(\mathfrak{k}))$, also gemäß Satz 5 und **1**, Satz 7 zum Bereich der rationalzahligen rationalen Funktionen von $j(\mathfrak{k})$. Er berechnet sich, soweit sein Grad ungeändert bleibt, nach ein- und demselben rationalen Verfahren aus jenen Koeffizienten[8]), so daß also die Koeffizienten der rationalen Darstellungen durch $j(\mathfrak{k})$ von $\mathfrak{k}$ unabhängig sind. So ergibt sich die Behauptung, wenn man noch bedenkt, daß Nenner in den rationalen Darstellungen durch $j(\mathfrak{k})$ mittels der nach Satz 6 irreduziblen Gleichung $H(j(\mathfrak{k})) = 0$ beseitigt werden können.

Aus Satz 8 leiten wir nun weiter den folgenden grundlegenden Satz her:

Satz 9. *Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus Ω und $\bar{\mathfrak{p}}$ das zu $\mathfrak{p}$ konjugierte Primideal.*

---

[8]) Siehe H. Weber, Kleines Lehrbuch der Algebra, Braunschweig 1912, S. 106, XVI. — Oder auch O. Perron, Über den größten gemeinsamen Teiler von zwei Polynomen, Bayer. Akad. Ber. 1928.

Es existiert ein nur von $\mathfrak{p}$ *und* Ω, *nicht von* $\mathfrak{k}$ *abhängiges Polynom* $R_\mathfrak{p}(t)$ *mit Koeffizienten aus* Ω, *dessen konjugiertes mit* $\overline{R}_\mathfrak{p}(t)$ *bezeichnet sei, derart, daß für jede absolute Idealklasse* $\mathfrak{k}$ *aus* Ω *gilt*

$$j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}) = R_\mathfrak{p}(j(\mathfrak{k}))$$
$$j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}) = \overline{R}_\mathfrak{p}(j(\mathfrak{k})).$$

Beweis: Im Falle $p = \mathfrak{p}$ ist das trivial ($j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}) = j(\mathfrak{k})$), im Falle $p = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$ mit $\mathfrak{p} \sim \bar{\mathfrak{p}}$ schon nach Satz 8 richtig ($R_\mathfrak{p}(t)$ rational).

Sei jetzt also $p = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$ mit $\mathfrak{p} \nsim \bar{\mathfrak{p}}$. Nach Satz 8 haben wir dann ein Relationenpaar

$$j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}) = -j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}{}^{-1}\mathfrak{k}) + R_1(j(\mathfrak{k}))$$
$$j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}) = -j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}{}^{-1}\mathfrak{k}) + R_1(j(\mathfrak{k}))$$

für alle Klassen $\mathfrak{k}$. Durch Iteration dieser Relationen folgt

$$j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}{}^2\mathfrak{k}) = -j(\mathfrak{k}) + R_1(j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k})) = G_2(j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k}))$$
$$j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}{}^2\mathfrak{k}) = -j(\mathfrak{k}) + R_1(j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k})) = G_2(j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k}))$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}{}^i\mathfrak{k}) = G_i(j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k}))$$
$$j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}{}^i\mathfrak{k}) = G_i(j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k})),$$

wo die $G_i(t, u)$ rationalzahlige Polynome sind, die nur von i, p, Ω, nicht von $\mathfrak{k}$ abhängen.

Wir ziehen nunmehr die Wurzeln $\varphi_{P_\nu}(w_1, w_2)$ der Multiplikatorgleichung $\Phi_p(t, j(w_1, w_2))$ heran (siehe **1**, S. 122 f.). Diese besitzen nach analogen Schlüssen wie in **1**, S. 123 u. S. 125 Darstellungen der Form

$$\varphi_{P_\nu}(w_1, w_2) = \frac{G_p(j(P_\nu(w_1, w_2)), j(w_1, w_2))}{J'_p(j(P_\nu(w_1, w_2)), j(w_1, w_2))},$$

wo $G_p(t, u)$ ein ganzzahliges Polynom und $J'_p(t, u)$ die Ableitung der Invariantengleichung $J_p(t, u)$ nach t bedeutet.

Diese Darstellungen wenden wir in den folgenden beiden singulären Fällen an:

w_1, w_2 sei die Basis α_1, α_2 eines Ideals $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{k}$, also

$$j(w_1, w_2) = j(\alpha_1, \alpha_2) = j(\mathfrak{k}).$$

P und $\overline{P}$ seien diejenigen Transformationen p-ten Grades für die Basis α_1, α_2, die den Multiplikationen $\mathfrak{p}a$ und $\bar{\mathfrak{p}}a$ entsprechen (siehe **1**, in Satz 10), also

$$j(P(\alpha_1, \alpha_2)) = j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}), \qquad j(\overline{P}(\alpha_1, \alpha_2)) = j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k})).$$

In diesen singulären Fällen verschwindet der Nenner in jenen Darstellungen nicht, denn etwa im ersten Falle ist er gleich

$$\prod_{P_\nu \nsim P} (j(P(\alpha_1, \alpha_2)) - j(P_\nu(\alpha_1, \alpha_2)).$$

Hier ist aber von den $j(P_\nu(\alpha_1, \alpha_2))$ nur noch $j(\overline{P}(\alpha_1, \alpha_2)) = j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k})$ absolute Klasseninvariante, und auch diese ist von $j(P(\alpha_1, \alpha_2)) = j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k})$ verschieden, da $\mathfrak{p} \nsim \bar{\mathfrak{p}}$, also $\mathfrak{k}_\mathfrak{p} \neq \mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ vorausgesetzt ist.

Somit gelten die Darstellungen

$$\varphi_P(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{G_p(j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k}))}{J'_p(j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k}))} = S_p(j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k}))$$
$$\varphi_{\overline{P}}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{G_p(j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k}))}{J'_p(j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k}))} = S_p(j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k})).$$

Dabei sind die Polynome $G_p(t, u)$ und $J'_p(t, u)$ von $\mathfrak{k}$ unabhängig, also die $S_p(t, u)$ von $\mathfrak{k}$ unabhängige rationalzahlige rationale Funktionen.

Auch diese Darstellungen iterieren wir, und zwar f-mal, wo f die Ordnung der

Klassen $\mathfrak{k}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ ist und demgemäß

$$\mathfrak{p}^f = (\varpi), \quad \bar{\mathfrak{p}}^f = (\bar{\varpi}), \quad \varpi\bar{\varpi} = p^f$$

gesetzt werde. So ergibt sich, ähnlich wie in **1**, S. 124

$$\varphi_{P^{(1)}} \cdots \varphi_{P^{(f)}} = \bar{\varpi}^{12} = \prod_{i=1}^{f} S_p(j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^{\,i}\mathfrak{k}),\ j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^{\,i-1}\mathfrak{k}))$$

$$\varphi_{\bar{P}^{(1)}} \cdots \varphi_{\bar{P}^{(f)}} = \varpi^{12} = \prod_{i=1}^{f} S_p(j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}^{\,i}\mathfrak{k}),\ j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}^{\,i-1}\mathfrak{k})),$$

wo die $P^{(1)} = P, \ldots, P^{(f)}$ die a. a. O. erklärte Bedeutung haben, und die $\bar{P}^{(1)} = \bar{P}, \ldots, \bar{P}^{(f)}$ entsprechend für $\bar{\mathfrak{p}}$ statt $\mathfrak{p}$ erklärt sind. Durch Heraufmultiplizieren der Nenner erhalten wir dann zwei Relationen

$$\bar{\varpi}^{12} Q_p(j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^{f}\mathfrak{k}), \ldots, j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k})) = P_p(j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^{f}\mathfrak{k}), \ldots, j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k}))$$

$$\varpi^{12} Q_p(j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}^{f}\mathfrak{k}), \ldots, j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k})) = P_p(j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}^{f}\mathfrak{k}), \ldots, j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k}))$$

mit rationalzahligen von $\mathfrak{k}$ unabhängigen Polynomen $P_p(t_f, .., t_1, t_0)$, $Q_p(t_f, \ldots, t_1, t_0)$. Indem darin die oben gewonnenen Darstellungen der $j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}^{\,i}\mathfrak{k})$ und $j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}^{\,i}\mathfrak{k})$ eingeführt werden, können sie in die Form

$$\bar{\varpi}^{12} Q_p(j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k})) - P_p(j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k})) = 0$$
$$\varpi^{12} Q_p(j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k})) - P_p(j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}), j(\mathfrak{k})) = 0$$

gebracht werden, wo $P_p(t, u)$, $Q_p(t, u)$; wieder rationalzahlige von $\mathfrak{k}$ unabhängige Polynome bedeuten.

Wir betrachten nun die beiden konjugierten Polynome

$$F_\mathfrak{p}(t, j(\mathfrak{k})) = \bar{\varpi}^{12} Q_p(t, j(\mathfrak{k})) - P_p(t, j(\mathfrak{k}))$$
$$\bar{F}_\mathfrak{p}(t, j(\mathfrak{k})) = \varpi^{12} Q_p(t, j(\mathfrak{k})) - P_p(t, j(\mathfrak{k}))$$

mit Koeffizienten aus Ω. Das erste verschwindet für $t = j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k})$. Dagegen verschwindet es nicht für $t = j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k})$; denn für $t = j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k})$ verschwindet das zweite, und nach der Konstruktion ist $Q_p(j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}),\ j(\mathfrak{k})) \neq 0$ und $\bar{\varpi}^{12} \neq \varpi^{12}$. Daher hat $F_\mathfrak{p}(t, j(\mathfrak{k}))$ mit

$$L(t, j(\mathfrak{k})) = (t - j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}))(t - j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k})) = t^2 - R_1(j(\mathfrak{k}))t + R_2(j(\mathfrak{k}))$$

(siehe Satz 8) lediglich die eine Wurzel $t = j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k})$ gemeinsam. Somit ist

$$j(\mathfrak{k}_\mathfrak{p}\mathfrak{k}) = R_\mathfrak{p}(j(\mathfrak{k}))$$

mit einem Polynom $R_\mathfrak{p}(t)$ aus Ω, dessen Koeffizienten nach dem oben a. S. 72 zitierten Weber-Perronschen Satz nicht von $\mathfrak{k}$ abhängen.

Entsprechend folgt, daß $\bar{F}_\mathfrak{p}(t, j(\mathfrak{k}))$ mit $L(t, j(\mathfrak{k}))$ lediglich die eine Wurzel $t = j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k})$ gemeinsam hat, und daher ergibt sich unter nochmaliger Anwendung des Weber-Perronschen Satzes

$$j(\mathfrak{k}_{\bar{\mathfrak{p}}}\mathfrak{k}) = \bar{R}_\mathfrak{p}(j(\mathfrak{k}))$$

mit dem zu $R_\mathfrak{p}(t)$ konjugierten Polynom $\bar{R}_\mathfrak{p}(t)$.

Damit ist Satz 9 bewiesen.

Nach den zu Beginn dieses Paragraphen bereits gemachten Bemerkungen ergibt sich daraus sofort

Satz 10. *Zu jeder absoluten Idealklasse $\mathfrak{k}_0$ von Ω existiert ein nur von $\mathfrak{k}_0$ abhängiges Polynom $R_{\mathfrak{k}_0}(t)$ mit Koeffizienten aus Ω derart, daß für jede absolute Idealklasse $\mathfrak{k}$ von Ω gilt*

$$j(\mathfrak{k}_0\mathfrak{k}) = R_{\mathfrak{k}_0}(j(\mathfrak{k})),$$

und wenn $\bar{\mathfrak{k}}_0$ und $\bar{R}_{\mathfrak{k}_0}(t)$ die konjugierten zu $\mathfrak{k}_0$ und $R_{\mathfrak{k}_0}(t)$ bedeuten, auch

$$j(\bar{\mathfrak{k}}_0\mathfrak{k}) = \bar{R}_{\mathfrak{k}_0}(j(\mathfrak{k})).$$

Die Existenz der $R_{\mathfrak{k}_0}(t)$ in Satz 10 zunächst besagt nun

Satz 11. *Die absolute Klassengleichung $H(t)$ ist Galoissch in bezug auf Ω.*

Der Körper $\mathsf{K} = \Omega(j(\mathfrak{k}))$ ist also von der Wahl der Klasse $\mathfrak{k}$ unabhängig und Galoissch in bezug auf Ω.

Da $H(t)$ rationale Koeffizienten hat, gilt dann sogar

Zusatz. *Der Körper K ist Galoissch in bezug auf P.*

Die Unabhängigkeit der $R_{\mathfrak{k}_0}(t)$ in Satz 10 von $\mathfrak{k}$ ferner besagt, wie man leicht sieht,

Satz 12. *Der Körper K ist Abelsch in bezug auf Ω, und seine Relativgruppe H ist isomorph zur Gruppe der absoluten Idealklassen in Ω, indem jeder absoluten Idealklasse $\mathfrak{k}_0$ von Ω die Substitution*

$$\sigma_{\mathfrak{k}_0} = (j(\mathfrak{k}) \to R_{\mathfrak{k}_0}(j(\mathfrak{k}))) = (j(\mathfrak{k}) \to j(\mathfrak{k}_0\mathfrak{k})),$$

wo $\mathfrak{k}$ alle absoluten Idealklassen von Ω durchläuft, zugeordnet wird.

Aus der Relation für die konjugierte (reziproke) Klasse in Satz 10 folgt schließlich leicht noch

Zusatz. *Die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ von K in bezug auf P entsteht aus der Relativgruppe $\mathfrak{H}$ in bezug auf Ω durch Erweiterung mit der Substitution*

$$\tau = (\sqrt{d} \to -\sqrt{d}, \quad j(\mathfrak{k}) \to j(\mathfrak{k})),$$

mit den Relationen

$$\tau^2 = 1, \quad \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1} \quad \textit{für jedes } \sigma \textit{ aus } H.$$

§ 3. Das Zerlegungsgesetz für die Primideale aus Ω im absoluten Klassenkörper zu Ω.

In **1**, Satz 12 wurde bereits das Zerlegungsgesetz für die nicht in der Diskriminante d von Ω aufgehenden Primideale 1. Grades aus Ω hergeleitet, soweit sie nicht in der (unbekannten) Diskriminante D von $H(t)$ aufgehen. Im folgenden soll das entsprechende Zerlegungsgesetz für die übrigen Primideale aus Ω, soweit sie nicht in D aufgehen, hergeleitet werden.

Der Hauptpunkt dafür ist der Beweis der folgenden Ergänzung von **1**, Satz 11:

Satz 13. *Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal 2. Grades oder ein in der Diskriminante d von Ω aufgehendes Primideal von Ω, das beidenfalls nicht in der Diskriminante D von $H(t)$ aufgeht*[9]*, so gilt für jede absolute Idealklasse $\mathfrak{k}$ von Ω die Kongruenz*

$$j(\mathfrak{k})^{N(\mathfrak{p})} \equiv j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}^{-1}\mathfrak{k}) \textit{ mod. } \mathfrak{p}.$$

Beweis: Wir stützen uns auf die Frobeniussche Zuordnung zwischen Primidealen und Substitutionen. Ist $\mathfrak{K}$ ein Galoisscher Körper in bezug auf den algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{P}$ ein nicht in der Relativdiskriminante von $\mathfrak{K}$ aufgehendes Primideal aus $\mathfrak{K}$, und $\mathfrak{p}$ das zugehörige Primideal in $\mathfrak{R}$, so existiert eine durch $\mathfrak{P}$ eindeutig bestimmte Substitution $\sigma_{\mathfrak{P}}$ aus der Relativgruppe von $\mathfrak{K}$ derart, daß für jede für $\mathfrak{P}$ ganze Zahl A aus $\mathfrak{K}$ gilt

$$\mathsf{A}^{N(\mathfrak{p})} \equiv \sigma_{\mathfrak{P}}\mathsf{A} \text{ mod.* } \mathfrak{P}$$

(betr. mod.* siehe **1**, S. 130, Fußnote).

$\sigma_{\mathfrak{P}}$ ist Erzeugende der Zerlegungsgruppe zu $\mathfrak{P}$; insbesondere ist die Ordnung von $\sigma_{\mathfrak{P}}$ gleich dem Relativgrad von $\mathfrak{P}$. Ferner entspricht einem konjugierten $\tau\mathfrak{P}$ die konjugierte Substitution $\tau\sigma\tau^{-1}$. Im Falle, daß $\mathfrak{K}$ Abelsch in bezug auf $\mathfrak{R}$ ist, ist also so jedem nicht in der Relativdiskriminante von $\mathfrak{K}$ aufgehenden Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}$ eindeutig eine Substitution $\sigma_{\mathfrak{p}}$ zugeordnet, und die $\sigma_{\mathfrak{p}}$ definierende Kongruenz gilt dann, sofern A für $\mathfrak{p}$ ganz ist, sogar mod*. $\mathfrak{p}$:

$$\mathsf{A}^{N(\mathfrak{p})} \equiv \sigma_{\mathfrak{p}}\mathsf{A} \text{ mod.* } \mathfrak{p}.$$

[9]) Diese Einschränkung war in 1, Satz 11 unnötig.

Es sei nun zunächst $\mathfrak{p}$ ein Primideal 2. Grades aus Ω, also $p = \mathfrak{p}$, $N(\mathfrak{p}) = p^2$. Dann geht $\mathfrak{p}$ nicht in der Diskriminante d von Ω und nach der Voraussetzung auch nicht in der Relativdiskriminante von K in bezug auf Ω auf, also auch nicht in der Diskriminante von K. Die Frobeniussche Kongruenz ist also auf $\mathfrak{R} = \mathsf{K}$, $\mathfrak{R} = \mathsf{P}$ für einen Primteiler $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ in K anwendbar und liefert

$$j(\mathfrak{k})^p \equiv j(\mathfrak{k}_0\,\mathfrak{k}) \bmod. \mathfrak{P}$$

mit einer gewissen (möglicherweise von $\mathfrak{k}$ abhängigen) Klasse $\mathfrak{k}_0$. Daraus folgt weiter unter Anwendung von Satz 10

$$j(\mathfrak{k})^{p^2} \equiv j(\mathfrak{k}_0\,\mathfrak{k})^p = R_{\mathfrak{k}_0}(j(\mathfrak{k}))^p \bmod. \mathfrak{P}\,.$$

Nach der Voraussetzung über $\mathfrak{p}$ hat nun $R_{\mathfrak{k}_0}(t)$ (bei geeigneter Normierung) für $\mathfrak{p}$ ganze Koeffizienten. Da aber nach der Frobeniusschen Kongruenz für $\mathfrak{R} = \Omega$, $\mathfrak{R} = \mathsf{P}$ im betrachteten Falle für jedes für $\mathfrak{p}$ ganze α aus Ω gilt

$$\alpha^p \equiv \bar{\alpha} \bmod.^* \mathfrak{p},$$

wo $\bar{\alpha}$ die konjugierte zu α bezeichnet, so ergibt sich weiter

$$j(\mathfrak{k})^{p^2} \equiv \bar{R}_{\mathfrak{k}_0}(j(\mathfrak{k})^p) = R_{\bar{\mathfrak{k}}_0}(j(\mathfrak{k})^p) \bmod.^* \mathfrak{P}\,,$$

letzteres nach Satz 10, also durch Einsetzen der Ausgangskongruenz und nach Satz 10

$$j(\mathfrak{k})^{p^2} \equiv R_{\bar{\mathfrak{k}}_0}(j(\mathfrak{k}_0\,\mathfrak{k})) = j(\bar{\mathfrak{k}}_0\,\mathfrak{k}_0\,\mathfrak{k}) = j(\mathfrak{k}) \bmod. \mathfrak{P}, \text{ also auch mod. } \mathfrak{p},$$

und das ist im Falle $p = \mathfrak{p}$ die Behauptung, weil ja dann $\mathfrak{k}_\mathfrak{p} = \mathfrak{k}_p$ die Hauptklasse ist.

Es sei ferner $\mathfrak{p}$ ein in der Diskriminante d von Ω aufgehendendes Primideal aus Ω, also $p = \mathfrak{p}^2$, $N(\mathfrak{p}) = p$.

In diesem Falle beruht der Beweis auf der identischen Kongruenz

$$J_p(t, u) \equiv (t^p - u)\,(t - u^p) \bmod. p$$

für die Invariantengleichung von beliebigem Primzahltransformationsgrad p. Der Beweis dieser Kongruenz verläuft, ähnlich wie in **1**, S. 123, mittels des q-Entwicklungsprinzips. Es ist

$$J_p(t, j(w_1, w_2)) = \prod_{\nu=1}^{p+1}(t - j\,(P_\nu(w_1, w_2)))\,,$$

und ähnlich wie a. a. O. gilt identisch in q

$$j(P_1(w_1, w_2)) \equiv \cdots \equiv j(P_p(w_1, w_2)) \bmod. (1 - \zeta_p)\,,$$

also

$$J_p(t, j\,(w_1, w_2)) \equiv (t - j(P_1(w_1, w_2)))^p\,(t - j(P_{p+1}(w_1, w_2)))$$
$$\equiv (t^p - j(P_1(w_1, w_2))^p)\,(t - j(P_{p+1}(w_1, w_2))) \bmod. (1 - \zeta_p), \text{ also auch mod. } p.$$

Ist nun

$$j(w_1, w_2) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n q^n$$

die q-Entwicklung von $j(w_1, w_2)$, so ist einerseits

$$j(P_1(w_1, w_2)) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n\, q^{\frac{n}{p}}$$

$$j(P_1(w_1, w_2))^p \equiv \sum_{n=-1}^{\infty} a_n\, q^n = j(w_1, w_2) \bmod. p\,,$$

andrerseits

$$j(P_{p+1}(w_1, w_2)) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n\, q^{np} \equiv j(w_1, w_2)^p \qquad \bmod. p\,,$$

identisch in q. Damit ergibt sich

$$J_p(t, j(w_1, w_2)) \equiv (t^p - j(w_1, w_2))\,(t - j(w_1, w_2)^p) \quad \text{mod. } p,$$

zunächst identisch in q, also nach dem q-Entwicklungsprinzip auch identisch in $j(w_1, w_2)$.

Aus der damit bewiesenen identischen Kongruenz folgt nun, weil für $p = N(\mathfrak{p})$ $J_p(j(\mathfrak{f}_\mathfrak{p}\mathfrak{f}), j(\mathfrak{f})) = 0$ ist,

$$(j(\mathfrak{f}_\mathfrak{p}\mathfrak{f})^p - j(\mathfrak{f}))\,(j(\mathfrak{f}_\mathfrak{p}\mathfrak{f}) - j(\mathfrak{f})^p) \equiv 0 \text{ mod. } p.$$

Ist also $\mathfrak{P}$ ein Primteiler von $\mathfrak{p}$ in K, so gilt entweder

$$j(\mathfrak{f}_\mathfrak{p}\mathfrak{f})^p \equiv j(\mathfrak{f}) \text{ mod. } \mathfrak{P}$$

oder

$$j(\mathfrak{f}_\mathfrak{p}\mathfrak{f}) \equiv j(\mathfrak{f})^p \text{ mod. } \mathfrak{P},$$

wobei diese Alternative möglicherweise von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{f}$ abhängt.

Die Frobeniussche Kongruenz für $\mathfrak{R} = \mathsf{K}$, $\mathfrak{R} = \Omega$, die nach der Voraussetzung über $\mathfrak{p}$ für $\mathfrak{p}$ anwendbar ist, stellt nun auf Grund von Satz 12 die Existenz einer von $\mathfrak{f}$ unabhängigen Klasse $\mathfrak{f}_0$ fest mit

$$j(\mathfrak{f})^p \equiv j(\mathfrak{f}_0\,\mathfrak{f}) \text{ mod. } \mathfrak{p}.$$

Da nach der Voraussetzung über $\mathfrak{p}$ die absoluten Klasseninvarianten mod. $\mathfrak{P}$ inkongruent sind, so folgt durch Vergleich mit den beiden alternativen Kongruenzen entweder $\mathfrak{f}_0 = \mathfrak{f}_\mathfrak{p}^{-1}$, was die Behauptung ergibt, oder $\mathfrak{f}_0 = \mathfrak{f}_\mathfrak{p}$, was dasselbe besagt, weil aus $p = \mathfrak{p}^2$ folgt $\mathfrak{p} \sim \mathfrak{p}^{-1}$.

Damit ist Satz 13 bewiesen.

Durch Satz 13 wird für die dort genannten Primideale $\mathfrak{p}$ aus Ω auf Grund von Satz 12 die nach Frobenius für den Körper K zugeordnete Substitution $\sigma_\mathfrak{p}$ festgelegt. Da deren Ordnung gleich dem Relativgrad der Primteiler von $\mathfrak{p}$ in K ist, so ergibt sich unmittelbar das zu **1**, Satz 12 analoge Zerlegungsgesetz für die in Satz 13 genannten Primideale $\mathfrak{p}$ aus Ω in K. Mit **1**, Satz 12 zusammengefaßt hat man also das folgende allgemeine Zerlegungsgesetz für den Körper K:

Satz 14. *Ein nicht in der Diskriminante D der absoluten Klassengleichung $H(t)$ von Ω aufgehendes Primideal $\mathfrak{p}$ aus Ω zerfällt in K in verschiedene Primideale f-ten Relativgrades, wenn f die Ordnung der absoluten Idealklasse $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{p}$ ist.*

Darüber hinaus besagen Satz 13 und **1**, Satz 11 auf Grund von Satz 12 die Gültigkeit des *Artinschen Reziprozitätsgesetzes* für K und die nicht in D aufgehenden Primideale $\mathfrak{p}$ aus Ω, nämlich die Tatsache, daß die nach Frobenius zugeordnete Substitution $\sigma_\mathfrak{p}$ nur von der absoluten Idealklasse $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$ abhängt, der $\mathfrak{p}$ angehört, und die isomorphe Abbildung der absoluten Idealklassengruppen von Ω auf die Galoissche Relativgruppe von K vermittelt.

Damit ist für den Körper K ein umfassender Teil derjenigen Tatsachen festgestellt, die die allgemeine Klassenkörpertheorie für den absoluten Klassenkörper zu Ω aussagt.

Es fehlt lediglich noch die Tatsache, daß die Relativdiskriminante von K gleich 1 ist, und (möglicherweise darüber hinaus [10])), daß das Zerlegungsgesetz von Satz 14 auch für die in D aufgehenden Primideale gilt. Beweise für diese letzteren Tatsachen ohne Verwendung transzendenter Hilfsmittel (Dirichletscher Reihen usw.) sind bisher nicht bekannt.

---

[10]) Wenn nämlich die Diskriminante von $H(t)$ nicht 1 ist.

II. Der Strahlklassenkörper $K_{\mathfrak{m}}$ mod. $\mathfrak{m}$ zu Ω.

§ 1. Die Strahlklassengleichung mod. $\mathfrak{m}$ von Ω.

In **1**, Satz 22 wurde gezeigt, daß die Strahlklasseninvarianten $\tau(\mathfrak{k}^*)$ mod. $\mathfrak{m}$ von Ω algebraische Zahlen sind. Wir wollen jetzt darüber hinaus zeigen, daß *die zu einer absoluten Idealklasse* $\mathfrak{k}$ im Sinne von **1**, S. 130 *gehörige Strahlklassengleichung mod.* $\mathfrak{m}$ von Ω, d. i. das Polynom

$$T_{\mathfrak{m}}(t, \mathfrak{k}) = \prod_{\mathfrak{k}^* \text{ zu } \mathfrak{k}} (t - \tau(\mathfrak{k}^*)),$$

ein Polynom $T_{\mathfrak{m}}(t, j(\mathfrak{k}))$ in t und $j(\mathfrak{k})$ mit von $\mathfrak{k}$ unabhängigen Koeffizienten aus Ω ist, so daß also die *volle Strahlklassengleichung mod.* $\mathfrak{m}$ von Ω, d. i. das Polynom

$$T_{\mathfrak{m}}(t) = \prod_{\mathfrak{k}^*} (t - \tau(\mathfrak{k}^*)) = \prod_{\mathfrak{k}} T_{\mathfrak{m}}(t, j(\mathfrak{k})),$$

Koeffizienten aus Ω hat.

Zur Abkürzung nennen wir im folgenden einen Ausdruck *vom Typus* $\mathsf{P}(j(\mathfrak{k}))$ *bzw.* $\Omega(j(\mathfrak{k}))$, wenn er als rationale Funktion (und folglich auch als Polynom) in $j(\mathfrak{k})$ mit von $\mathfrak{k}$ unabhängigen Koeffizienten aus P bzw. Ω darstellbar ist; eine rationale Funktion oder eine Potenreihe mit Koeffizienten vom Typus $\mathsf{P}(j(\mathfrak{k}))$ bzw. $\Omega(j(\mathfrak{k}))$ nennen wir ihrerseits von diesem Typus.

Zum Beweis der ausgesprochenen Behauptungen leiten wir zunächst das bereits in der Einleitung erwähnte **verallgemeinerte Prinzip der komplexen Multiplikation** her.

Satz 15. *Es sei* $\mathfrak{n}$ *ein ganzes Ideal* $\neq 1$ *aus* Ω, $\mathfrak{a}$ *ein beliebiges Ideal aus* Ω *und* $\mathfrak{k}$ *die absolute Idealklasse von* $\mathfrak{a}$. *Dann existiert eine nur von* $\mathfrak{n}$, *nicht von* $\mathfrak{a}$ *oder* $\mathfrak{k}$ *abhängige rationale Funktion* $R_{\mathfrak{n}}(t, v)$ *mit Koeffizienten aus* Ω *derart, daß*

$$\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right) = R_{\mathfrak{n}}(\tau(u, \mathfrak{a}), j(\mathfrak{k}))$$

ist.

Oder also kürzer:

$\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)$ *ist eine rationale Funktion von* $\tau(u, \mathfrak{a})$ *vom Typus* $\Omega(j(\mathfrak{k}))$.

Beweis: a) Die Funktion $\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)$ ist bei der **1**, S. 128 erklärten Gruppe $\mathfrak{U}_{\mathfrak{a}}$ invariant; denn sie ist bei $\mathfrak{U}_{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}}$ invariant, und $\mathfrak{U}_{\mathfrak{a}}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{U}_{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}}$, weil $\mathfrak{a}$ Teilmenge von $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}$ ist, weil also aus $\mathfrak{u}' \equiv \mathfrak{u}$ mod. $\mathfrak{a}$ folgt $\mathfrak{u}' \equiv \mathfrak{u}$ mod. $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}$.

Nach **1**, Satz 17 folgt daraus die Existenz einer (von $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{a}$ abhängigen) in t rationalen Funktion $R_{\mathfrak{n}}(t, \mathfrak{a})$ derart, daß

$$\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right) = R_{\mathfrak{n}}(\tau(u, \mathfrak{a}), \mathfrak{a})$$

ist. Wegen der Homogenität 0. Dimension von $\tau(u, \mathfrak{w})$ hängt übrigens $R_{\mathfrak{n}}(t, \mathfrak{a})$ nur von $\mathfrak{k}$ ab, so daß wir also

$$\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right) = R_{\mathfrak{n}}(\tau(u, \mathfrak{a}), \mathfrak{k})$$

schreiben können.

Wir setzen nun die rationale Funktion $R_{\mathfrak{n}}(t, \mathfrak{k})$ in die Gestalt

$$R_{\mathfrak{n}}(t, \mathfrak{k}) = \frac{Z_{\mathfrak{n}}(t, \mathfrak{k})}{N_{\mathfrak{n}}(t, \mathfrak{k})}$$

mit Polynomen $Z_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})$ und $N_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})$ in t, die eindeutig dadurch festgelegt seien, daß sie teilerfremd sind und daß $N_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})$ den höchsten Koeffizienten 1 hat.

b) Wir beweisen jetzt zunächst, daß der so normierte Nenner die Produktzerlegung

$$N_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k}) = \prod'_{\substack{\varrho \bmod \mathfrak{a} \\ (\varrho) = \frac{\mathfrak{g}\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}}} (t - \tau(\varrho, \mathfrak{a}))$$

hat, wo ϱ ein volles System von mod. $\mathfrak{a}$ inkongruenten Zahlen durchläuft, für die $(\varrho) = \frac{\mathfrak{g}\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}$ mit einem ganzen Ideal $\mathfrak{g}$ ist, exkl. $\varrho \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}$, d. h. $\mathfrak{g} \equiv 0 \bmod \mathfrak{n}$.

Um das zu beweisen, entnehmen wir aus

$$\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right) = \frac{Z_\mathfrak{n}(\tau(u, \mathfrak{a}), \mathfrak{k})}{N_\mathfrak{n}(\tau(u, \mathfrak{a}), \mathfrak{k})}$$

in einer gewissen Analogie zu Satz 1, daß bei der angegebenen Normierung der Nenner $N_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})$ für alle und nur die Werte $t = \xi$ verschwindet, für die, wenn $\xi = \tau(\varrho, \mathfrak{a})$ gesetzt wird, die Funktion $\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)$ bei $u = \varrho$ unendlich wird, während dem Ansatz gemäß $\tau(u, \mathfrak{a})$ bei $u = \varrho$ endlich $(= \xi)$ ist. Die Ordnung der Unendlichkeitsstellen von $\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)$ ist gemäß **1**, S. 127 durchweg e. Bezeichnet dann k_ϱ die zu untersuchende Ordnung des Verschwindens von $N_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})$ bei $t = \xi$, und n_ϱ die Ordnung, mit der der Wert $\xi = \tau(\varrho, \mathfrak{a})$ angenommen wird, so hat man aus obiger Relation überdies $k_\varrho n_\varrho = e$, also $k_\varrho = \frac{e}{n_\varrho}$.

Daß $\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)$ für $u = \varrho$ unendlich wird, während $\tau(\varrho, \mathfrak{a})$ endlich bleibt, trifft nun nach **1**, Satz 16 genau für alle

$$\varrho \equiv 0 \bmod \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}, \qquad \varrho \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{a}$$

zu, d. h. also für alle ϱ, für die $(\varrho) = \frac{\mathfrak{g}\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}$ mit ganzem $\mathfrak{g} \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{n}$ ist. Da mod. $\mathfrak{a}$ kongruenten ϱ sowie assoziierten ϱ derselbe Wert $\xi = \tau(\varrho, \mathfrak{a})$ entspricht, so ist also zunächst bewiesen, daß

$$N_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k}) = \prod'_{\substack{(\varrho) \bmod \mathfrak{a} \\ (\varrho) = \frac{\mathfrak{g}\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}}} (t - \tau(\varrho, \mathfrak{a}))^{k_\varrho}$$

mit gewissen Exponenten k_ϱ ist, für die bisher $k_\varrho = \frac{e}{n_\varrho}$ feststeht.

Die Ordnung n_ϱ, mit der ein Wert $\xi = \tau(\varrho, \mathfrak{a})$ angenommen wird, ist nun nach **1**, S. 128 gleich der Ordnung des zu ϱ als Punkt des Diskontinuitätsbereiches $D_\mathfrak{a}$ gehörigen Fixpunktzyklus der Gruppe $\mathfrak{U}_\mathfrak{a}$. Ist also ε eine primitive e-te Einheitswurzel, so wird der Fixpunktzyklus um ϱ durch

$$u' - \varrho = \varepsilon^{\frac{e}{n_\varrho} i}(u - \varrho), \text{ d. h. } u' = \varepsilon^{\frac{e}{n_\varrho} i} u + \varrho - \varepsilon^{\frac{e}{n_\varrho} i} \varrho \quad (i = 0, \ldots, n_\varrho - 1)$$

gegeben; es ist also $\frac{e}{n_\varrho}$ der früheste Exponent, für den die mit $i = 1$ gebildete dieser Substitutionen zur Gruppe $U_\mathfrak{a}$ gehört, d. h. für den

$$\varepsilon^{\frac{e}{n_\varrho} i} \varrho \equiv \varrho \bmod \mathfrak{a}$$

ist. Daher sind unter den zu ϱ assoziierten $\varepsilon^i\varrho$ genau $k_\varrho = \frac{e}{n_\varrho}$ mod. $\mathfrak{a}$ inkongruente vorhanden. Es kommen somit die obigen Exponenten k_ϱ gerade dadurch zum Fortfall, daß man das Produkt über alle Zahlen ϱ mod. $\mathfrak{a}$ mit der angegebenen Beschaffenheit statt nur über alle derartigen Hauptideale (ϱ) mod. $\mathfrak{a}$ erstreckt.

Damit ist zunächst die über $N_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})$ ausgesprochene Behauptung bewiesen.

c) Es sei nun n das kleinste positive ganze Multiplum von $\mathfrak{n}$ und α_1, α_2 eine Basis des Ideals $\mathfrak{a}$. Dann besitzen die Zahlen ϱ wie in **1**, S. 133 Darstellungen

$$\varrho = \frac{g_1\alpha_1 + g_2\alpha_2}{n}$$

mit ganzrationalen $g_1, g_2 \not\equiv 0, 0 \bmod. n$, und mod. $\mathfrak{a}$ inkongruenten ϱ entsprechen mod. n inkongruente Paare g_1, g_2. Daher ist $N_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})$ Teiler des Polynoms

$$\overline{T}_n(t, \mathfrak{k}) = \prod_{x_1, x_2 \bmod. n}{}' \left(t - \tau\left(\frac{x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2}{n}, \mathfrak{a}\right)\right),$$

in t, (das aus Homogeneitätsgründen wieder nur von $\mathfrak{k}$ abhängt). Es kann dann also

$$\overline{T}_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k}) = N_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})\, Q_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})$$

mit einem nur von $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{k}$ abhängigen Polynom $Q_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})$ in t gesetzt, und dann weiter die obige Quotientendarstellung von $R_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})$ zu

$$R_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k}) = \frac{Z_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})\, Q_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})}{N_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})\, Q_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})} = \frac{\overline{Z}_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})}{\overline{T}(t, \mathfrak{k})}$$

erweitert werden, wo $\overline{Z}_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})$ ein weiteres nur von $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{k}$ abhängiges Polynom in t ist.

Diese Erweiterung ist für den Beweis deshalb förderlich, weil für den neuen Nenner $\overline{T}_n(t, \mathfrak{k})$ die für $R_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})$ zu beweisende Eigenschaft leicht festzustellen ist. In der Tat sieht man unmittelbar, daß die Polynome $\overline{T}_n(t, \mathfrak{k})$ mit den in **1**, Satz 21 behandelten Polynomen $T_n(t, j(\mathfrak{k}))$ durch die Substitution

$$\overline{T}_n(t, \mathfrak{k}) = \prod_{\substack{n_i \mid n \\ n_i \neq 1}} T_{n_i}(t, j(\mathfrak{k}))$$

zusammenhängen, und daß folglich wie $T_n(t, j(\mathfrak{k}))$ so auch $\overline{T}_n(t, \mathfrak{k})$ ein Polynom $\overline{T}_n(t, j(\mathfrak{k}))$ vom Typus $\mathsf{P}(j(\mathfrak{k}))$ ist.

d) Um den Beweis zu vollenden, ist noch zu zeigen, daß der neue Zähler $\overline{Z}_\mathfrak{n}(t, \mathfrak{k})$ ein Polynom $\overline{Z}_\mathfrak{n}(t, j(\mathfrak{k}))$ vom Typus $\Omega(j(\mathfrak{k}))$ ist.

Dazu schreiben wir die bis jetzt gewonnenen Quotientendarstellung von $\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)$ in der Form

$$\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right) \overline{T}_n(\tau(u, \mathfrak{a}), j(\mathfrak{k})) = \overline{Z}_\mathfrak{n}(\tau(u, \mathfrak{a}), \mathfrak{k})$$

und entwickeln beide Seiten nach Potenzen von u oder besser gleich nach Potenzen der Größe 0. Dimension

$$v = \frac{u^e}{g^{(e)}(\mathfrak{a})},$$

wo $g^{(e)}(\mathfrak{a})$ den in **1**, S. 127 der Weierstraßschen $\wp$-Funktion angefügten Normierungsfaktor bedeutet. Man hat allgemein eine v-Entwicklung

$$\tau(u, \mathfrak{w}) = \sum_{k=-1}^{\infty} F_k(\mathfrak{w})\, v^k,$$

wo die Koeffizienten $F_k(\mathfrak{w})$ ganze Modulfunktionen, also Polynome $F_k(j(\mathfrak{w}))$ in $j(\mathfrak{w})$ sind, deren Koeffizienten sich etwa mittels des q-Entwicklungsprinzips [11]) als rationale Zahlen erweisen. Im singulären Falle $\mathfrak{w} = \mathfrak{a}$ hat man also eine v-Entwicklung

$$\tau(u, \mathfrak{a}) = \sum_{k=-1}^{\infty} F_k(j(\mathfrak{k}))\, v^k$$

vom Typus $\mathsf{P}(j(\mathfrak{k}))$. Es ist dann

$$\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right) = \sum_{k=-1}^{\infty} F_k\left(j\left(\frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{k}_{\mathfrak{n}}}\right)\right)\left(\frac{g^{(e)}(\mathfrak{a})}{g^{(e)}\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)}\right)^k v^k .$$

Hierin ist nach Satz 10 $j\left(\frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{k}_{\mathfrak{n}}}\right)$ vom Typus $\Omega(j(\mathfrak{k}))$. Wir werden ferner nachher beweisen, daß auch $\frac{g^{(e)}(\mathfrak{a})}{g^{(e)}\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)}$ vom Typus $\Omega(j(\mathfrak{k}))$ ist. Also ist auch die v-Entwicklung von $\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)$ und folglich auch die von $\tau\left(u, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right) \overline{T}_n(\tau(u, \mathfrak{a}), j(\mathfrak{k}))$ vom Typus $\Omega(j(\mathfrak{k}))$. Durch Koeffizientenvergleich folgt jetzt, daß auch die v-Entwicklung von $\overline{Z}_{\mathfrak{n}}(\tau(u, \mathfrak{a}), \mathfrak{k})$ vom Typus $\Omega(j(\mathfrak{k}))$ ist.

Die ersten Koeffizienten dieser v-Entwicklung hängen aber mit den Koeffizienten von $\overline{Z}_{\mathfrak{n}}(t, \mathfrak{k})$ eineindeutig durch ein rekursives lineares Gleichungssystem zusammen, dessen Koeffizientenmatrix aus den Koeffizienten der v-Entwicklung von $\tau(u, \mathfrak{a})$ gebildet ist, also den Typus $\mathsf{P}(j(\mathfrak{k}))$ hat. Daher sind auch die Koeffizienten von $\overline{Z}_{\mathfrak{n}}(t, \mathfrak{k})$ vom Typus $\Omega(j(\mathfrak{k}))$.

Damit ist der Beweis des Satzes erbracht, bis auf den zurückgestellten Nachweis, daß $\frac{g^{(e)}(\mathfrak{a})}{g^{(e)}\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)}$ vom Typus $\Omega(j(\mathfrak{k}))$ ist.

e) Um diesen restlichen Nachweis zu erbringen, betrachten wir die Funktionen

$$g_{M_\nu}(w_1, w_2) = \frac{g^{(e)}(w_1, w_2)}{g^{(e)}(M_\nu(w_1, w_2))},$$

wo $n = \mathfrak{n}\mathfrak{m}$ das kleinste ganze positive Multiplum von $\mathfrak{n}$ ist und die M_ν ein Repräsentantensystem der $\psi(m)$ Transformationsklassen vom Grade $m = N(\mathfrak{m}) = N\left(\frac{n}{\mathfrak{n}}\right)$ bedeuten. Die zu untersuchende Größe ist dann der singuläre Wert

$$\frac{g^{(e)}(\mathfrak{a})}{g^{(e)}\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)} = \frac{g^{(e)}(\alpha_1, \alpha_2)}{g^{(e)}\left(\frac{1}{m} M(\alpha_1, \alpha_2)\right)} = g_M(\alpha_1, \alpha_2),$$

wo α_1, α_2 eine Basis von $\mathfrak{a}$ ist, und die Transformation $M(\alpha_1, \alpha_2)$ eine Basis von $\mathfrak{m}\mathfrak{a} = \frac{n}{\mathfrak{n}}\mathfrak{a}$ liefert. Nach Wahl von n ist $\mathfrak{m}$ in der Tat ein ganzes Ideal ohne ganzrationalen Teiler, also die Transformation M vom Grade $m = N(\mathfrak{m})$ ganzzahlig primitiv.

Analog zu S. 73 hat man nun Darstellungen

$$g_{M_\nu}(w_1, w_2) = \frac{G_m(j(M_\nu(w_1, w_2)), j(w_1, w_2))}{J'_m(j(M_\nu(w_1, w_2)), j(w_1, w_2))},$$

---

[11]) Oder auch durch direkte Ausrechnung, indem man die u-Entwicklung von $\wp(u, \mathfrak{w})$ aus der Partialbruchzerlegung herstellt und die Koeffizienten mittels der Differentialgleichung auf $g_2(\mathfrak{w})$ und $g_3(\mathfrak{w})$ zurückgeführt.

wo Zähler und Nenner Polynome in $j(M_\nu(w_1, w_2))$ und $j(w_1, w_2)$ mit ganzen rationalen Koeffizienten sind, insbesondere der Nenner die Ableitung der Invariantengleichung $J_m(t, j(w_1, w_2))$ nach t für $t = j(M_\nu(w_1, w_2))$.

Ist daher $j(M(\alpha_1, \alpha_2)) = j(\mathfrak{m}\mathfrak{a}) = j\left(\frac{n}{\mathfrak{n}}\mathfrak{a}\right) = j\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)$ keine Doppelwurzel von $J_m(t, j(\mathfrak{k}))$, so verschwindet der Nenner im oben angegebenen singulären Falle nicht, und jene Darstellung liefert die Behauptung über $g_M(\alpha_1, \alpha_2)$.

f) Im allgemeinen Falle, daß $j(M(\alpha_1, \alpha_2))$ genau r-fache Wurzel von $J_m(t, j(\mathfrak{k}))$ ist, muß die eben angegebene Schlußweise noch etwas ausgebaut werden. Es ist dann für genau r der Transformationsklassen, die durch $M_1', \ldots, M_r'$ repräsentiert seien, $j(M_\nu'(\alpha_1, \alpha_2)) = j(M(\alpha_1, \alpha_2))$. Dementsprechend bilden wir das Polynom

$$l(w_1, w_2) = \prod_{\nu=1}^{r}(a - j(M_\nu'(w_1, w_2)),$$

in a, bezeichnen ferner mit $l_\mu(w_1, w_2)$ $(\mu = 1, \ldots, s)$ die aus ihm durch Modulsubstitutionen entstehenden $s = \binom{\psi(m)}{r}$ formal verschiedenen Polynome und bestimmen die Zahl a rational so, daß nur eines der $l_\mu(\alpha_1, \alpha_2)$ gleich $l(\alpha_1, \alpha_2)$ wird. Das letztere ist deshalb möglich, weil nach Konstruktion nur eines der $l_\mu(\alpha_1, \alpha_2)$ als Polynom in a mit $l(\alpha_1, \alpha_2)$ identisch ist.

Mit diesen $l_\mu(w_1, w_2)$ haben wir im allgemeinen Falle an Stelle der im Spezialfalle benutzten $j(M_\nu(w_1, w_2))$ zu operieren.

Ganz analog wie in **1**, Sätze 7 und 9 beweist man für sie zunächst, daß das Analogon zur Invariantengleichung, nämlich

$$L(t, j(w_1, w_2)) = \prod_{\mu=1}^{s}(t - l_\mu(w_1, w_2))$$

ein Polynom in t und $j(w_1, w_2)$ mit ganzrationalen Koeffizienten ist.

Bezeichnet ferner $h(w_1, w_2)$ irgendein ganzrationalzahliges symmetrisches Polynom in den $g_{M_\nu'}(w_1, w_2)$ und $h_\mu(w_1, w_2)$ $(\mu = 1, \ldots, s)$ die s aus ihm durch Modulsubstitutionen entstehenden formal verschiedenen Funktionen, so vertauschen sich die $h_\mu(w_1, w_2)$ bei der Modulgruppe genau wie die $l_\mu(w_1, w_2)$, und man hat daher wieder Darstellungen

$$h_\mu(w_1, w_2) = \frac{K(l_\mu(w_1, w_2), j(w_1, w_2))}{L'(l_\mu(w_1, w_2), j(w_1, w_2))},$$

wo der Zähler sich mittels des q-Entwicklungsprinzips als Polynom in $l_\mu(w_1, w_2)$ und $j(w_1, w_2)$ mit ganzrationalen Koeffizienten erweist und der ebenso beschaffene Nenner die Ableitung nach t von $L(t, j(w_1, w_2))$ für $t = l_\mu(w_1, w_2)$ ist. Nach Konstruktion verschwindet dieser Nenner in unserem singulären Falle nicht, und jene Darstellung bleibt also sinnvoll. Weil $l(\alpha_1, \alpha_2) = (a - j(\mathfrak{k}))^r$ vom Typus $\mathsf{P}(j(\mathfrak{k}))$ist, liefert sie die Tatsache, daß auch $h(\alpha_1, \alpha_2)$ vom Typus $\mathsf{P}(j(\mathfrak{k}))$ ist.

Das wenden wir jetzt einerseits auf die elementarsymmetrischen Funktionen der $g_{M_\nu'}(\alpha_1, \alpha_2)$, andrerseits auf deren Potenzsummen an. So ergibt sich, daß einerseits das Polynom

$$G(t, j(\mathfrak{k})) = \prod_{\nu=1}^{r}(t - g_{M_\nu'}(\alpha_1, \alpha_2))$$

andrerseits die Zahlen

$$A_k(j(\mathfrak{k})) = \sum_{\nu=1}^{r} g_{M_\nu}(\alpha_1, \alpha_2)^k$$

vom Typus $\mathsf{P}(j(\mathfrak{k}))$ sind.

Wir können nun die Werte $g_{M'_\nu}(\alpha_1, \alpha_2)$ sämtlich durch den einen $g_M(\alpha_1, \alpha_2)$ ausdrücken. Aus $j(M'_\nu(\alpha_1, \alpha_2)) = j(M(\alpha_1, \alpha_2))$ folgt nämlich, daß

$$M'_\nu(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{\lambda_\nu} S_\nu M(\alpha_1, \alpha_2)$$

mit Modulsubstitutionen S_ν und Zahlen λ_ν aus Ω ist. Da die Multiplikation mit einer Einheit durch eine Modulsubstitution ersetzt werden könnte, können hierbei keine zwei der Zahlen λ_ν zueinander assoziiert sein. Setzen wir diese Darstellungen der $M'_\nu(\alpha_1, \alpha_2)$ in

$$g_{M'_\nu}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{g^{(e)}(\alpha_1, \alpha_2)}{g^{(e)}\left(\frac{1}{m} M'_\nu(\alpha_1, \alpha_2)\right)}$$

ein, so folgt aus der Homogeneität e-ter Dimension von $g(w)$, daß

$$g_{M'_\nu}(\alpha_1, \alpha_2) = \lambda_\nu^e g_M(\alpha_1, \alpha_2)$$

ist. Unsere Formeln für die Potenzsummen gehen damit über in

$$g_M(\alpha_1, \alpha_2)^k \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu^{ke} = A_k(j(\mathfrak{k})).$$

Verschwänden nun alle r Summen $\sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu^{ke} (k = 1, \ldots, r)$, so verschwände die Determinante $|\lambda_\nu^{ke}|$, also das Differenzenprodukt $\prod_{\nu_1<\nu_2} (\lambda_{\nu_1}^e - \lambda_{\nu_2}^e)$; das ist aber nicht der Fall, weil wie festgestellt keine zwei der λ_ν zueinander assoziiert sind. Also existiert ein $k \geqq 1$, für das $\sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu^{ke}$ nicht verschwindet.

Wir betrachten dann das Polynom

$$G_k(t, j(\mathfrak{k})) = t^k \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu^{ke} - A_k(j(\mathfrak{k}))$$

vom Typus $\Omega(j(\mathfrak{k}))$. Es besitzt die Wurzel $g_M(\alpha_1, \alpha_2)$. Dagegen ist keine weitere der Größen $g_{M'_\nu}(\alpha_1, \alpha_2) = \lambda_\nu^e g_M(\alpha_1, \alpha_2)$ Wurzel von $G_k(t, j(\mathfrak{k}))$; denn sonst wäre $\lambda_\nu^e = 1$, also gegen unsere Feststellung doch λ_ν zu dem zu M gehörigen Faktor $\lambda = 1$ assoziiert. Somit haben $G_k(t, j(\mathfrak{k}))$ und $G(t, j(\mathfrak{k}))$ nur die (für das letztere Polynom einfache) Wurzel $g_M(\alpha_1, \alpha_2)$ gemeinsam. Daher ist $g_M(\alpha_1, \alpha_2) = g_M(\mathfrak{a}) = \frac{g^{(e)}(\mathfrak{a})}{g^{(e)}\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{n}}\right)}$ nach dem auf S. 72 zitierten Weber-Perronschen Satz ebenfalls vom Typus $\Omega(j(\mathfrak{k}))$.

Das beendet den Beweis von Satz 15.

Wir können nunmehr leicht die zu Beginn dieses Paragraphen ausgesprochenen Behauptungen beweisen.

Satz 16. *Die zu einer absoluten Idealklasse* $\mathfrak{k}$ *von* Ω *gehörige Strahlklassengleichung*

$$T_\mathfrak{m}(t, \mathfrak{k}) = \prod_{\mathfrak{k}^* \text{ zu } \mathfrak{k}} (t - \tau(\mathfrak{k}^*))$$

ist ein Polynom $T_\mathfrak{m}(t, j(\mathfrak{k}))$ *vom Typus* $\Omega(j(\mathfrak{k}))$.

Beweis: Gemäß **1**, S. 130 ist

$$T_\mathfrak{m}(t, \mathfrak{k}) = \prod_{\substack{(\varrho) \bmod \mathfrak{a} \\ (\varrho) = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}} \\ (\mathfrak{r}, \mathfrak{m}) = 1}} (t - \tau(\varrho, \mathfrak{a})),$$

wo $\mathfrak{a}$ ein festes Ideal aus $\mathfrak{k}$ bedeutet.

Ist $e_\mathfrak{m}$ die Anzahl der mod. $\mathfrak{m}$ inkongruenten Einheiten aus Ω, so hat man ähnlich wie oben auf S. 79/80

$$T_{\mathfrak{m}}(t, \mathfrak{k})^{e_{\mathfrak{m}}} = \prod_{\substack{\varrho \bmod. \mathfrak{a} \\ (\varrho)=\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}} \\ (\mathfrak{r},\mathfrak{m})=1}} (t - \tau(\varrho, \mathfrak{a})),$$

wo das Produkt nunmehr über die verschiedenen Zahlen ϱ statt Hauptideale (ϱ) mit den angegebenen Bedingungen erstreckt ist.

Diese Polynome $T_{\mathfrak{m}}(t, \mathfrak{k})^{e_{\mathfrak{m}}}$ hängen nun mit den im Beweis zu Satz 15 auf S. 79 aufgetretenen Nennerpolynomen

$$N_{\mathfrak{m}}(t, \mathfrak{k}) = \prod'_{\substack{\varrho \bmod. \mathfrak{a} \\ (\varrho)=\frac{\mathfrak{g}\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}}}} (t - \tau(\varrho, \mathfrak{a}))$$

ähnlich wie oben auf S. 80 durch die Substitution

$$N_{\mathfrak{m}}(t, \mathfrak{k}) = \prod_{\substack{\mathfrak{m}_i \mid \mathfrak{m} \\ \mathfrak{m}_i \neq 1}} T_{\mathfrak{m}_i}(t, \mathfrak{k})^{e_{\mathfrak{m}_i}},$$

also mittels der Möbiusschen μ-Funktion umgekehrt

$$T_{\mathfrak{m}}(t, \mathfrak{k})^{e_{\mathfrak{m}}} = \prod_{\substack{\mathfrak{m}_i \mid \mathfrak{m} \\ \mathfrak{m}_i \neq 1}} N_{\mathfrak{m}_i}(t, \mathfrak{k})^{\mu\left(\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}_i}\right)},$$

zusammen.

Da nach Satz 15 der reduzierte Nenner $N_{\mathfrak{m}}(t, \mathfrak{k})$ der dort nachgewiesenen rationalen Funktionen $R_{\mathfrak{m}}(t, j(\mathfrak{k}))$ vom Typus $\Omega(j(\mathfrak{k}))$ ebenfalls von diesem Typus ist, so gilt somit dasselbe von $T_{\mathfrak{m}}(t, \mathfrak{k})^{e_{\mathfrak{m}}}$ und daher auch von $T_{\mathfrak{m}}(t, \mathfrak{k})$ selbst.

Aus Satz 16 ergibt sich ferner gemäß Satz 5 unmittelbar

Satz 17. *Die volle Strahlklassengleichung mod.* $\mathfrak{m}$ *von* Ω

$$T_{\mathfrak{m}}(t) = \prod_{\mathfrak{k}^*} (t - \tau(\mathfrak{k}^*)) = \prod_{\mathfrak{k}} T_{\mathfrak{m}}(t, j(\mathfrak{k}))$$

ist ein Polynom mit Koeffizienten aus Ω.

Wir beweisen schließlich analog zu Satz 6

Satz 18. *Die Strahlenklassengleichung mod.* $\mathfrak{m}$ *zu einer absoluten Idealklasse* $\mathfrak{k}$ *von* Ω *ist irreduzibel im absoluten Klassenkörper* K.

Beweis: Wir stützen uns auf die in **1**, Satz 23 für jede Strahlklasseninvariante $\tau(\mathfrak{k}^*)$ mod. $\mathfrak{m}$ von Ω bewiesene Kongruenz

$$\tau(\mathfrak{k}^*) \equiv \tau(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}}^* \mathfrak{k}^*) \mod.^* \mathfrak{p},$$

wo $\mathfrak{p}$ ein nicht in der Diskriminante d von Ω, nicht in $N(\mathfrak{m})$ und nicht in den Relativdiskriminanten $\mathfrak{d}_{\mathfrak{k}^*}$ der sämtlichen Körper $\Omega(\tau(\mathfrak{k}^*))$ in bezug auf Ω aufgehendes Primideal 1. Grades aus Ω und $p = N(\mathfrak{p})$ ist.

Es sei $\tau(\mathfrak{k}^*)$ irgendeine der zu $\mathfrak{k}$ gehörigen Strahlklasseninvarianten mod. $\mathfrak{m}$ von Ω, und $F(t, j(\mathfrak{k}))$ der zu $\tau(\mathfrak{k}^*)$ gehörige irreduzible Faktor von $T_{\mathfrak{m}}(t, j(\mathfrak{k}))$ in $\mathsf{K} = \Omega(j(\mathfrak{k}))$. Ferner sei $\tau(\mathfrak{k}_1^*)$ irgendeine weitere zu $\mathfrak{k}$ gehörige Strahlklasseninvariante mod. $\mathfrak{m}$ von Ω. Wir setzen dann $\mathfrak{k}_1^* = \mathfrak{k}_0^* \mathfrak{k}^*$, wo dann also $\mathfrak{k}_0^*$ eine in die absolute Hauptklasse fallende Strahlklasse mod. $\mathfrak{m}$ von Ω ist, und bestimmen in $\mathfrak{k}_0^*$ ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r$, das nur aus zu d, $N(\mathfrak{m})$ und den $\mathfrak{d}_{\mathfrak{k}^*}$ primen Primidealen 1. Grades $\mathfrak{p}_i$ von Ω zusammengesetzt ist, so daß also die obige Kongruenz für die $\mathfrak{p}_i$ anwendbar ist, und ebenso die analoge für $j(\mathfrak{k})$ aus **1**, Satz 11. Außerdem soll $\mathfrak{a}_0$ auch noch prim sein zur Diskriminante D der absoluten Klassengleichung $H(t)$ und den Diskriminanten $\Delta_{\mathfrak{m}}^{(\mathfrak{k})}$ der sämtlichen Strahlklassengleichungen $T_{\mathfrak{m}}(t, j(\mathfrak{k}))$, wo $\mathfrak{k}$ alle absoluten Idealklassen von Ω durchläuft — die letzteren sind nach **1**, Satz 20 von Null verschieden.

Ein solches Ideal $\mathfrak{a}_0 = (\alpha_0)$ gibt es sicher in $\mathfrak{k}_0^*$. Sei nämlich g ein ganzes positives Multiplum von d, $\mathfrak{m}$, den $\mathfrak{d}_{\mathfrak{k}^*}$, D und den $\Delta_{\mathfrak{m}}^{(\mathfrak{k})}$. Wir wählen dann zunächst ein zu g primes Ideal (α_0') in $\mathfrak{k}_0^*$. Ist

$$\alpha_0' = a_1'\omega_1 + a_2'\omega_2$$

die Darstellung von α_0' durch eine Basis ω_1, ω_2 der ganzen Zahlen von Ω, so bestimmen wir

$$\alpha_0 = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$$

so, daß

$$a_1 \equiv a_1' \bmod g, \quad a_2 \equiv a_2' \bmod g\,, \qquad (a_1, a_2) = 1$$

ist; das ist möglich, weil nach Wahl von α_0' der größte gemeinsame Teiler $(a_1', a_2', g) = 1$ ist. Es ist dann auch (α_0) ein zu g primes Ideal aus $\mathfrak{k}_0^*$, und (α_0) ist zudem nur aus Primidealen 1. Grades von Ω zusammengesetzt, denn es enthält nach Konstruktion keinen ganzrationalen Teiler. Somit erfüllt also $\mathfrak{a}_0 = (\alpha_0)$ alle gestellten Bedingungen.

Weil nun $\mathfrak{p}_1$ prim zu $N(\mathfrak{m})$ ist, hat gemäß **1**, Satz 22 $T_\mathfrak{m}(t, j(\mathfrak{k}))$ und mithin auch $F(t, j(\mathfrak{k}))$ als Polynom in t für $\mathfrak{p}_1$ ganze Koeffizienten aus $\mathsf{K} = \Omega(j(\mathfrak{k}))$, und weil weiter $\mathfrak{p}_1$ prim zu D ist, haben deren Polynomdarstellungen durch $j(\mathfrak{k})$ für $\mathfrak{p}_1$ ganze Koeffizienten aus Ω. Weil $\mathfrak{p}_1$ vom 1. Grade ist, folgt also aus

$$F(\tau(\mathfrak{k}^*),\ j(\mathfrak{k})) = 0$$

durch Potenzierung mit $p_1 = N(\mathfrak{p}_1)$ in bekannter Weise zunächst

$$F(\tau(\mathfrak{k}^*)^{p_1},\ \ j(\mathfrak{k})^{p_1}) \equiv 0 \bmod^* \mathfrak{p}_1\,.$$

Wendet man dann die obige Kongruenz und ihr schon im ersten Abschnitt beim analogen Beweis benutztes Analogon für $j(\mathfrak{k})$ an, ergibt sich ferner

$$F(\tau(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_1}^*\,\mathfrak{k}^*),\ \ j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_1}^{-1}\,\mathfrak{k})) \equiv 0 \bmod^* \mathfrak{p}_1\,.$$

Weil schließlich p_1 prim zu den $\Delta_\mathfrak{m}^{(\mathfrak{k})}$, also insbesondere zu $\Delta_\mathfrak{m}^{(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_1}^{-1}\mathfrak{k})}$ gewählt ist, so hat die letztere Kongruenz

$$F(\tau(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_1}^*\,\mathfrak{k}^*),\ \ j(\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_1}^{-1}\,\mathfrak{k})) = 0$$

zur Folge.

So mit $\mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ fortfahrend ergibt sich unter Beachtung von

$$\mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_1}^* \cdots \mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_r}^* = \mathfrak{k}_{\mathfrak{a}_0}^* = \mathfrak{k}_0^*,\ \ \mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_1} \cdots \mathfrak{k}_{\mathfrak{p}_r} = \mathfrak{k}_{\mathfrak{a}_0} = 1$$

schließlich

$$F(\tau(\mathfrak{k}_0^*\,\mathfrak{k}^*),\ j(\mathfrak{k})) = 0\,,$$

d. h. nach Wahl von $\mathfrak{k}_0^*$

$$F(\tau(\mathfrak{k}_1^*),\ j(\mathfrak{k})) = 0\,.$$

Das besagt aber die Irreduzibilität von $T_\mathfrak{m}(t, j(\mathfrak{k}))$ in K.

Es liegt gemäß Satz 17 nahe zu vermuten, daß die volle Strahlklassengleichung $T_\mathfrak{m}(t)$ in Ω irreduzibel ist. Das würde sich nach demselben Schema wie die Irreduzibilität der Strahlklassengleichungen $T_\mathfrak{m}(t, j(\mathfrak{k}))$ in K beweisen lassen, wenn nur feststände, daß die Diskriminante Δ von $T_\mathfrak{m}(t)$ nicht Null ist, oder also, daß die sämtlichen Strahlklasseninvarianten $\tau(\mathfrak{k}^*)$ mod. $\mathfrak{m}$ (nicht nur die zu einer festen absoluten Idealklasse $\mathfrak{k}$ gehörigen) voneinander verschieden sind. Da die $T_\mathfrak{m}(t, j(\mathfrak{k}))$ zueinander konjugierte irreduzible Polynome in K sind, käme das weiter darauf hinaus, daß diese Polynome untereinander verschieden sind. Diese Frage ist indessen noch ungelöst.

§ 2. Die Galoissche Gruppe des Strahlklassenkörpers mod. $\mathfrak{m}$ zu Ω.

Die in den Sätzen 16, 18 enthaltenen Hauptresultate von § 1 besagen, daß die den Strahlklasseninvarianten $\tau(\mathfrak{k}^*)$ mod. $\mathfrak{m}$ zu einer festen absoluten Idealklasse $\mathfrak{k}$ von Ω

zugeordneten Körper $\mathsf{K}(\tau(\mathfrak{k}^*)) = \Omega(\tau(\mathfrak{k}^*), j(\mathfrak{k}))$ ein volles System zueinander in bezug auf K konjugierter sind. Wir wollen jetzt zeigen, daß diese Körper alle identisch sind, daß also die Strahlklassengleichung $T_{\mathfrak{m}}(t, j(\mathfrak{k}))$ Galoissch in bezug auf K ist.

Wir beweisen dazu in Analogie zu Satz 10

Satz 19. *Zu jeder Strahlklasse* $\mathfrak{k}_0^*$ *mod.* $\mathfrak{m}$ *von* Ω *existiert ein nur von* $\mathfrak{k}_0^*$ *abhängiges Polynom* $R_{\mathfrak{k}_0^*}(t, j(\mathfrak{k}))$ *vom Typus* $\Omega(j(\mathfrak{k}))$ *derart, daß für jede Strahlklasse* $\mathfrak{k}^*$ *mod.* $\mathfrak{m}$ *von* Ω *mit zugehöriger absoluter Idealklasse* $\mathfrak{k}$ *gilt*

$$\tau(\mathfrak{k}_0^* \mathfrak{k}^*) = R_{\mathfrak{k}_0^*}(\tau(\mathfrak{k}^*), j(\mathfrak{k})).$$

Beweis: Während wir den analogen Beweis im ersten Abschnitt aus der Theorie der Transformation vom Primzahlgrade p schöpften und die Multiplikation mit zusammengesetzten Idealen $\mathfrak{a}_0$ auf die mit Primidealen $\mathfrak{p}$ zurückführten, sind wir hier in der Lage, gleich die Multiplikation mit zusammengesetzten Idealen $\mathfrak{a}_0$ zur Ausführung zu bringen, weil nämlich das in Satz 15 bewiesene verallgemeinerte Prinzip der komplexen Multiplikation sich nicht nur auf den Primidealfall $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}$ sondern auf den allgemeinen Fall eines zusammengesetzten $\mathfrak{n}$ erstreckt.

Ist im Sinne von **1**, S. 130

$$\tau(\mathfrak{k}^*) = \tau\left(\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}}, \mathfrak{a}\right)$$

und ist $\mathfrak{a}_0$ ein ganzes Ideal aus $\mathfrak{k}_0^*$, so ist im selben Sinne

$$\tau(\mathfrak{k}_0^* \mathfrak{k}^*) = \tau\left(\frac{\mathfrak{a}_0 \mathfrak{r} \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}_0}}{\mathfrak{m}}, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}_0}\right) = \tau\left(\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}}, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}_0}\right).$$

$\tau(\mathfrak{k}_0^* \mathfrak{k}^*)$ und $\tau(\mathfrak{k}^*)$ hängen also gerade durch die verallgemeinerte komplexe Multiplikation zusammen. Man hat daher gemäß Satz 15

$$\tau(\mathfrak{k}_0^* \mathfrak{k}^*) = R_{\mathfrak{a}_0}(\tau(\mathfrak{k}^*), j(\mathfrak{k})).$$

Indem man für jede Strahlklasse $\mathfrak{k}_0^*$ mod. $\mathfrak{m}$ aus Ω einen Repräsentanten $\mathfrak{a}_0$ auswählt und die Nenner der rationalen Funktionen $R_{\mathfrak{a}_0}(\tau(\mathfrak{k}^*), j(\mathfrak{k}))$ mittels der nach Satz 18 irreduziblen Gleichung $T_{\mathfrak{m}}(\tau(\mathfrak{k}^*), j(\mathfrak{k})) = 0$ beseitigt, erhält man Polynome $R_{\mathfrak{k}_0^*}(t, j(\mathfrak{k}))$ der im Satz angegebenen Art.

Die Existenz der $R_{\mathfrak{k}_0^*}(t, j(\mathfrak{k}))$ in Satz 19 zunächst besagt nun

Satz 20. *Die volle Strahlklassengleichung* $T_{\mathfrak{m}}(t)$ *ist Galoissch in bezug auf* K.

Der Körper $\mathsf{K}_{\mathfrak{m}} = \mathsf{K}(\tau(\mathfrak{k}^*)) = \Omega(\tau(\mathfrak{k}^*), j(\mathfrak{k}))$ *ist also von der Wahl der Klasse* $\mathfrak{k}^*$ *unabhängig und Galoissch in bezug auf* Ω.

Das letztere folgt daraus, daß nach Satz 17 $T_{\mathfrak{m}}(t)$ Koeffizienten aus Ω hat, und K nach Satz 11 Galoissch in bezug auf Ω ist.

Die Unabhängigkeit der $R_{\mathfrak{k}_0^*}(t, j(\mathfrak{k}))$ in Satz 19 von $\mathfrak{k}_0^*$ ferner besagt, wie man leicht sieht,

Satz 21. *Der Körper* $\mathsf{K}_{\mathfrak{m}}$ *ist Abelsch in bezug auf* Ω, *und seine Relativgruppe ist isomorph zur Gruppe der Strahlklassen mod.* $\mathfrak{m}$ *in* Ω, *indem jeder Strahlklasse* $\mathfrak{k}_0^*$ *mod.* $\mathfrak{m}$ *von* Ω *mit sie enthaltender absoluter Idealklasse* $\mathfrak{k}_0$ *die Substitution*

$$\sigma_{\mathfrak{k}_0^*} = (\tau(\mathfrak{k}^*) \to \tau(\mathfrak{k}_0^* \mathfrak{k}), \quad j(\mathfrak{k}) \to j(\mathfrak{k}_0^{-1} \mathfrak{k})),$$

wo $\mathfrak{k}^*$ *alle Strahlklassen mod.* $\mathfrak{m}$ *von* Ω *durchläuft, zugeordnet wird.*

Insbesondere folgt noch

Zusatz. *Die Relativgruppe von* $\mathsf{K}_{\mathfrak{m}}$ *in bezug auf* K *ist isomorph zur Gruppe der in der absoluten Hauptklasse von* Ω *enthaltenen Strahlklassen mod.* $\mathfrak{m}$, *indem jeder solchen Strahlklasse* $\mathfrak{k}_0^*$ *die Substitution*

$$\sigma_{\mathfrak{k}_0^*} = (\tau(\mathfrak{k}^*) \to \tau(\mathfrak{k}_0^* \mathfrak{k}^*)),$$

wo $\mathfrak{k}^*$ *alle Strahlklassen mod.* $\mathfrak{m}$ *von* Ω *durchläuft, zugeordnet wird.*

Man kann fragen, ob der Körper $\mathsf{K}_\mathfrak{m} = \Omega(\tau(\mathfrak{k}^*), j(\mathfrak{k}))$ schon durch alleinige Adjunktion einer Strahlklasseninvariante $\tau(\mathfrak{k}^*)$ zu Ω, ohne gleichzeitige Adjunktion einer absoluten Klasseninvariante $j(\mathfrak{k})$, gewonnen werden kann. Ersichtlich kommt auch diese Frage auf die Irreduzibilität der von $\tau(\mathfrak{k}^*)$ befriedigten vollen Strahlklassengleichung $T_\mathfrak{m}(t)$ über Ω hinaus, also auf die am Schluß des vorigen Paragraphen als noch ungelöst bezeichneten Fragen.

§ 3. Das Zerlegungsgesetz für die Primideale von Ω im Strahlenklassenkörper mod. $\mathfrak{m}$ zu Ω.

In **1**, Satz 24 wurde das Zerlegungsgesetz für die Primideale 1. Grades aus Ω im Körper K_m mit einer endlichen Anzahl von Ausnahmen hergeleitet. Was diese Ausnahmen betrifft, so sind von den dort gestellten Forderungen 1—7 durch die im vorstehenden gewonnen Resultate einige als von den andern bedingt erkannt. So wurde schon im ersten Abschnitt am Schluß von § 1 festgestellt, daß die Forderungen 3 und 5 dasselbe besagen. Analog folgt aus Satz 18 in § 1 des zweiten Abschnitts, daß die Forderungen 4 und 6 dasselbe besagen. Schließlich zieht Satz 20 in § 2 nach sich, daß die Forderung 7 eine Folge aus den Forderungen 3 und 4 ist.

Zusammenfassend haben wir damit jetzt folgende einfachere Formulierung für **1**, Satz 24:

Satz 22. *Ist* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal* 1. *Grades von* Ω, *das prim ist zu*

1. *der Diskriminante* d *von* Ω,
2. $N(\mathfrak{m})$,
3. *der Diskriminante* D *der absoluten Klassengleichung von* Ω,
4. *den Diskriminanten* $\Delta_\mathfrak{m}^{(\mathfrak{k})}$ *der Strahlklassengleichungen*

$$T_\mathfrak{m}(t, j(\mathfrak{k})) \text{ mod. } \mathfrak{m} \text{ von } \Omega\ ^{12}),$$

so zerfällt $\mathfrak{p}$ *in* $\mathsf{K}_\mathfrak{m}$ *in Primideale* f*-ten Relativgrades, wenn* f *die Ordnung der Strahlklasse* $\mathfrak{k}_\mathfrak{p}$ *mod.* $\mathfrak{m}$ *von* $\mathfrak{p}$ *ist.*

Wieder besagt darüber hinaus die in **1**, Satz 23 bewiesene grundlegende Kongruenz auf Grund von Satz 21 die Gültigkeit des *Artinschen Reziprozitätsgesetzes für die zu* d, $N(\mathfrak{m})$, D *und den* $\Delta_\mathfrak{m}^{(\mathfrak{k})}$ *primen Primideale* 1. *Grades* $\mathfrak{p}$ *aus* Ω.

Damit ist für den Körper $\mathsf{K}_\mathfrak{m}$ ein umfassender Teil derjenigen Tatsachen festgestellt, die die allgemeine Klassenkörpertheorie für den Strahlklassenkörper mod. $\mathfrak{m}$ zu Ω aussagt.

Es fehlen lediglich noch die Tatsachen:

1. daß das in Satz 22 ausgesprochene Zerlegungsgesetz auch für die Primideale zweiten Grades mit den entsprechenden endlich vielen Ausnahmen gilt,

2. daß die Relativdiskriminante von $\mathsf{K}_\mathfrak{m}$ in bezug auf K nur Primteiler von $\mathfrak{m}$ enthält,

3. daß die nicht in $\mathfrak{m}$ aufgehenden bisher ausgenommenen Primideale von Ω sich dem Zerlegungsgesetz von Satz 22 fügen,

4. das Zerlegungsgesetz für die Primteiler von $\mathfrak{m}$.

---

[12]) Natürlich genügt es, das für e i n e der in bezug auf Ω konjugierten $\Delta_\mathfrak{m}^{(\mathfrak{k})}$ zu fordern.

Während Punkt 1 sich in der Fueterschen Theorie, die mit Funktionen 2. Stufe arbeitet, erledigen läßt, habe ich bedauerlicherweise bisher keinen Beweis dafür finden können, der mit den in meine Theorie allein eingehenden Funktionen 1. Stufe auskommt. Wenn ein entsprechender Beweis im Falle des absoluten Klassenkörpers K im ersten Abschnitt, Satz 13, gelingt, so ist dafür der besondere Umstand verantwortlich, daß die Primideale 2. Grades $p = \mathfrak{p}$ aus Ω alle in der absoluten Hauptklasse liegen, also $f = 1$ haben.

Auch die Punkte 2 und 4 lassen sich in der Fueterschen Theorie erledigen. Ich hoffe das demnächst in meiner Theorie nachholen zu können.

Dagegen ist ein Beweis für Punkt 3 ohne Verwendung transzendenter Hilfsmittel (Dirichletscher Reihen etc.) auch hier, entsprechend wie im ersten Abschnitt, bisher nicht bekannt.

Eingegangen 1. Januar 1931.

Bemerkungen zum dreizehnten Hilbertschen Problem.

Von *Ludwig Bieberbach* in Berlin.

Im Jahre 1900 hat Hilbert 23 Probleme gestellt [1]). Sie sind in den letzten 30 Jahren fast alle gelöst worden [2]).

Am dreizehnten dieser Probleme aber ist man allgemein achtlos vorübergegangen. Zweck der nachstehenden Zeilen ist es, zu zeigen, daß dies nicht an der Unzugänglichkeit dieser Fragestellungen liegt, daß man vielmehr mit relativ leichter Mühe diesem Problem einiges abgewinnen kann.

Das Problem bezieht sich auf die Darstellung von Funktionen von drei Variablen durch Ineinanderschieben von Funktionen von zwei Variablen. Sind x_1, x_2, x_3 drei Variablen, so sind $f(x_1, x_2)$, $g(x_2, x_3)$, $h(x_3, x_1)$ Funktionen von zwei Variablen. Sind $a, b, c, A, B, C, \ldots$ weitere Funktionen von zwei Variablen, so sind z. B. $a(f, g)$, $b(g, h)$, $c(h, f)$, $A(a, b)$, $B(b, c)$, $C(A, B)$, ... Funktionen von drei Variablen. Funktionen, die man durch Verwendung endlich vieler Funktionen von zwei Variablen darstellen kann, werden, wie wir sagen wollen, durch Ineinanderschachtelung von Funktionen von zwei Variablen gewonnen. Hilbert stellt in seinem Vortrag die Aufgabe, zu beweisen, daß eine bestimmte von ihm namhaft gemachte Funktion so nicht gewonnen werden kann. Er bemerkt weiter, er habe sich durch strenge Überlegung davon überzeugt, daß es analytische Funktionen von drei Variablen gibt, die nicht „durch endlich-malige Verkettung von Funktionen von nur zwei Argumenten erhalten werden können". Hilberts Angabe muß man zunächst richtig dahin verstehen, daß auch die benutzten Funktionen von zwei Argumenten analytisch sein sollen. Hilbert hat in der Tat gelegentlich in Vorlesungen bewiesen, daß es ganze Funktionen von drei Variablen gibt, die sich nicht durch Ineinanderschachtelung von analytischen Funktionen von zwei Variablen darstellen lassen. Wollte man die Hilbertsche Behauptung so wörtlich nehmen, wie sie in seinem Vortrag steht, so wäre sie nicht einmal richtig. In der Tat hat Hilbert selbst in Vorlesungen bemerkt, daß man jede Funktion von drei Variablen durch Ineinanderschieben von Funktionen von zwei Variablen gewinnen kann, wenn man den Funktionsbegriff im Dirichletschen Sinne meint. Hernach werde ich zeigen, daß es stetige Funktionen von drei Variablen gibt, die man nicht durch Ineinanderschieben von stetigen Funktionen von zwei Variablen gewinnen kann. Die Beschränkungen also, die man dem Funktionsbegriff auferlegt, sind es, die dem Problem Gehalt geben.

1.

Jede Funktion von drei Variablen läßt sich durch Ineinanderschachtelung von Funktionen von zwei Variablen darstellen.

[1]) Der Hilbertsche Vortrag ist nicht nur in den Comptes rendus des Pariser internationalen Mathematikerkongresses enthalten, sondern auch Göttinger Nachrichten 1900 und im Archiv für Mathematik und Physik wieder abgedruckt worden.

[2]) In „Die Naturwissenschaften" 1930, Heft 51, habe ich einen Überblick darüber gegeben.

Es sei z. B. $f(x_1, x_2, x_3)$ in dem Würfel $0 \leqq x_i \leqq 1$ erklärt. Man denke sich $0 \leqq x_2 \leqq 1$, $0 \leqq x_3 \leqq 1$ umkehrbar eindeutig auf die Strecke $0 \leqq y \leqq 1$ abgebildet und setze $x_1 = x$. Dann ist der Würfel umkehrbar eindeutig auf das Quadrat $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ abgebildet. Es sei $x_1 = x$, $x_2 = \alpha(y)$, $x_3 = \beta(y)$ die Abbildung. Dann wird

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x, \alpha(y), \beta(y)) = F(x, y).$$

Weiter ist die Abbildung auch so darstellbar:

$$x = x_1, \; y = \varphi(x_2, x_3).$$

Also ist

$$f(x_1, x_2, x_3) = F(x_1, \varphi(x_2, x_3)).$$

Also ist jede Funktion von drei Variablen mit Hilfe von zwei Funktionen von zwei Variablen darstellbar. Dabei kommen aber sicher unstetige Funktionen vor.

2.

Nicht jede stetige Funktion von drei Variablen läßt sich durch Ineinanderschieben von stetigen Funktionen von drei Variablen darstellen.

Der Beweis beruht darauf, daß sich jede stetige Funktion von zwei Variablen durch Polynome von zwei Variablen gleichmäßig approximieren läßt.

Darstellbar nenne ich eine Funktion, wenn sie sich durch Ineinanderschieben von endlich vielen stetigen Funktionen von zwei Variablen darstellen läßt.

n-darstellbar nenne ich eine Funktion, wenn sie sich durch Ineinanderschieben von höchstens n stetigen Funktionen von zwei Variablen darstellen läßt. Jede darstellbare Funktion ist also für passendes n auch n-darstellbar.

n-rational oder *n-Polynom* nenne ich ein Polynom, das durch Ineinanderschieben von höchstens n Polynomen von zwei Variablen darstellbar ist.

n-approximierbar heißt eine Funktion, wenn sie in einem gegebenen Bereich durch n-rationale Funktionen gleichmäßig approximiert werden kann.

Jede n-darstellbare Funktion ist n-approximierbar. Dies ergibt sich aus dem Weierstraßschen Satz, wonach eine jede in einem abgeschlossenen Bereiche stetige Funktion von zwei Variablen durch Polynome von zwei Variablen gleichmäßig approximiert werden kann. Dies ist wohl ohne weiteres klar, wenn die von uns herangezogenen Funktionen von zwei Variablen für alle Werte dieser beiden Variablen stetig erklärt sind. Durch den zu beweisenden Satz wird aber nur verlangt, daß die betreffenden Funktionen auf gewissen abgeschlossenen Punktmengen stetig sind, die durch den Wertevorrat der einzusetzenden Funktionen bestimmt sind. Als Wertegebiet der drei Variablen x_1, x_2, x_3, um deren stetige Funktionen es sich handelt, legen wir dabei einen abgeschlossenen Bereich B zugrunde. Der Tietzesche Erweiterungssatz [1]) lehrt aber, daß jede auf einer abgeschlossenen Menge stetige Funktion zu einer anderen ergänzt werden kann, die in der ganzen Ebene stetig ist, und die auf der abgeschlossenen Menge mit der gegebenen übereinstimmt.

Jede nicht n-approximierbare Funktion besitzt eine Umgebung von nicht n-approximierbaren Funktionen.

$f(x_1, x_2, x_3)$ sei nicht n-approximierbar. f_i sei eine Folge n-approximierbarer Funktionen. Es sei in B

---

[1]) H. Tietze, Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind. Crelles Journal Bd. **145** (1915), S. 9—23. Vgl. auch F. Hausdorff, Über halbstetige Funktionen und deren Verallgemeinerung. Math. Ztschr. Bd. **5** (1919), S. 292—309. — Zusatz bei der Korrektur: Soeben veröffentlicht Herr stud. math. Rado-Berlin einen Beweis, der eine explizite Darstellung der Erweiterungsfunktion in wenigen Zeilen begründet.

$$|f - f_i| < \frac{\varepsilon_i}{2}, \quad \varepsilon_i > 0, \quad \varepsilon_i \to 0, \quad i \to \infty .$$

g_i sei eine Folge n-rationaler Funktionen. Es sei $|f_i - g_i| < \frac{\varepsilon_i}{2}$ in B. Dann ist $|f - g_i| < \varepsilon_i$ in B. Ginge dies alles, so wäre f n-approximierbar. Daher gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß kein F aus $|f - F| < \varepsilon$ n-approximierbar ist.

Es gibt für jedes k nicht-k-Polynome. Ist $f(x_1, x_2, x_3)$ k-rational, so ist auch $f(x_1, x_2, x_3) - f(0, 0, 0)$ k-rational. Sei also $f(0, 0, 0) = 0$ und $f(x_1, x_2, x_3) = \varphi(f_1, f_2)$, wo f_1 und f_2 k-1-rational sind. Es ist

$$\begin{aligned}\varphi(f_1, f_2) &= \varphi\{f_1(0, 0, 0) + f_1'(x_1, x_2, x_3), \quad f_2(0, 0, 0) + f_2'(x_1, x_2, x_3)\} \\ &= \Phi(f_1', f_2'), \quad \Phi(0, 0) = 0.\end{aligned}$$

Hier sind f_1' und f_2' neue k-1-Polynome mit $f_1'(0, 0, 0) = 0$ und $f_2'(0, 0, 0) = 0$. Also darf man annehmen, daß alle für die Darstellung des k-Polynoms $f(x_1, x_2, x_3)$ benutzten Polynome im Ursprung verschwinden. Um dann diejenigen Glieder von $f(x_1, x_2, x_3)$ zu bekommen, die in jeder der Variablen bis zur ν-ten Ordnung höchstens ansteigen, benötigt man nur die Glieder bis zur ν-ten Ordnung in jeder Variablen bei den Polynomen von zwei Veränderlichen, die bei der Darstellung Verwendung finden. Deren sind höchstens k benutzt. Jedes liefert höchstens ν^2 Koeffizienten. $f(x_1, x_2, x_3)$ aber hat in den angegebenen Gliedern ν^3 Koeffizienten. Da aber $\nu^3 > k\nu^2$ für $\nu > k$, so ist es nicht möglich die k verwendeten Polynome von zwei Variablen so zu bestimmen, daß jedes Polynom von drei Variablen einmal herauskommt.

Bei jedem k übertreffenden Grad gibt es also nicht-k-Polynome. Die Koeffizienten der k-Polynome, deren Grad k übersteigt, müssen gewissen algebraischen Bedingungsgleichungen genügen. Darunter gibt es solche, die vom Grad unabhängig sind.

Für jedes k gibt es Polynome von drei Variablen, die nicht k-approximierbar sind.

Man wähle ein Polynom $(k+1)$-ten Grades, das kein k-Polynom ist, dessen Koeffizienten also einer der vom Grad unabhängigen Bedingungsgleichungen nicht genügen. Dies Polynom sei $f(x_1, x_2, x_3)$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß die Koeffizienten keines Polynomes F, für das $|f - F| < \varepsilon$ ist, der betreffenden Bedingungsgleichung genügen. Denn aus $|f - F| < \varepsilon$ folgen für die Koeffizientendifferenzen von f und F Abschätzungen, deren Schranken mit ε gegen Null gehen. (Die Bedingungsgleichungen beziehen sich auf die Koeffizienten der Glieder höchstens $(k+1)$-ter Ordnung.) Also gibt es eine Umgebung von f, die kein k-Polynom enthält. Also ist f auch nicht k-approximierbar.

In jeder Umgebung jeder stetigen Funktion $g(x_1, x_2, x_3)$ gibt es für jedes n stetige Funktionen, die nicht n-approximierbar sind.

Ist g nicht n-approximierbar, so ist die Behauptung trivial. Ist aber g selber n-approximierbar, so sei $f(x_1, x_2, x_3)$ eine nicht $2n$-approximierbare Funktion. Dann ist für jedes t auch tf nicht $2n$-approximierbar. Dann ist

$$h = g + tf$$

nicht n-approximierbar. Denn sonst wäre $tf = h - g$ doch $2n$-approximierbar. Man kann f als Polynom wählen. Ist also g ein Polynom, so ist auch h ein Polynom.

Es gibt nichtdarstellbare stetige Funktionen von drei Variablen. $f_1(x_1, x_2, x_3)$ sei nicht n_1-approximierbar und $\varepsilon_1 > 0$ so gewählt, daß kein F, für das $|f_1 - F| < \varepsilon_1$ in B ist, n_1-approximierbar ist. Aus dieser Umgebung werde f_2 so gewählt, daß es für ein $n_2 > n_1$ nicht n_2-approximierbar ist. ε_2 sei so gewählt, daß kein F aus $|f_2 - F| < \varepsilon_2$ n_2-approximierbar ist, usw. Es ist $n_i \to \infty$ und es sei $\varepsilon_i \to 0$. Dann konvergieren die $f_i(x_1, x_2, x_3)$ in B gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f(x_1, x_2, x_3)$, die für kein n mehr n-approxi-

mierbar ist. Diese Funktion ist daher auch für kein n mehr n-darstellbar. Sie ist also überhaupt nicht darstellbar. Im vorstehenden Beweis können alle f_i als Polynome gewählt werden.

3.

Nicht jede analytische Funktion von drei reellen Variablen ist durch Ineinanderschieben von stetigen Funktionen von zwei Variablen darstellbar.

Um das einzusehen, hat man nur dafür zu sorgen, daß die im letzten Teile des eben zu Ende geführten Beweises konstruierten Polynome in einem festen Bereiche der drei komplexen Variablen gleichmäßig konvergieren. Dazu beziehe man die dort benutzten Abschätzungen $|f_i - F| < \varepsilon_i$ stets auf diesen fest gewählten Bereich, dem der sonst benutzte Bereich B der reellen Variablen als Teil angehört. Dann sind die f_i in diesem Bereiche gleichmäßig konvergent. Die Grenzfunktion ist dann nicht darstellbar. Sie ist aber auch zugleich analytisch. Durch geringe Modifikation der Konstruktion kann man sogar erreichen, daß die Grenzfunktion eine ganze Funktion ist.

4.

Die hier gegebene Methode läßt sich auf mancherlei andere Probleme anwenden. Ostrowski hat Math. Ztschr. Bd. **8** (1920) gezeigt, daß die Funktion

$$\zeta(u, v) = \sum_{n=1,2\ldots} \frac{u^n}{n^v}$$

sich nicht durch Verwendung endlich vieler analytischer Funktionen einer Variablen und beliebige algebraische Prozesse in endlicher Zahl darstellen läßt. Hilbert hat kürzlich (Math. Ann. **97** (1927)) auf diese Fragen wieder hingewiesen und namentlich das Problem gestellt zu untersuchen, inwieweit sich Funktionen von zwei Variablen durch Verwendung von endlich vielen Funktionen einer Variablen und durch endlich oftmalige Verwendung des Summenprozesses darstellen lassen. Auch hier hängt die Antwort durchaus von dem benutzten Funktionsbegriff ab. Denkt man an analytische Funktionen, so enthält das erwähnte Ergebnis von Ostrowski die Antwort. Denkt man an stetige Funktionen, so erlaubt die Methode dieser Arbeit, die Antwort zu geben. Nimmt man endlich den Funktionsbegriff im Dirichletschen Sinne, so *läßt sich zeigen, daß jede Funktion von zwei Variablen durch endlich viele Funktionen von einer Variablen und endlich oftmalige Verwendung des Summenprozesses darstellbar ist.* Vielleicht bietet sich ein andermal Gelegenheit auf diese nicht ganz triviale Bemerkung etwas näher einzugehen.

Eingegangen 5. Januar 1931.

Über das systematische Verhalten der Katalogörter der Sterne der 7. bis 9. Größe.

Von *A. Kopff* in Berlin-Dahlem.

Die Wiederholung der Kataloge der Astronomischen Gesellschaft (AG), die gegenwärtig in Durchführung begriffen ist, gibt Anlaß die Frage aufzuwerfen, wie weit durch eine Verbindung der neuen mit den alten Sternpositionen eine gesicherte Eigenbewegung (EB) der Sterne zwischen der 7. und 9. Größe herzuleiten wäre. Man wird die EB dieser Sterne in möglichster Genauigkeit kennen müssen, wenn man auf photographischem Weg die EB noch schwächerer Sterne, wenn auch nur für ausgewählte Gebiete, wird bestimmen wollen. Die Sicherheit der EB hängt nun davon ab, wie genau wir die systematischen Fehler der Katalogörter der schwächeren Sterne, besonders auch bei den älteren Katalogen herzuleiten vermögen. Einen willkommenen Anlaß, dieser Frage nach den systematischen Fehlern der schwächeren Sterne näher zu treten, bot die am Astronomischen Recheninstitut durchgeführte Bearbeitung eines *Generalkatalogs von Anhaltsternen* (erster Ordnung) *für die Erosbeobachtungen* während der Opposition 1930/31. Es bestand hier die Aufgabe, aus einer Reihe nahezu gleichzeitig ausgeführter moderner Beobachtungsreihen die Örter und ferner aus einer Verbindung dieser mit älteren Beobachtungen wenigstens genähert die EB in einem gemeinsamen System herzuleiten.

Für die erste Aufgabe, die Herleitung der Mittelwerte der Örter, liegen die Verhältnisse hier noch verhältnismäßig einfach. Durch die neuerdings bei den Beobachtungen am Meridiankreis fast allgemein angewendeten Hilfsmittel der Gitter und des Reversionsprismas, oder beider gleichzeitig, ist es möglich, schwächere Sterne mit erheblicher Sicherheit an bestehende Fundamentalsysteme anzuschließen. Für die älteren Kataloge dagegen ist es heute kaum möglich das System, auf das sich die schwächeren Sterne beziehen, mit aller Schärfe anzugeben. Die Katalogbeziehungen, die hier z. B. von Auwers und Boss hergeleitet sind, beruhen auf der Diskussion der helleren Sterne und können für die schwachen Sterne auf große Genauigkeit keinen Anspruch erheben. Nur in einem Fall, bei der Diskussion der Beziehungen der älteren Kataloge der AG zum Katalog von Küstner (Bonner Veröff. 10), konnte Auwers zum ersten Mal einen Schritt weiter kommen (Astr. Nachr. Bd. 198), da hier genügend gemeinsame schwache Sterne vorhanden waren. So muß man sich bei der zweiten Aufgabe, der Herleitung der EB der schwächeren Sterne mit den zur Reduktion auf ein gemeinsames System vorhandenen Tafeln begnügen. Dies ist für die vorliegenden Zwecke auch hinreichend. Doch besteht kein Zweifel, daß man die in den älteren Katalogen, auch in den AG-Katalogen, niedergelegten Beobachtungen schwächerer Sterne erst dann voll ausnutzen kann, wenn ein Fundamentalkatalog von Sternen der 7. bis 9. Größe vorliegt, auf den man die einzelnen Kataloge beziehen kann.

Selbst für die Zusammenfassung der neuen Beobachtungen der Erossterne zu einem Generalkatalog wäre ein solcher Katalog von Nutzen gewesen. Die an verschiedenen Sternwarten mit verschiedenen Instrumenten erhaltenen Beobachtungsreihen weichen

zum Teil stärker voneinander ab, als der inneren Beobachtungsgenauigkeit nach zu erwarten war. Es schien deshalb auch nicht angebracht, die auf ein gemeinsames Fundamentalsystem (der hellen Sterne) bezogenen Beobachtungen einfach zu mitteln, sondern es sollte versucht werden, für die schwachen Sterne selbst ein möglichst geschlossenes Bezugssystem zu schaffen, auf das vor allem auch die kürzeren Beobachtungsreihen gebracht werden konnten. Wenn der erste Versuch hierzu auch im ganzen als mißlungen anzusehen ist [1]), so dürfte es doch von Nutzen sein, auf ihn hier kurz hinzuweisen, weil er deutlich zeigt, wie unsicher heute noch die EB schwacher Sterne sind, die wir auf dem üblichen Weg ableiten. Man wird sich deshalb auch immer hüten müssen, den Schlüssen die man aus diesen EB auf die Bewegungsvorgänge im Sternsystem zieht, allzu großes Gewicht beizulegen.

Bei dem ersten hier durchgeführten Versuch wurde in folgender Weise verfahren. Aus den älteren, etwa seit 1860 vorliegenden Beobachtungen der Erossterne wurden in Verbindung mit den jetzt neu hinzugekommenen die EB im System Boss graphisch hergeleitet. Die Positionen aller Erossterne aus den AG-Katalogen wurden unter Benutzung der Reduktionstafeln von Auwers in Astr. Nachr. 198 über Küstner auf Boss gebracht und mit den ermittelten EB auf die Epoche 1930 reduziert. Diese Örter müßten mit den neu beobachteten, ebenfalls auf Boss reduzierten in systematischer Beziehung im großen übereinstimmen. Der wirklich durchgeführte Vergleich zeigte aber für einige der größeren Beobachtungsreihen recht auffallende Unterschiede.

Die Verhältnisse lassen sich an den hier mitgeteilten, nach Helligkeit im System Küstner geordneten Unterschieden $\Delta\alpha_m$ und $\Delta\delta_m$ der Beobachtungsreihen von Washington, Lick und Uccle gegen das aus den älteren Beobachtungsreihen abgeleitete System erkennen. Die $\Delta\alpha_m, \Delta\delta_m$ im Sinne Syst. minus Wash. usw. sind für die Deklinationen $+50^0/+40^0$ und $+40^0/+20^0$ für Lick und Uccle, bzw. $+40^0/0^0$ für Washington getrennt angegeben. Die Rechnungen sind von Frl. H. Nowacki und Herrn Dr. F. Gondolatsch ausgeführt.

$\Delta\alpha_m + 50^0$ bis $+40^0$ Einheit $0^s.001$				$\Delta\alpha_m + 40^0$ bis $+20^0(0^0)$ Einheit $0^s.001$				$\Delta\delta_m + 50^0$ bis $+40^0$ Einheit $0''.01$				$\Delta\delta_m + 40^0$ bis $+20^0(0^0)$ Einheit $0''.01$			
m	Wash.	Lick	Uccle	m	Wash.	Lick	Uccle	m	Wash.	Lick	Uccle	m	Wash.	Lick	Uccle
7.5	−25	−11	+ 5	7.5	−10	−30	−14	7.5	−11	−11	−18	7.5	−12	−32	0
7.6	−18	− 8	+ 3	7.6	− 7	−31	−13	7.6	−11	− 8	−18	7.6	−12	−32	+ 3
7.7	−13	− 4	+ 2	7.7	− 4	−32	−13	7.7	−11	− 5	−17	7.7	−11	−32	+ 5
7.8	− 9	− 3	− 1	7.8	− 2	−34	−14	7.8	− 9	− 2	−15	7.8	−10	−32	+ 7
7.9	− 9	+ 1	− 3	7.9	0	−36	−14	7.9	− 7	0	−13	7.9	− 8	−31	+10
8.0	−11	+ 3	− 5	8.0	+ 1	−36	−15	8.0	− 5	+ 1	−10	8.0	− 6	−30	+12
8.1	−15	+ 3	− 8	8.1	0	−35	−16	8.1	− 3	− 1	− 9	8.1	− 4	−29	+14
8.2	−21	0	−10	8.2	− 1	−32	−16	8.2	− 3	− 6	− 9	8.2	− 4	−27	+15
8.3	−34	− 9	−15	8.3	− 5	−29	−16	8.3	−10	−15	−11	8.3	− 4	−24	+16
8.4	−40	−15	−17	8.4	− 8	−26	−10	8.4	−19	−22	−13	8.4	− 4	−21	+16
8.5	−40	−17	−16	8.5	− 5	−22	0	8.5	−26	−26	−15	8.5	− 5	−18	+16
8.6	−37	−18	−14	8.6	+ 1	−19	+15	8.6	−30	−27	−18	8.6	− 7	−18	+16
8.7	−31	−18	−11	8.7	+ 8	−17	+26	8.7	−34	−27	−24	8.7	−10	−19	+15
8.8	−24	−13	− 9	8.8	+10	−17	+30	8.8	−36	−27	−30	8.8	− 8	−22	+14
8.9	−11	− 3	− 8	8.9	+10	−20	+26	8.9	−38	−26	−33	8.9	− 5	−30	+12
9.0	−10	+ 3	−18	9.0	+ 6	−23	+24	9.0	−39	−24	−34	9.0	− 2	−33	+ 8
9.1	−12	− 1	−15	9.1	+ 6	−24	+22	9.1	−40	−22	−35	9.1	0	−33	+ 5
9.2	−18	− 7	−11	9.2	+ 7	−23	+21	9.2	−40	−19	−34	9.2	− 1	−31	+20
9.3	−22	−13	− 6	9.3	+13	−17	+24	9.3	−40	−30	−32	9.3	− 4	−30	+51
9.4	−21	−19	+ 3	9.4	+17	−10	+31	9.4	−38	−36	−30	9.4	− 5	−28	+56
9.5	−17	−14	+15	9.5	+24	− 2	+50	9.5	−33	−26	−27	9.5	− 8	−26	+56
9.6	− 9	− 6	+25	9.6	+29	+ 4	+55	9.6	−20	−10	−22	9.6	−11	−25	+54
9.7	+10	+ 2	+35	9.7	+34	+ 4	+58	9.7	0	+14	−13	9.7	−14	−24	+30

[1]) Für die endgültige Herleitung des Generalkatalogs wurden die größeren Beobachtungsreihen der Erossterne unter Annahme einfacher Gewichte gemittelt, und die kürzeren Reihen dann auf dieses mittlere System bezogen. Hierüber wird an anderer Stelle berichtet (Astr. Nachr. Bd. 241).

Die Abweichungen der einzelnen Beobachtungsreihen gegen das gebildete System sind zum Teil recht erheblich; auffallend ist, besonders in der Zone $+50^0/+40^0$, daß diese Abweichungen nahe parallel laufen. Es folgt daraus, daß das durch die älteren Beobachtungen festgelegte System noch mit starken systematischen Fehlern behaftet ist, die zum großen Teil von der Unsicherheit der Reduktionstafeln herrühren. Daß daneben auch die modernen Beobachtungsreihen voneinander abweichen, läßt sich schon an dem geringen hier mitgeteilten Material erkennen.

Jedenfalls zeigen die angegebenen Versuche, daß wir gegenwärtig das systematische Verhalten der *älteren* Kataloge nicht mit der Schärfe kennen, die zu einer ganz strengen Bestimmung der EB notwendig ist [1]). Durch Aufstellung eines Fundamentalkatalogs schwacher Sterne [2]) wäre es möglich, die älteren Kataloge streng auf ein gemeinsames System zu beziehen. Es müßten allerdings durch wiederholte Neubeobachtungen die EB dieser Sterne möglichst stark gesichert werden, damit in nicht allzu ferner Zeit eine volle Ausnutzung der älteren Kataloge eintreten kann.

---

[1]) Eine jetzt abgeschlossene Arbeit von H. Nowacki über die Helligkeitsgleichung der AG-Zonen Lund und Cambridge Mass. führt zu demselben Ergebnis.

[2]) Die von Backlund und Hough zusammengestellten Sternlisten (Supplément à la Connaissance des Temps pour l'an 1914) kommen hierfür nicht in Frage, da die Sterne zwischen 7. und 9. Größe fehlen. H. von Socher ist augenblicklich damit beschäftigt, Sterne zu einem Fundamentalkatalog nach den hier gegebenen Gesichtspunkten auszusuchen.

Eingegangen 7. Januar 1931.

Über Primfunktionen.

Von *Robert König* in Jena und *Maximilian Krafft* in Marburg.

Die Aufgabe, eine rationale Funktion aus ihren Nullstellen und Polen aufzubauen, führt unmittelbar zu der Darstellung dieser Funktion als Quotient zweier Produkte von Linearfaktoren. Jeder Linearfaktor entsteht aus der Funktion von zwei Variabeln $z - x$ durch Spezialisierung des Parameters x.

Ganz ebenso ist die entsprechende Aufgabe für die zu einer n-blättrigen, geschlossenen Riemannschen Fläche T vom Geschlecht $p > 0$ gehörigen algebraischen Funktionen gelöst, wenn man als Analogon zu $z - x$ eine zu T gehörige „Primfunktion" besitzt, d. h. eine Funktion $\Theta(\mathfrak{z}, \mathfrak{x})$ der beiden Stellen $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}$ auf T [1]), deren wesentlichste Eigenschaft es ist, daß sie nur für $\mathfrak{z} = \mathfrak{x}$ und dort sogar nur von erster Ordnung verschwindet. Unter den zu T gehörigen algebraischen Funktionen gibt es bekanntlich ein solches $\Theta(\mathfrak{z}, \mathfrak{x})$ nicht, es läßt sich aber auf mannigfache Weise bilden, wenn man für Θ auf eine der beiden Grundeigenschaften der zu T gehörigen algebraischen Funktionen, also entweder auf die Eindeutigkeit auf T oder auf die Freiheit von wesentlichen Singularitäten, verzichtet. Da jede mit Hilfe des $\Theta(\mathfrak{z}, \mathfrak{x})$ aus ihren Nullstellen und Polen aufgebaute algebraische Funktion wieder beide Eigenschaften besitzen muß, folgt aus der Darstellung eine notwendige Relation zwischen den Nullstellen und Polen, das Abelsche Theorem [2]).

Solche Primfunktionen haben auf verschiedenen Wegen Weierstraß [3]) und Prym [4]) gebildet, außerdem hat F. Klein [5]) unter Benutzung homogener Veränderlicher eine „Primform" angegeben, aus der wieder eine Primfunktion herstellbar ist, die wir „Kleinsche Primfunktion" nennen wollen. Diese ist, wie schon Klein selbst bemerkt hat [6]), von der Prymschen Primfunktion, trotz der abweichenden Vorschrift zu ihrer Bildung, nicht wesentlich verschieden.

Im folgenden soll zunächst die Kleinsche Primfunktion im wesentlichen so hergeleitet werden, wie die Primform bei Klein-Fricke. Diese Primfunktion ist eindeutig und

---

[1]) Stellen auf einer Riemannschen Fläche sollen stets mit kleinen deutschen Buchstaben bezeichnet werden, die entsprechenden lateinischen Buchstaben bedeuten die zugehörigen komplexen Zahlen.

[2]) Mit Hilfe der Primfunktionen gelingt es ferner, die Thetafunktionen aus Bildungen auf der Riemannschen Fläche herzuleiten. Da die Stellung der Thetas in der Theorie der Abelschen Integrale vorher als unorganisch empfunden wurde (man vgl. z. B. die Vorreden zu C. Neumann, Riemanns Theorie der Abelschen Integrale, 1. Aufl., und Clebsch-Gordan, Theorie der Abelschen Funktionen), ist diese Herleitung der Thetas die Veranlassung zur Einführung der Primfunktionen geworden.

[3]) Weierstraß, Math. Werke II, S. 235 ff., IV, S. 379 ff. (Die Funktion $E(x, y; x_1, y_1, x_0, y_0)$.)

[4]) Prym-Rost, Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung, 2. Teil, S. 165. $\left(\text{Die Funktion } \Theta \left| \begin{matrix} \eta \\ z \end{matrix} \right| \cdot\right)$

[5]) Klein, Ges. math. Abhandlungen, III, S. 319 ff., S. 398 ff.; Klein-Fricke, Modulfunktionen II, S. 475 ff.

[6]) Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung **20** (1911), S. 199 (kursiv paginierter Teil).

überall regulären Verhaltens auf T', der kanonisch zerschnittenen Fläche T. An den Schnitten besitzt die Primfunktion multiplikative Perioden. Diese werden ohne den a. a. O. benutzten doppelten Grenzübergang aus dem Ausdruck für die Primfunktion abgeleitet. Dann wird gezeigt, daß ganz analog die Funktion $\prod \begin{vmatrix} \eta\eta' \\ z \end{vmatrix}$, von der Prym bei der Konstruktion seiner Primfunktion ausgeht [7]) und deren Existenz er aus einem allgemeinen Existenztheorem entnimmt, wirklich angeschrieben werden kann. Von hier aus läßt sich die ganze Prymsche Konstruktion leichter überblicken. Die Weierstraßsche Primfunktion ist im wesentlichen, d. h. abgesehen von einem nirgends verschwindenden angebbaren Faktor, ein Quotient aus zwei Kleinschen Primfunktionen. Die Zurückführung der Kleinschen Primfunktion auf die direkt überaus einfach zu bildende Weierstraßsche scheint nicht ohne weiteres möglich.

§ 1. Zusammenstellung von Bezeichnungen, Definitionen und Sätzen.

Die im folgenden gebrauchten Bezeichnungen sind die von R. König in seinen Abhandlungen über Riemannsche Funktionensysteme eingeführten, die auch in R. König und M. Krafft, *Elliptische Funktionen*, Berlin 1928 (künftig zitiert mit KK und Seitenzahl) benutzt werden. Wir verweisen für alle Einzelheiten in der folgenden Zusammenstellung auf dieses Werk, auch für die Beweise der Sätze. Diese Beweise sind dort zwar nur für einen Spezialfall geführt, aber ohne Benutzung der Besonderheiten dieses Spezialfalles. Von der a. a. O. streng durchgeführten Unterscheidung von Klasse und komplementärer Klasse sehen wir hier ab, da im algebraischen Fall beide Klassen identisch sind.

$\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}$ (mit oder ohne Indizes) sind stets variable Punkte von T, alle anderen kleinen deutschen Buchstaben dienen zur Bezeichnung fester Punkte. t ist stets eine zur gerade betrachteten Stelle $\mathfrak{z}_0$ von $\mathfrak{z}$ gehörige Ortsuniformisierende, ebenso τ für die Stelle $\mathfrak{x}_0$ von $\mathfrak{x}$. Die Uniformisierenden sollen so normiert sein, daß der erste Koeffizient der Entwicklung von $z - z_0$ $\left(\text{bzw. } \frac{1}{z}\right)$ nach Potenzen von t gleich 1 ist. Ebenso für τ. $\mathfrak{P}(t)$ ist stets eine Potenzreihe mit nur ganzen positiven Potenzen von t. $P(t, \tau)$ bedeutet ebenso eine nach homogenen Polynomen in t und τ fortschreitende Reihe, die in einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{z}_0$ und $\mathfrak{x}_0$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

Auf T lassen sich p Stellen $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_p$ so auswählen, daß kein überall endliches Differential an allen diesen Stellen verschwinden kann. Wir bezeichnen mit $d\psi_j(\mathfrak{z})$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ das System von p normierten überall endlichen Differentialen, für das

$$d\psi_j = (1 + t\mathfrak{P}(t))\, dt \quad \text{bei } \mathfrak{m}_j, \qquad d\psi_j = t\mathfrak{P}(t)\, dt \quad \text{bei } \mathfrak{m}_k, \qquad k \neq j,$$

ist. Diese $d\psi_j(\mathfrak{z})$ sind die Normaldifferentiale erster Gattung. Als Normaldifferentiale zweiter Gattung wählen wir die p Differentiale $d\mathfrak{F}^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{m}_j)$, $j = 1, 2, \ldots, p$, mit den Entwicklungen $\left(\frac{1}{t^2} + t\mathfrak{P}(t)\right)dt$ bei $\mathfrak{m}_j$, $t\mathfrak{P}(t)\,dt$ bei $\mathfrak{m}_k$, $k \neq j$, und $\mathfrak{P}(t)\,dt$ an allen anderen Stellen.

Ist $\mathfrak{n}$ eine von den $\mathfrak{m}_j$ verschiedene Stelle von T, so bedeute $\xi^{(1)}(\mathfrak{x}), \xi^{(2)}(\mathfrak{x}), \ldots$ eine im Unendlichen normale Basis für das Ideal $J([\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \ldots \mathfrak{m}_p]\,\mathfrak{n}^{-1})$ und $\check{\xi}^{(1)}(\mathfrak{z}), \check{\xi}^{(2)}(\mathfrak{z}), \ldots$ die dazu komplementäre Basis. Dann ist (KK 87—88) das *Elementardifferential erster Stufe*

$$(1) \qquad dF^{(1)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}) = \frac{\Sigma\, \check{\xi}^{(\nu)}(\mathfrak{z})\, \xi^{(\nu)}(\mathfrak{x})}{z - x}\, dz$$

[7]) Prym-Rost, 2. Teil, S. 89 ff. Der Logarithmus der Prymschen Primfunktion ist als Lösung einer Randwertaufgabe behandelt von Haupt, dieses Journal **158** (1927).

ein Differential dritter Gattung mit den Polstellen bei $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{n}$, und zwar ist (KK 88, 93—95)

$$
\begin{aligned}
dF^{(1)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}) &= \left(\frac{1}{t-\tau} + P(t,\tau)\right) dt, \quad \text{falls} \quad \mathfrak{z}_0 = \mathfrak{x}_0 \neq \begin{cases} \mathfrak{m}_j \\ \mathfrak{n} \end{cases}, \\
&= \left(\frac{1}{t-\tau} + \frac{1}{\tau} + \frac{t}{\tau} P(t,\tau)\right) dt, \quad \text{falls} \quad \mathfrak{z}_0 = \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{m}_j, \qquad (2) \\
&= \left(\frac{1}{t-\tau} - \frac{1}{t} + \frac{\tau}{t} P(t,\tau)\right) dt, \quad \text{falls} \quad \mathfrak{z}_0 = \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{n}, \\
&= t^{\alpha}\tau^{\beta} P(t,\tau)\, dt \quad \text{sonst, wobei} \quad \alpha \geqq -1,\ \beta \geqq -1.
\end{aligned}
$$

Aus (2) folgen sofort die Eigenschaften des *Elementardifferentials zweiter Stufe*

$$
dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}) = -\frac{d}{dx}\,(dF^{(1)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x})) = -\left(\frac{d}{dx}\frac{\Sigma \check{\xi}^{(\nu)}(\mathfrak{z})\,\xi^{(\nu)}(\mathfrak{x})}{z-x}\right) dz. \tag{3}
$$

Für dieses gilt das *Vertauschungstheorem* 3. *Art* 2. *Stufe* (KK 100—104)

$$
dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x})\, dx + \sum_1^p d\psi_j(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{F}^{(2)}(\mathfrak{x}, \mathfrak{m}_j) = dF^{(2)}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})\, dz + \sum_1^p d\psi_j(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{F}^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{m}_j). \tag{4}
$$

Die linke Seite von (4) nennen wir das *kanonische Elementardifferential* 3. *Art* 2. *Stufe*[8]) und bezeichnen es mit $dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}; 3)\, dx$:

$$
dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}; 3) = dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}) + \sum_1^p d\psi_j(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{F}^{(2)}(\mathfrak{x}, \mathfrak{m}_j). \tag{5}
$$

(4) können wir dann auch

$$
dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}; 3)\, dx = dF^{(2)}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}; 3)\, dz \tag{4'}
$$

schreiben. Das allgemeinste, einen dem Vertauschungssatz (4) bzw. (5) entsprechenden Vertauschungssatz liefernde Differential mit Doppelpol ist dann

$$
d\mathsf{F}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x})\, dx = dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}; 3)\, dx + \sum_{j,k} c_{jk}\, d\psi_j(\mathfrak{z})\, d\psi_k(\mathfrak{x}), \tag{6}
$$

wobei die c_{jk} konstant sind und

$$
c_{jk} = c_{kj} \tag{6'}
$$

ist. Wegen (6) genügt es, das Differential $dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}; 3)\, dx$ zu betrachten.

Durch Integration entsteht aus (4), (5) der *Satz von der Vertauschung von Argument und Parameter in Integralen dritter Gattung* in der allgemeinen Gestalt (KK 141)

$$
\int_{\mathfrak{z}_1}^{\mathfrak{z}_2}\int_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{x}_2} dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}; 3)\, dx + 2N_1\pi i = \int_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{x}_2}\int_{\mathfrak{z}_1}^{\mathfrak{z}_2} dF^{(2)}(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}; 3)\, dz + 2N_2\pi i. \tag{7}
$$

Dabei bedeutet N_1 die Zahl der Überkreuzungen des Integrationsweges $\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2$ durch den Weg $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2$ von links nach rechts, N_2 die entsprechende Anzahl für Überkreuzungen in der umgekehrten Richtung.

Ist s ein auf T geschlossener Integrationsweg, so setzen wir zur Abkürzung

$$
\int_s d\psi_j(\mathfrak{z}) = \omega_j^{(s)}; \qquad -\int_s d\mathfrak{F}^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{m}_j) = \eta_j^{(s)}. \tag{8}
$$

Die durch kanonische Zerschneidung aus T entstehende Fläche nennen wir T'. Die Rückkehrschnitte der p bei der Zerschneidung auftretenden Rückkehrschnittpaare nennen wir wie üblich (a_ν) und (b_ν), $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$, den Zügel, der die Kreuzungsstelle $\mathfrak{f}_\nu$ von (a_ν) und (b_ν) mit dem Punkt $\mathfrak{o}$ verbindet (c_ν). Die Bezeichnungen (a_ν) und (b_ν)

---

[8]) Bei diesem Differential fallen nach Multiplikation mit dx die bei $dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x})$ noch vorhandenen, aus (2) folgenden, von $\mathfrak{x} = \mathfrak{z}$ verschiedenen Singularitäten fort. Dies ist im folgenden stets benutzt.

sollen so gewählt sein, daß man bei einem positiven Umlauf um $\mathfrak{k}_\nu$ die Schnitte in der Reihenfolge (c_ν), (a_ν), (b_ν), (a_ν), (b_ν), (c_ν) kreuzt. (c_ν) soll die Richtung von $\mathfrak{o}$ nach $\mathfrak{k}_\nu$ haben, (a_ν) soll (c_ν) von links nach rechts und (b_ν) soll (c_ν) von rechts nach links kreuzen.

Ist der Weg s der Formeln (8) speziell gleich (a_ν) oder (b_ν), so gebrauchen wir statt der Bezeichnungen von (8) die folgenden:

$$(8') \qquad \begin{aligned} \int_{(b_\nu)} d\psi_j(\mathfrak{z}) &= \omega_{j,\nu}, & \int_{(a_\nu)} d\psi_j(\mathfrak{z}) &= \omega_{j,\nu+p}, \\ -\int_{(b_\nu)} d\mathfrak{F}^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{m}_j) &= \eta_{j,\nu}, & -\int_{(a_\nu)} d\mathfrak{F}^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{m}_j) &= \eta_{j,\nu+p}. \end{aligned}$$

Zur Abkürzung setzen wir künftig

$$(9) \qquad \int_{\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{z}_2\,\mathfrak{x}_2} dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}; 3)\,dx = Q_{\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2}^{\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_2}.$$

Wichtig ist der Spezialfall, daß der Weg $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2$ in (9) ein geschlossener Weg s ist. In diesem Fall folgt aus (5) und (3), da das Integral über die Ableitung verschwindet, (mit leichter Abänderung der Bezeichnung in (9))

$$(10) \qquad Q_s^{\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_2} = -\sum_1^p \eta_j^{(s)} \int_{\mathfrak{z}_1}^{\mathfrak{z}_2} d\psi_j(\mathfrak{z}).$$

§ 2. Die Kleinsche Primfunktion.

Klein bildet zunächst [9]) (vgl. (6))

$$(11) \qquad \exp\left(-\frac{1}{2}\int_{\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{z}_2\,\mathfrak{x}_2} d\mathsf{F}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x})\,dx\right)$$

und geht nach Multiplikation von (11) mit einem geeigneten Faktor zum Limes $\mathfrak{z}_1 \to \mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{z}_2 \to \mathfrak{x}_2$ über. Wegen (6) können wir uns darauf beschränken, diesen Grenzübergang statt für $d\mathsf{F}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x})dx$ für $dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}; 3)dx$ im Exponenten von (11) durchzuführen.

Es seien $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots, \mathfrak{x}^{(n)}$ die zu $\mathfrak{x}$ konjugierten, also zum gleichen x gehörigen Punkte von T. Sie seien so gezählt, daß $\mathfrak{x}' = \mathfrak{x}$ ist. Wir bilden dann

$$(12) \qquad \sum_1^n dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}^{(\nu)}; 3)\,dx.$$

Dieses Differential hat wegen (5), (2) in $\mathfrak{z}$ einen zweifachen Pol in allen Blättern, wenn $z \to x$ rückt, denn dann rückt $\mathfrak{z}$ gegen ein $\mathfrak{x}^{(\nu)}$, und zwar ist der Hauptteil derselbe wie der von $\dfrac{dz\,dx}{(z-x)^2}$. Folglich ist

$$(12') \qquad \sum_\nu dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}^{(\nu)}; 3)\,dx - \frac{dz\,dx}{(z-x)^2}$$

ein in $\mathfrak{z}$ überall endliches Differential (denn $dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}^{(\nu)}; 3)$ hat in $\mathfrak{z}$ nur bei $\mathfrak{x}^{(\nu)}$ einen Pol). Andrerseits ist (12) und damit auch (12') in x ein rationales Differential. Dieses kann Pole haben nur für die x, für welche ein Glied von (12) einen Pol hat. Das einzige solche x ist wegen des Vertauschungssatzes (5) bzw. (4) und der Eigenschaften von $dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x})dx$ aber $x = z$, und für dieses x ist in (12') die Unstetigkeit schon beseitigt. Also ist (12) in x ein überall endliches rationales Differential, also identisch Null. Daraus folgt nun

$$(13) \qquad -dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}; 3)\,dx = \sum_2^n dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}^{(\nu)}; 3)\,dx - \frac{dz\,dx}{(z-x)^2}$$

[9]) $\exp(w) = e^w$.

und daraus weiter

$$Q^{\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_2}_{\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2} - \log\frac{(z_2-x_2)\,(z_1-x_1)}{(z_1-x_2)\,(z_2-x_1)} = -\sum_2^n \int_{\mathfrak{z}_1}^{\mathfrak{z}_2}\int_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{x}_2} dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}^{(\nu)}; 3)\,dx = -\sum_2^n \int_{\mathfrak{z}_1}^{\mathfrak{z}_2}\int_{\mathfrak{x}_1^{(\nu)}}^{\mathfrak{x}_2^{(\nu)}} dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}; 3)dx$$

$$= -\sum_2^n Q^{\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_2}_{\mathfrak{x}_1^{(\nu)}\,\mathfrak{x}_2^{(\nu)}}\,. \tag{14}$$

Diese Formel ist die Grundlage für alle weiteren Schlüsse. Dabei sind die Wege $\mathfrak{x}_1^{(\nu)}\,\mathfrak{x}_2^{(\nu)}$ dadurch festgelegt, daß sie in der x-Ebene dieselbe Spur haben wie der Weg $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2$. Durch die Zählung der $\mathfrak{x}_1^{(\nu)}$ ist damit auch bestimmt, was unter $\mathfrak{x}_2^{(\nu)}$ zu verstehen ist. Bildet man

$$\sqrt{(x_1-z_1)\,(z_2-x_2)}\,\exp\left(-\tfrac{1}{2}\,Q^{\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_2}_{\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2}\right), \tag{15}$$

so ist dieser Ausdruck in hinreichend kleiner Umgebung von $\mathfrak{x}_1$ eindeutig in $\mathfrak{z}_1$, wenn man noch festlegt, von welchem der beiden Werte der Quadratwurzel man ausgeht; entsprechend in einer Umgebung von $\mathfrak{x}_2$ für $\mathfrak{z}_2$. In der Tat nimmt $\frac{1}{2}\,Q^{\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_2}_{\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2}$ als Funktion von $\mathfrak{z}_1$ betrachtet zu beiden Seiten des Integrationsweges $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2$ Werte an, die sich um πi unterscheiden. Daraus folgt die behauptete Eindeutigkeit. Wenn man (15) unter Benutzung von (14) umschreibt, erhält man

$$\lim_{\substack{\mathfrak{z}_2\to\mathfrak{x}_2\\ \mathfrak{z}_1\to\mathfrak{x}_1}}\left\{\sqrt{(x_1-z_1)\,(z_2-x_2)}\,\exp\left(-\tfrac{1}{2}\,Q^{\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}_2}_{\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2}\right)\right\} = \pm\,(x_2-x_1)\,\exp\left(\tfrac{1}{2}\sum_2^n Q^{\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2}_{\mathfrak{x}_1^{(\nu)}\,\mathfrak{x}_2^{(\nu)}}\right). \tag{16}$$

Dabei ist stillschweigend vorausgesetzt, daß $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ im Endlichen liegen und nicht in Verzweigungspunkte von T fallen. Wir bezeichnen den Limes in (16) mit $\Omega(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ [10]) und haben bei geeigneter Bestimmung der Quadratwurzel in (15)

$$\Omega(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = (x_2-x_1)\,\exp\left(\frac{1}{2}\sum_2^n Q^{\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2}_{\mathfrak{x}_1^{(\nu)}\,\mathfrak{x}_2^{(\nu)}}\right). \tag{17}$$

Wir untersuchen nun das Verhalten der durch (17) definierten Funktion von $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$. Da

$$\Omega(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = -\,\Omega(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_1) \tag{18}$$

ist, brauchen wir die Untersuchung nur für variables $\mathfrak{x}_1$ und festes $\mathfrak{x}_2$ durchzuführen.

Man erkennt sofort: Für $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_2$ hat Ω eine Nullstelle erster Ordnung. Die Verzweigungspunkte und unendlich fernen Punkte von T sind Unstetigkeitspunkte von Ω, die wir noch zu untersuchen haben. Im übrigen ist Ω regulär und von Null verschieden, ausgenommen vielleicht, wenn $\mathfrak{x}_1$ in einen der zu $\mathfrak{x}_2$ konjugierten Punkte, etwa nach $\mathfrak{x}_2^{(\varkappa)}$, $\varkappa \geqq 2$, rückt. In diesem Fall rückt gleichzeitig einer der zu $\mathfrak{x}_1$ konjugierten Punkte, etwa $\mathfrak{x}_1^{(\lambda)}$, $\lambda \geqq 2$, nach $\mathfrak{x}_2$. Daraus folgt dann, daß, falls $\varkappa \neq \lambda$ ist, der $\varkappa$-te und λ-te Summand im Exponenten von Ω unstetig wird, und zwar ergeben für $\mathfrak{x}_1$ in der Umgebung von $\mathfrak{x}_2^{(\varkappa)}$ diese beiden Summanden wegen (3) und (2)

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\,Q^{\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2}_{\mathfrak{x}_1^{(\varkappa)}\,\mathfrak{x}_2^{(\varkappa)}} + \tfrac{1}{2}\,Q^{\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2}_{\mathfrak{x}_1^{(\lambda)}\,\mathfrak{x}_2^{(\lambda)}} \\ &= -\tfrac{1}{2}\log(x_1-x_2) + \mathfrak{P}_1(x_1-x_2) - \tfrac{1}{2}\log(x_2-x_1) + \mathfrak{P}_2(x_2-x_1) \\ &= -\log(x_1-x_2) + \mathfrak{P}(x_1-x_2). \end{aligned} \tag{19}$$

Ist $\varkappa = \lambda$, was vorkommen kann, so folgt, daß nur ein unstetiger Summand im Exponenten von Ω vorkommt, nämlich $\frac{1}{2}\,Q^{\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2}_{\mathfrak{x}_1^{(\varkappa)}\,\mathfrak{x}_2^{(\varkappa)}}$, und dieser verhält sich für $\mathfrak{x}_1$ in der Umgebung von $\mathfrak{x}_2^{(\varkappa)}$ genau ebenso, wie der soeben untersuchte Ausdruck. Man sieht das sofort, wenn man den einen Integrationsweg durch einen Zwischenpunkt zerlegt.

[10]) Die Bezeichnung Ω ist gewählt, weil unser Ω das inhomogene Analogon zum Kleinschen homogenen Ω ist.

In beiden Fällen ergibt also (17), daß für $\mathfrak{x}_1$ in der Umgebung von $\mathfrak{x}_2^{(\varkappa)}$, $\varkappa \geqq 2$, gilt

$$\Omega(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = \exp(\mathfrak{P}(x_1 - x_2)),$$

daß also Ω in $\mathfrak{x}_2^{(\varkappa)}$, $\varkappa \geqq 2$, regulär und ungleich Null ist.

Liegt $\mathfrak{x}_1$ in der Umgebung eines m-blättrigen endlichen Verzweigungspunktes $\mathfrak{a}$ und ist $t = t'$ der zu $\mathfrak{x}_1$, $t^{(\nu)}$ der zu $\mathfrak{x}^{(\nu)}$ ($\nu = 2, 3, \ldots, m$) gehörige Wert der Ortsuniformisierenden, so ist bei $\mathfrak{a}$ wegen (3) und (2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_2^n Q^{\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2}_{\mathfrak{x}_1^{(\nu)}\mathfrak{x}_2^{(\nu)}} &= \frac{1}{2}\sum_2^m Q^{\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2}_{\mathfrak{x}_1^{(\nu)}\mathfrak{x}_2^{(\nu)}} + \mathfrak{P}_0(t) \\ &= \frac{1}{2}\sum_2^m \log(t' - t^{(\nu)}) + \mathfrak{P}_1(t). \end{aligned} \tag{20}$$

Wählt man die einfachste zu $\mathfrak{a}$ gehörige Uniformisierende, so ist $t^{(\nu)} = e^{\frac{2\pi i(\nu-1)}{m}} t'$ und daher

$$\sum_2^m \log(t' - t^{(\nu)}) = \log(t' - t'')(t' - t''') \cdots (t' - t^{(m)}) = \log m t^{m-1}.$$

Wir erhalten somit für Ω in der Umgebung von $\mathfrak{a}$

$$\Omega(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = t^{\frac{m-1}{2}} \exp(\mathfrak{P}(t)). \tag{21}$$

$\mathfrak{a}$ ist eine Nullstelle der Ordnung $\dfrac{m-1}{2}$ und Ω in $\mathfrak{a}$ im allgemeinen verzweigt.

Ganz dieselbe Überlegung gilt für die unendlich fernen Punkte von T. Ist der betrachtete unendlich ferne Punkt etwa k-blättrig, $1 \leqq k \leqq n$, so erhält man, weil $x_1 - x_2$ dann dort einen k-fachen Pol hat,

$$\Omega(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = t^{-k} t^{\frac{k-1}{2}} \exp(\mathfrak{P}(t)) = t^{-\frac{k+1}{2}} \exp(\mathfrak{P}(t)), \tag{22}$$

d. h. Ω hat dort eine Polstelle der Ordnung $\dfrac{k+1}{2}$ und ist dort i. a. verzweigt.

Es sei nun $d\psi(\mathfrak{z})$ irgendein Differential erster Gattung (überall endliches Differential). Dann ist $\dfrac{d\psi(\mathfrak{z})}{dz}$ eine Funktion auf T, die in jedem endlichen m-blättrigen Verzweigungspunkt einen $(m-1)$-fachen Pol hat, in jedem k-fachen unendlich fernen Punkt eine $(k+1)$-fache Nullstelle.

Da das Geschlecht p unserer Fläche gegeben ist durch

$$p = \sum \frac{m-1}{2} + \sum \frac{k-1}{2} - n + 1, \tag{23}$$

so erhalten wir unter Berücksichtigung von $n = \Sigma k$ die Relation

$$2p - 2 = \Sigma(m-1) - \Sigma(k+1). \tag{24}$$

Aus (24) entnehmen wir, daß $\dfrac{d\psi(\mathfrak{z})}{dz}$ außer den angegebenen Nullstellen noch weitere $2p-2$ Nullstellen hat, nämlich die Nullstellen des Differentials $d\psi(\mathfrak{z})$. Wir wählen $d\psi(\mathfrak{z})$ nun so, daß keine seiner Nullstellen in einen Verzweigungspunkt oder unendlich fernen Punkt von T fällt [11]). Wir bezeichnen diese nur für $p > 1$ auftretenden Nullstellen mit $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_{2p-2}$.

[11]) Das ist möglich. Aus dem Riemann-Rochschen Satz (KK 67) folgt nämlich, daß es keinen ganzen Divisor $\mathfrak{M} \neq 1$ gibt, derart, daß alle $d\psi_j(\mathfrak{z})$ Multipla von $\mathfrak{M}$ sind. Es gibt also zu jedem $\mathfrak{a}$ ein $d\psi^{\mathfrak{a}}$, das in $\mathfrak{a}$ nicht verschwindet, ebenso zu jedem unendlich fernen Punkt ein $d\psi^{\infty}$. Die $d\psi^{\mathfrak{a}}$ und $d\psi^{\infty}$ lassen sich sicher so linear kombinieren, daß diese lineare Kombination die geforderte Eigenschaft hat.

Wir definieren nun eine Funktion $m(\mathfrak{z})$ durch die Gleichungen

$$(25)\qquad \begin{aligned} m(\mathfrak{z}) &= \frac{d\psi(\mathfrak{z})}{dz} && \text{für } p = 1, \\ m(\mathfrak{z}) &= \frac{d\psi(\mathfrak{z})}{dz} \cdot \frac{1}{\Omega(\mathfrak{z}, \mathfrak{c}_1) \cdot \Omega(\mathfrak{z}, \mathfrak{c}_2) \cdots \Omega(\mathfrak{z}, \mathfrak{c}_{2p-2})} && \text{für } p > 1. \end{aligned}$$

Aus (21), (22) folgt dann: In einem endlichen Verzweigungspunkt verhält sich $m(\mathfrak{z})$ wie

$$(26)\qquad t^{-(m-1)-(2p-2)\frac{m-1}{2}}\mathfrak{P}(t) = t^{-p(m-1)}\mathfrak{P}(t), \qquad \mathfrak{P}(0) \neq 0,$$

in den unendlich fernen Punkten von T aber wie

$$(27)\qquad t^{(k+1)+(2p-2)\frac{k+1}{2}}\mathfrak{P}(t) = t^{p(k+1)}\mathfrak{P}(t), \qquad \mathfrak{P}(0) \neq 0.$$

Im übrigen ist T regulär und nicht Null.

Daraus folgt nun, daß

$$(28)\qquad \Theta(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = m(\mathfrak{x}_1)^{\frac{1}{2p}} \cdot m(\mathfrak{x}_2)^{\frac{1}{2p}} \cdot \Omega(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$$

auf T überall regulär und, abgesehen von einer einfachen Nullstelle bei $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_2$, überall von Null verschieden ist. Daraus, daß $\Theta(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ auf T unverzweigt ist, folgt weiter, daß es auf T' eindeutig ist.

Θ ist also eine auf T' eindeutige, überall endliche und bis auf eine Nullstelle überall von Null verschiedene Primfunktion, die *Kleinsche Primfunktion.*

§ 3. Das Verhalten von $\Theta(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ bei geschlossenen Umläufen.

Da $\Theta(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ nur auf T', nicht auf T, eindeutig ist, muß noch sein Verhalten bei einem geschlossenen Umlauf von $\mathfrak{x}_1$ auf T ermittelt werden. Aus ihm folgt auch das Verhalten von Θ am Rand von T'. Wegen (28) und (25) genügt es,

$$(29)\qquad \log \Omega(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = \log (x_2 - x_1) + \frac{1}{2}\sum_2^n Q^{\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2}_{\mathfrak{x}_1^{(\nu)} \mathfrak{x}_2^{(\nu)}}$$

zu betrachten. Wir zerschneiden T' noch durch Schnitte l_a und l_∞ von sämtlichen Verzweigungs- und unendlich fernen Punkten von T nach dem Ausgangspunkt $\mathfrak{o}$ des kanonischen Schnittsystems. Die so zerschnittene Fläche T' heiße T^*. Auf ihr ist (29) eindeutig.

Da in (9) noch zwei willkürliche Integrationswege, C von $\mathfrak{z}_{01}$ nach $\mathfrak{z}_{02}$ und C' von $\mathfrak{x}_1$ nach $\mathfrak{x}_2$ vorkommen, so ist Θ durch (28) erst bestimmt, wenn C' und die Grenzlage C^* von C gegeben sind. Es genügt aber, C' und C^* für ein spezielles Punktepaar $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ zu kennen. Die mehrfach benutzte Entwicklung des Integrals nach der Ortsuniformisierenden schließt nämlich stillschweigend ein, daß der Integrationsweg nur soweit variiert, als er in der Umgebung, in der entwickelt wird, liegt. D. h. der Integrationsweg ist für alle Punkte dieser Umgebung bis auf erlaubte Abänderungen festgelegt, wenn wir ihn für einen speziellen Wert der Grenzen kennen.

Bei Abänderung von C^* in C_1^* ändert sich $\log \Omega$ um

$$(30)\qquad \frac{1}{2}\sum_2^n \int_s \int_{\mathfrak{x}_1^{(\nu)}}^{\mathfrak{x}_2^{(\nu)}} dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}; 3)\, dx = \frac{1}{2}\sum_2^n Q^s_{\mathfrak{x}_1^{(\nu)} \mathfrak{x}_2^{(\nu)}},$$

wobei s den aus C_1^* und C^* zusammengesetzten geschlossenen Weg bedeutet. Durch Anwendung von (7) unter Berücksichtigung von (10) folgt für (30) der Wert

$$(30')\qquad N\pi i - \frac{1}{2}\sum_2^n \sum_1^p \eta_j^{(s)} \int_{\mathfrak{x}_1^{(\nu)}}^{\mathfrak{x}_2^{(\nu)}} d\psi_j(\mathfrak{x}), \qquad (N \text{ ganz}).$$

Da nun noch

$$(31)\qquad \sum_1^n \int_{\mathfrak{x}_1^{(\nu)}}^{\mathfrak{x}_2^{(\nu)}} d\psi_j(\mathfrak{x}) = \int_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{x}_2} \sum_1^n d\psi_j(\mathfrak{x}) = 0$$

ist [12]), so kann man (30′) noch umformen in

$$(30'')\qquad N\pi i + \frac{1}{2}\sum_1^p \eta_j^{(s)} \int_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{x}_2} d\psi_j(\mathfrak{x}).$$

Ein ganz ebenso gebauter Ausdruck ergibt sich bei Abänderung von C' in C_1' für die Änderung von $\log \Omega$.

Daraus folgt schließlich: Bei Abänderung der Integrationswege C^* und C' in $\log \Omega$ ändert sich $\Theta(\mathfrak{x},\mathfrak{x}_2)$ um einen Faktor der Form

$$(30^*)\qquad \pm \exp\Big(\sum_1^p \alpha_j \int_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{x}_2} d\psi_j(\mathfrak{x})\Big), \qquad (\alpha_j = \text{konst.}).$$

Da das Verhalten dieses Faktors vollkommen bekannt ist, und da er die wesentlichen Eigenschaften der Primfunktion nicht ändert, darf man C^* und C' speziell wählen.

Wir beschränken daher die Wege C^* und C' zunächst auf T^* und fordern noch, daß C^* und C' sich nicht überkreuzen sollen. Aus (30″) folgt, daß dann $\log \Omega$ eindeutig bestimmt ist, unabhängig von dem speziellen Verlauf von C^* und C'. Wir erhalten damit einen in T' eindeutigen Zweig eines völlig bestimmten $\Theta(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$. Nun tritt in (29) C' selbst gar nicht mehr auf, sondern nur die Wege $C^{(\nu)}$, die von den $\mathfrak{x}^{(\nu)}$ beschrieben werden, wenn $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}'$ auf C' von $\mathfrak{x}_1$ nach $\mathfrak{x}_2$ läuft. Es darf daher in (29) der Weg C^* nicht nur beliebig nahe an C' angenommen werden, sondern man darf ihn sogar schließlich mit C' zusammenfallen lassen. Wir müssen dabei allerdings voraussetzen, daß C' mit keinem der $C^{(\nu)}$ unendlich viele Punkte gemeinsam hat, aber das läßt sich durch erlaubte Abänderungen von C' stets erreichen. Wir können daher (29) auch schreiben:

$$(29')\qquad \log \Omega(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = \log (x_2 - x_1) + \sum_2^n \int_{C'} \int_{C^{(\nu)}} dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}; 3)\, dx.$$

Dabei bedeuten die $C^{(\nu)}$ die zum Weg C' „konjugierten“ Wege. Bei Beschränkung von C' auf T^* ist die rechte Seite eine eindeutige Funktion von $\mathfrak{x}_1$. Die Fortsetzung über T^* hinaus erfolgt durch Aufheben dieser Beschränkung für C'. Wir lassen jetzt in (29′) $\mathfrak{x}_1$ einen (nicht auf T^* beschränkten) Weg s' mit dem Endpunkt $\mathfrak{x}_1^*$ durchlaufen. Dann ist, unter $s^{(\nu)}$ die zu s' konjugierten Wege verstanden, die Änderung von $\log \Omega$, wie eine leichte Umformung lehrt,

$$(32)\qquad \log \Omega(\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2) - \log \Omega(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = \log \frac{x_2 - x_1^*}{x_2 - x_1}$$

$$- \frac{1}{2}\sum_2^n \Big\{ \int_{C'} \int_{s^{(\nu)}} dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}; 3)\, dx + \int_{s'} \int_{C^{(\nu)}} dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}; 3)\, dx + \int_{s'} \int_{s^{(\nu)}} dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}; 3)\, dx \Big\}$$

oder

$$(32')\qquad \log \Omega(\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2) - \log \Omega(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = \log \frac{x_2 - x_1^*}{x_2 - x_1} - \frac{1}{2}(S_1 + S_2 + S_3),$$

---

[12]) $\sum_1^n d\psi_j(\mathfrak{x}^{(\nu)})$ muß identisch verschwinden, da es kein überall endliches rationales Differential gibt.

wenn zur Abkürzung S_1, S_2, S_3 der Reihe nach für die in (32) auftretenden drei Summen zusammengehöriger Integrale gesetzt wird.

Wir betrachten im folgenden nun den Fall, daß s' sich auf T schließt, also $\mathfrak{x}_1^* = \mathfrak{x}_1$ wird. Für die Integrale $Q_{\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2}^{\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2}$, und unter diese Form fallen alle in (32) rechts auftretenden Integrale, ist nun bekannt, daß sie als Funktionen von $\mathfrak{z}_2$ bei festgehaltenem $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ stetig sind, außer für $\mathfrak{z}_2$ in der Umgebung von $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$. Dies können wir unter Berücksichtigung des Vertauschungstheorems (7) auf die in S_1 und S_2 auftretenden Integrale anwenden, denn in diesen ist die einzige variable Grenze $\mathfrak{x}_1^{*(\nu)}$, bzw. $\mathfrak{x}_1^*$. Dagegen bedürfen die Integrale in S_3 einer besonderen Untersuchung, da für sie zwei Grenzen, eine im innern, eine im äußern Integral, variieren.

Wir formen nun S_1, S_2, S_3 um, die ersteren unter der erlaubten Annahme, daß schon $\mathfrak{x}_1^* = \mathfrak{x}_1$ ist. Ist N die Zahl der — mit Vorzeichen gezählten — Überkreuzungen von s' mit allen $C^{(\nu)}$, $\nu \geqq 2$, so ergibt das Vertauschungstheorem (7) zusammen mit (10)

$$S_2 = 2N\pi i - \sum_{2}^{n} \sum_{1}^{p} \eta_j^{(s)} \int_{C^{(\nu)}} d\psi_j(\mathfrak{x}).$$

Die Anwendung von (31) in derselben Art wie beim Übergang von (30′) zu (30″) liefert hieraus sofort

$$(33_2) \qquad S_2 = 2N\pi i + \sum_{1}^{p} \eta_j^{(s)} \int_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{x}_2} d\psi_j(\mathfrak{x}).$$

Zur Umformung von S_1 benutzen wir die integrierte Formel (13). Dann erhalten wir entsprechend wie bei S_2 unter Berücksichtigung der Geschlossenheit von s'

$$S_1 = \iint_{C' s'} \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{dz}{z - x} + dF^{(1)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}) \right) dx - \sum_{1}^{p} d\psi_j(\mathfrak{z})\, dF^{(2)}(\mathfrak{x}, \mathfrak{m}_j) \right\}$$

oder

$$(33_1) \qquad S_1 = \sum_{1}^{p} \eta_j^{(s)} \int_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{x}_2} d\psi_j(\mathfrak{x}).$$

Bei der Berechnung von S_3 dürfen wir voraussetzen, daß $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_1^*$ schon beide in der Umgebung eines Punktes $\mathfrak{q}$ liegen. Wir ersetzen nun den Weg von $\mathfrak{x}_1$ nach $\mathfrak{x}_1^*$ durch den Weg von $\mathfrak{x}_1$ über $\mathfrak{x}_1^*$ nach $\mathfrak{x}_1$ und von dort auf demselben Weg zurück nach $\mathfrak{x}_1^*$. Dieses letzte Wegstückchen soll der Weg sein, den $\mathfrak{x}_1^*$ durchläuft, wenn es nach $\mathfrak{x}_1$ hineinrückt; wir wollen es mit σ' (konjugierte Wege $\sigma^{(\nu)}$) bezeichnen. Dann haben wir, da die Integrale auf dem neuen Weg ersichtlich dieselben Werte haben wie auf dem ursprünglichen

$$S_3 = \sum_{2}^{n} \left\{ \int_{s' s^{(\nu)} + \sigma^{(\nu)}} \int dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}\,; 3)\, dx - \int_{s' + \sigma'} \int_{\sigma^{(\nu)}} dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}\,; 3)\, dx + \int_{\sigma'} \int_{\sigma^{(\nu)}} dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}\,; 3)\, dx \right\}.$$

Beim Grenzübergang $\mathfrak{x}_1^* \to \mathfrak{x}_1$ können wir auf die beiden ersten Integrale der Klammer die Stetigkeitsaussage von oben anwenden, wir erhalten dann im Limes für die zweiten Integrale Null und für die Summe der ersten Integrale

$$S_3^{(1)} = \sum_{2}^{p} \int_{s'} \int_{s^{(\nu)}} dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}\,; 3)\, dx\,,$$

wo s' jetzt der im Grenzfall sich ergebende geschlossene Weg ist. Da jeder Überkreuzung von s' mit einem $s^{(\nu)}$ in einem andern Blatt eine Überkreuzung eines $s^{(\mu)}$, (wobei $\mu = \nu$ sein kann) mit s' in derselben Richtung entspricht, wie aus der Definition der konjugierten

Wege sofort folgt, so ergibt das Vertauschungstheorem (7) und die zur Bestimmung von S_2 angewandte Rechnung sofort

$$(33_3') \qquad S_3^{(1)} = \sum_1^p \eta_j^{(s)}\, \omega_j^{(s)}.$$

Es bleibt nur noch

$$S_3^{(2)} = \lim_{\mathfrak{x}_1^* \to \mathfrak{x}_1} \sum_2^n \int_{\sigma'} \int_{\sigma^{(\nu)}} dF^{(2)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}\,; 3)\, dx$$

zu bestimmen. Aus (5) und (3) folgt sofort

$$S_3^{(2)} = \lim \sum_2^n \Big\{ \int_{\sigma'} (dF^{(1)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1^{(\nu)}) - dF^{(1)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1^{*(\nu)})) + \sum_1^p \int_\sigma d\psi_j \int_{\sigma^{(\nu)}} dF^{(2)}(\mathfrak{x}, \mathfrak{m}_j) \Big\}.$$

Hier werden die letzten Integrale im Limes offenbar Null, es bleibt also nur noch

$$\sum_2^n \int_{\sigma'} (dF^{(1)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1^{(\nu)}) - dF^{(1)}(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1^{*(\nu)})).$$

Hier entwickelt man den Integranden in der Umgebung von $\mathfrak{q}$ nach der Ortsuniformisierenden dieser Stelle nach Formel (2), wobei $\mathfrak{z}$ und t, $\mathfrak{x}_1$ und t_1, $\mathfrak{x}_1^*$ und t_1^* sich entsprechen sollen. Danach müssen wir den Fall unterscheiden, in dem keiner der Punkte $\mathfrak{x}_1^{(\nu)}$, $\mathfrak{x}_1^{*(\nu)}$, in dieser Umgebung von $\mathfrak{q}$ liegt und den Fall, in dem ein Teil oder alle diese Punkte in der Umgebung von $\mathfrak{q}$ liegen. Das erste ist der Fall nur, wenn $\mathfrak{q}$ ein schlichter Punkt von T ist, das letzte, wenn $\mathfrak{q}$ ein endlicher oder unendlicher Verzweigungspunkt ist. Im ersten Fall ergibt sich, daß der Integralwert stetig von t_1^* und jedem $\tau_1^{*(\nu)}$, (dem zu $\mathfrak{x}_1^{*(\nu)}$ gehörigen Wert der Uniformisierenden für die Umgebung von $\mathfrak{q}^{(\nu)}$) abhängt, daß also in der Grenze der Wert jedes Summanden oben Null ist.

Ist aber $\mathfrak{q}$ ein m-blättriger Verzweigungspunkt, dann führt Einsetzen aus (2), Integration und die bei der Herleitung von (21) durchgeführte Rechnung zum Ergebnis, daß die letzte Summe gleich ist

$$(m-1) \log\left(\frac{t_1}{t_1^*}\right) + \text{stetige Funktion von } t_1^* \text{ mit Nullstelle bei } t_1.$$

Umläuft nun t_1^* beim Grenzübergang $\mathfrak{q}$ nicht, so ist das im Limes Null, umläuft es $\mathfrak{q}$, so ist der Grenzwert ein Vielfaches von $2\pi i$. Wir erhalten also

$$(33_3'') \qquad S_3^{(2)} = -2(m-1)\, \varrho \pi i,$$

wobei ϱ angibt, wie oft und in welchem Sinn $\mathfrak{x}_1^*$ beim Grenzübergang den Punkt $\mathfrak{q}$ umläuft. Dieser Ausdruck gilt auch für schlichte Punkte, da dann $m = 1$ ist. Es ist also

$$(33_3) \qquad S_3 = -2(m-1)\, \varrho \pi i + \sum_1^p \eta_j^{(s)}\, \omega_j^{(s)}.$$

Schließt sich s, so wird der Logarithmus in (32') gleich $2M\pi i$, wobei M angibt, wie oft x_1^* den Punkt x_2 umläuft, wenn $\mathfrak{x}_1^*$ den Weg s durchwandert. Insgesamt erhalten wir also

$$(34) \qquad \log \Omega(\mathfrak{x}_1^*, \mathfrak{x}_2) - \log \Omega(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = \pi i(2M - N + (m-1)\,\varrho) - \sum_1^p \eta_j^{(s)} \int_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{x}_2} d\psi_j(\mathfrak{x}) - \frac{1}{2} \sum_1^p \omega_j^{(s)}\, \eta_j^{(s)}.$$

Wir machen von (34) Anwendung für den Fall, daß $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_1^-$ auf dem linken Ufer eines der Schnitte in T^* liegt und s ganz in T^* verläuft. Dann ist $\mathfrak{x}_1^* = \mathfrak{x}_1^+$ der $\mathfrak{x}_1^-$ auf dem andern Ufer des Schnittes entsprechende Punkt. Es ergibt sich dann:

Für die Schnitte l_a ist $M = N = 0$, $\varrho = 1$, $\eta_j^{(s)} = \omega_j^{(s)} = 0$, also

$$(35_1) \qquad \log \Omega(\mathfrak{x}_1^+, \mathfrak{x}_2) - \log \Omega(\mathfrak{x}_1^-, \mathfrak{x}_2) = (m-1)\pi i.$$

Für jeden Schnitt l_∞ ist $M = -m$, $N = 0$, $\varrho = 1$, $\eta_j^{(s)} = \omega_j^{(s)} = 0$, also, wenn wir noch wie früher k statt m schreiben,

$$(35_2) \qquad \log \Omega(\mathfrak{x}_1^+, \mathfrak{x}_2) - \log \Omega(\mathfrak{x}_1^-, \mathfrak{x}_2) = -(k+1)\pi i.$$

Beides stimmt mit den früheren Ergebnissen (11) und (12) bestens überein.

Für die übrigen Schnitte ist $m - 1 = 0$, und für die Schnitte (c_ν) noch $N = M = 0$. Es gelingt aber nicht, allgemein über den Wert von N zu entscheiden, so daß wir für die (a_ν) und (b_ν) stets ein nur bei Spezialisierung von T, T' und $\mathfrak{x}_2$ angebbares Vielfaches von πi in unseren Formeln behalten.

In bekannter Weise erhält man aus (34): Sprung am Schnitt (a_ν):

$$(36_1) \qquad \log \Omega(\mathfrak{x}_1^+, \mathfrak{x}_2) - \log \Omega(\mathfrak{x}_1^-, \mathfrak{x}_2) = N_\nu' \pi i + \sum_1^p \eta_{j\nu} \int_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{x}_2} d\psi_j(\mathfrak{x}) - \frac{1}{2} \sum_1^p \omega_{j\nu}\, \eta_{j\nu},$$

Sprung am Schnitt (b_ν)

$$(36_2) \qquad \log \Omega(\mathfrak{x}_1^+, \mathfrak{x}_2) - \log \Omega(\mathfrak{x}_1^-, \mathfrak{x}_2) = N_\nu'' \pi i - \sum_1^p \eta_{j,\nu+p} \int_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{x}_2} d\psi_j(\mathfrak{x}) - \frac{1}{2} \sum_1^p \omega_{j,\nu+p} \eta_{j,\nu+p},$$

Sprung am Schnitt (c_ν)

$$(36_3) \qquad \log \Omega(\mathfrak{x}_1^+, \mathfrak{x}_2) - \log \Omega(\mathfrak{x}_1^-, \mathfrak{x}_2) = 0.$$

Aus diesen Formeln und (25) und (28) folgt sofort das Verhalten von $\Theta(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ an den Schnitten. Man muß nur noch beachten, daß $\log \frac{d\psi(\mathfrak{z})}{dz}$ ein Integral dritter Gattung leicht angebbaren Verhaltens ist. Das Verhalten von Θ an den Schnitten (l_a) und (l_∞) ist durch die Konstruktion bekannt, an den andern Schnitten findet man: An den (a_ν) ist (m_ν' ganz)

$$(37_1) \qquad \Theta(\mathfrak{x}_1^+, \mathfrak{x}_2) = \Theta(\mathfrak{x}_1^-, \mathfrak{x}_2) \cdot \exp\left\{\frac{m_\nu' \pi i}{2p} + \frac{1}{p}\sum_j \eta_{j\nu} \int_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{x}_2} d\psi_j + \frac{1}{2p}\sum_j \sum_k \eta_{j\nu} \int_{c_k}^{\mathfrak{x}_2} d\psi_j - \frac{1}{p}\sum_j \omega_{j\nu}\eta_{j\nu}\right\},$$

an den (b_ν) ist (m_ν'' ganz)

$$(37_2) \qquad \Theta(\mathfrak{x}_1^+, \mathfrak{x}_2) = \Theta(\mathfrak{x}_1^-, \mathfrak{x}_2) \exp\left\{\frac{m_\nu'' \pi i}{2p} - \frac{1}{p}\sum_j \eta_{j,\nu+p} \int_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{x}_2} d\psi_j - \frac{1}{2p}\sum_j \sum_k \eta_{j,\nu+p} \int_{c_k}^{\mathfrak{x}_2} d\psi_j - \frac{1}{p}\sum_j \omega_{j,\nu+p}\eta_{j,\nu+p}\right\}$$

an den (c_ν) ist

$$\Theta(\mathfrak{x}_1^+, \mathfrak{x}_2) = \Theta(\mathfrak{x}_1^-, \mathfrak{x}_2).$$

§ 4. Die Prymsche Funktion $\Pi \left| \begin{matrix} \mathfrak{x}_1 & \mathfrak{x}_2 \\ & \mathfrak{z} \end{matrix} \right|$.

Prym geht bei der Konstruktion seiner Primfunktion aus von einer Funktion von drei Argumenten $\Pi \left| \begin{matrix} \mathfrak{x}_1 & \mathfrak{x}_2 \\ & \mathfrak{z} \end{matrix} \right|$. [13]) Diese ist als Funktion von $\mathfrak{z}$ eindeutig auf T'', der von $\mathfrak{x}_1$ durch den Schnitt (l_1) und von $\mathfrak{x}_2$ durch den Schnitt (l_2) nach $\mathfrak{o}$ hin aufgeschlitzten Fläche T'. Ferner ist

$$(38) \qquad \begin{aligned} \Pi \left| \begin{matrix} \mathfrak{x}_1 & \mathfrak{x}_2 \\ & \mathfrak{z} \end{matrix} \right| &= \log \frac{1}{t} + t\,\mathfrak{P}(t) \quad \text{bei } \mathfrak{x}_1, \\ &= -\log \frac{1}{t} + \mathfrak{P}(t) \quad \text{bei } \mathfrak{x}_2, \\ &= \mathfrak{P}(t) \quad \text{sonst.} \end{aligned}$$

[13]) Prym-Rost, 2. Teil, S. 90.

Längs der Schnitte besitzt Π von $\mathfrak{z}$ unabhängige Sprünge. Dieser Sprung [14]) $\Pi\left|\begin{matrix}\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2\\ \mathfrak{z}^+\end{matrix}\right| - \Pi\left|\begin{matrix}\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2\\ \mathfrak{z}^-\end{matrix}\right|$ ist $2\pi i$ an (l_1), $-2\pi i$ an (l_2) und ein zwischen den Grenzen $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ erstrecktes (von ν abhängiges) Integral erster Gattung an den (a_ν) und (b_ν) [15]). Für alle andern Schnitte ist er Null. Ferner gilt für Π der Vertauschungssatz

$$\Pi\left|\begin{matrix}\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2\\ \mathfrak{z}\end{matrix}\right| = \Pi\left|\begin{matrix}\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{z}\\ \mathfrak{x}_2\end{matrix}\right| \pm \pi i. \tag{39}$$

Π ist also im wesentlichen ein Integral 3. Gattung, das durch das Verhalten an der Unstetigkeitstelle $\mathfrak{x}_1$ (das $t\,\mathfrak{P}(t)$ an Stelle von $\mathfrak{P}(t)$) normiert ist. Gerade diese Normierung bereitet Schwierigkeiten, wenn man die Funktion Π wirklich herstellen will und ihre Existenz nicht nur einem Existenztheorem entnimmt wie Prym. Deshalb ist es wichtig, daß Π durch einen ähnlichen Grenzübergang aus $Q^{\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}}_{\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2}$ entsteht wie $\log \Omega(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$.

Wir bilden nämlich

$$\lim_{\mathfrak{z}_1 \to \mathfrak{x}_1} \{-\log(x_1 - z_1) + Q^{\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}}_{\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2}\} = L(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2). \tag{40}$$

Aus (14) folgt dann

$$\begin{aligned} L(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) &= \lim_{\mathfrak{z}_1 \to \mathfrak{x}_1} \left\{\log \frac{z - x_2}{(z - x_1)(x_2 - z_1)} - \sum_2^n Q^{\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}}_{\mathfrak{x}_1^{(\nu)}\mathfrak{x}_2^{(\nu)}}\right\} \\ &= \log \frac{z - x_2}{(z - x_1)(x_2 - x_1)} - \sum_2^n Q^{\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}}_{\mathfrak{x}_1^{(\nu)}\mathfrak{x}_2^{(\nu)}}. \end{aligned} \tag{41}$$

Ist weder $\mathfrak{x}_1$ noch $\mathfrak{x}_2$ ein Verzweigungspunkt, so hat L auf der ganzen Fläche dasselbe Verhalten wie Π. Ist $\mathfrak{x}_2$ ein m-blättriger Verzweigungspunkt, so verhält sich dort die Integralsumme wie $-(m-1)\log t$, der Logarithmus wie $m \log t$, also ändert sich nichts. Dies gilt auch für unendlich fernes $\mathfrak{x}_2$.

Wir setzen nun fest, daß der Integrationsweg $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2$ längs der Schnitte (l_1) und (l_2) laufen soll, daß der Weg $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{z}$ ganz in T'' genommen wird und daß $\log(x_1 - z_1)$ der Hauptwert dieses Logarithmus ist.

Bildet man nun

$$L(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{z}) = \lim_{\mathfrak{x}_1 \to \mathfrak{z}_1} \{-\log(z_1 - x_1) + Q^{\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2}_{\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}}\},$$

so folgt durch Anwendung des Vertauschungstheorems (7), da bei Beschränkung des Weges $\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{z}$ auf T'' dieser den Weg $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2$ nicht überkreuzt,

$$\begin{aligned} L(\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{z}) &= \lim \{\pm \pi i - \log(x_1 - z_1) + Q^{\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}}_{\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2}\} \\ &= \pm \pi i + L(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2). \end{aligned} \tag{42}$$

L erfüllt also auch den für Π gültigen Vertauschungssatz.

Wir untersuchen noch das Verhalten von L, falls $\mathfrak{z}$ einen auf T geschlossenen Weg s durchläuft.

Aus der Definitionsgleichung (40) von L folgt sofort, daß

$$L(\mathfrak{z}^*, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) - L(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = \lim_{\mathfrak{z}_1 \to \mathfrak{x}_1} Q^{\mathfrak{z}\mathfrak{z}^*}_{\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2} = Q^{\mathfrak{z}\mathfrak{z}^*}_{\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2} \tag{43}$$

ist. Man kann dies auch aus (41) erschließen, doch nicht so einfach. Lassen wir nun $\mathfrak{z}^*$ wandern, bis es einen geschlossenen Weg s durchlaufen hat, so findet man durch Anwendung von (7) und (10)

---

[14]) $\mathfrak{z}^+$ bedeutet den Punkt $\mathfrak{z}$, aufgefaßt als Punkt des rechten Ufers des Schnittes, $\mathfrak{z}^-$ denselben Punkt als Punkt des linken Ufers.

[15]) Prym-Rost normieren transzendent, sie haben also an den Schnitten den Sprung Null.

$$(44)\quad L(\mathfrak{z}^*, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) - L(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = 2k\pi i + Q_s^{\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2} = 2k\pi i - \sum_1^p \eta_j^{(s)} \int_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{x}_2} d\psi_j(\mathfrak{x}),$$

wobei k die mit Vorzeichen gezählte Anzahl der Überkreuzungen zwischen s und $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2$ ist.

Wenden wir (44) speziell an, um die Sprünge von L an den Schnitten zu bestimmen.

Längs l_1 ist $k = 1$, $\eta_j^{(s)} = 0$,

$$(45_1)\qquad L(\mathfrak{z}^+, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) - L(\mathfrak{z}^-, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = 2\pi i.$$

Längs (l_2) ist $k = -1$, $\eta_j^{(s)} = 0$,

$$(45_2)\qquad L(\mathfrak{z}^+, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) - L(\mathfrak{z}^-, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = -2\pi i.$$

Längs aller anderern Schnitte ist $k = 0$.

Daher erhalten wir längs (a_ν)

$$(46_1)\qquad L(\mathfrak{z}^+, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) - L(\mathfrak{z}^-, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = \sum_1^p \eta_{j\nu} \int_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{x}_2} d\psi_j(\mathfrak{x}).$$

Längs (b_ν) ebenso

$$(46_2)\qquad L(\mathfrak{z}^+, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) - L(\mathfrak{z}^-, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = -\sum_1^p \eta_{j,\nu+p} \int_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{x}_2} d\psi_j(\mathfrak{z})$$

und längs (c_ν) den Sprung Null.

D. h. aber:

Abgesehen von der Normierung hat $L(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ mit der Prymschen Funktion $\Pi \left| \begin{matrix} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \\ \mathfrak{z} \end{matrix} \right|$ alle Eigenschaften gemeinsam.

Daraus folgt aber:

$$(47)\qquad L(\mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) - \Pi \left| \begin{matrix} \mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \\ \mathfrak{z} \end{matrix} \right|$$

ist auf T' überall endlich und am Rand mit von $\mathfrak{z}$ unabhängigen Sprüngen behaftet. Seine Ableitung nach $\mathfrak{z}$ ist also eine Funktion der Fläche, d. h. — wegen der Eigenschaft (38) von Π und L — es ist die Differenz (47) ein Integral erster Gattung mit der unteren Grenze $\mathfrak{x}_1$. Aus dem Vertauschungssatz (39) folgt noch, daß es in $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}_2$ symmetrisch gebaut sein muß, also die Gestalt haben muß

$$\sum_j \sum_k a_{jk} \int_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{z}} d\psi_j(\mathfrak{z}) \int_{\mathfrak{x}_1}^{\mathfrak{x}_2} d\psi_k(\mathfrak{x})$$

mit $a_{jk} = a_{kj}$.

Damit ist nachgewiesen, daß, bis auf ein additives Normierungsglied, L mit Π identisch ist. Hieran schließt sich dann die weitere Konstruktion der Primfunktion, wie sie bei Prym geschildert ist.

Eingegangen 1. Februar 1931.

Algebraische Repräsentanten der Funktionen „bis auf eine Menge vom Maße Null".

Von *J. v. Neumann* in Berlin.

Einleitung.

Wir befassen uns mit komplexwertigen, beschränkten, für alle reellen x, und nur diese, definierten Funktionen $f(x)$, die im Lebesgueschen Sinne meßbar sind. (Verallgemeinerungen auf andere Definitionsbereiche sollen am Schlusse erfolgen.) Wenn zwei Funktionen dieser Art, $f(x)$ und $g(x)$, als äquivalent bezeichnet werden, falls die Menge aller x, für die $f(x) \neq g(x)$ ist, das Lebesguesche Maß 0 hat — in Symbolen $f \sim g$ — so erkennt man: $f \sim f$, aus $f \sim g$ folgt $g \sim f$, aus $f \sim g$, $g \sim h$ folgt $f \sim h$. Folglich zerfällt die Gesamtheit unserer f in paarweise elementfremde Äquivalenzklassen untereinander äquivalenter f.

Unter einem „allgemeineren Polynom" $p(u_1, \ldots, u_n)$ verstehen wir ein Linearaggregat beliebiger (aber endlich vieler) Potenzprodukte der $u_1, \ldots, u_n$ und ihrer komplex-konjugierten $\overline{u_1}, \ldots, \overline{u_n}$ (mit komplexen Zahlen als Koeffizienten). Da aus $f_1 \sim g_1, \ldots, f_n \sim g_n$ $p(f_1, \ldots, f_n) \sim p(g_1, \ldots, g_n)$ folgt, hängt die Klasse $\mathfrak{R}$ von $p(f_1, \ldots, f_n)$ nur von den Klassen $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_n$ der $f_1, \ldots, f_n$ ab. Wir nennen $\mathfrak{R}$ darum $p(\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_n)$ — insbesondere die Klasse der Konstanten a wieder a.

Im Zusammenhang mit gewissen Untersuchungen über unitäre Funktionaloperatoren, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll, hat Herr A. Haar im mündlichen Gespräch mit dem Verfasser die folgende Frage formuliert: Ist es möglich jeder Äquivalenzklasse $\mathfrak{R}$ einen Repräsentanten $f = f_{\mathfrak{R}}$ (eine Funktion aus $\mathfrak{R}$!) derart zuzuordnen, daß für jedes allgemeinere Polynom $p(u_1, \ldots, u_n)$ und irgendwelche Klassen $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_n$, aus $p(\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_n) = 0$ identisch $p(f_{\mathfrak{R}_1}(x), \ldots, f_{\mathfrak{R}_n}(x)) \equiv 0$ folgt? (D. h.: Wenn für irgendwelche Funktionen $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ $p(f_1(x), \ldots, f_n(x)) = 0$ mit Ausnahme einer x-Menge vom Lebesgueschen Maße 0 gilt, so gilt $p(f_{\mathfrak{R}_1}(x), \ldots, f_{\mathfrak{R}_n}(x)) = 0$ für alle x ohne Ausnahme — und dabei sollen $f_{\mathfrak{R}_1}(x), \ldots, f_{\mathfrak{R}_n}(x)$ nur von den bzw. Klassen $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_n$ von $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ abhängen, und auch selbst zu diesen Klassen gehören) [1].

[1]) Es ist erwähnenswert, daß diese Aufgabe ohne die Zusatzbedingung der Beschränktheit unlösbar ist. Sei nämlich ξ eine komplexe Zahl, und $f^*(x)$, $g^*_\xi(x)$, $e^*(x)$ die Repräsentanten der Klassen der Funktionen $f(x) = x$, $g_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-\xi} & \text{für } x \neq \xi \\ 0 & \text{für } x = \xi \end{cases}$, $e(x) = 1$. Da für $x \neq \xi$ $(f(x) - \xi e(x))\, g_\xi(x) - e(x) = 0$ gilt, muß für alle x $(f^*(x) - \xi\, e^*(x))\, g^*_\xi(x) - e^*(x) = 0$ sein. Daher kann nie auf einmal $f^*(x) = \xi$, $e^*(x) = 1$ sein, insbesondere nicht $f^*(\xi) = \xi$, $e^*(\xi) = 1$.

Variieren wir nun ξ, dann müssen die Mengen der ξ mit $f^*(\xi) \neq f(\xi)\ (= \xi)$ und der ξ mit $e^*(\xi) \neq e(\xi)\ (= 1)$ zusammen alle ξ umfassen — was unmöglich ist, da beide das Lebesguesche Maß 0 haben sollten.

Ein solches Repräsentanten-System $f_{\mathfrak{R}}(x)$ wollen wir ein algebraisches Repräsentanten-System der Äquivalenzklassen nennen. Im ersten Teile der Arbeit zeigen wir, daß solche Systeme existieren, im zweiten nehmen wir einige Verallgemeinerungen vor, und beweisen einige allgemeingültige Eigenschaften dieser Systeme.

I. Beweis des Existenssatzes.

1. Wir betrachten zuerst im Lebesgueschen Sinne meßbare Mengen reeller Zahlen. Zwei solche Mengen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ mögen äquivalent heißen, wenn ihre „Unterschiedsmenge" $(\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N}) - (\mathfrak{M} \times \mathfrak{N})$ das Lebesguesche Maß 0 hat — in Symbolen $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$. Es ist $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}$, aus $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ folgt $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{M}$, aus $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{P}$ folgt $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}$. Folglich zerfällt die Gesamtheit unserer $\mathfrak{M}$ in paarweise elementfremde Äquivalenzklassen untereinander äquivalenter $\mathfrak{M}$. Da aus $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{N}_2$ $\mathfrak{M}_1 \dotplus \mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2$ folgt, hängt die Klasse von $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ bzw. $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ bzw. $\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2$ nur von den Klassen $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ von $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ ab. Wir nennen darum diese Klasse $\mathfrak{k}_1 \dotplus \mathfrak{k}_2$ bzw. $\mathfrak{k}_1 \times \mathfrak{k}_2$ bzw. $\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_2$ — und die Klasse der leeren Menge 0 wieder 0, die der Menge 1 aller Zahlen wieder 1.

Wir wollen nun jeder Äquivalenzklasse $\mathfrak{k}$ einen Repräsentanten $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}}$ (eine Menge aus $\mathfrak{k}$!) derart zuordnen, daß jede Klassen-Relation $\mathfrak{k}_1 \times \cdots \times \mathfrak{k}_p \times (1 - \mathfrak{k}'_1) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{k}'_q) = 0$ die Mengen-Relation $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_1} \times \cdots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_p} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}'_1}) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}'_q}) = 0$ nach sich zieht. (D. h.: Wenn für irgendwelche Mengen $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}'_1, \ldots, \mathfrak{M}'_q$ $\mathfrak{M}_1 \times \cdots \times \mathfrak{M}_p \times (1 - \mathfrak{M}'_1) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{M}'_q)$ das Lebesguesche Maß Null hat, so ist $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_1} \times \cdots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_p} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}'_1}) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}'_q})$ leer — und dabei sollen $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_p}$, $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}'_1}, \ldots, \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}'_q}$ nur von den bzw. Klassen der $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}'_1, \ldots, \mathfrak{M}'_q$ abhängen, und auch selbst zu diesen Klassen gehören.) —

Wenn $\mathfrak{M}$ eine meßbare Menge ist, und x eine reelle Zahl, so können wir für jedes $\delta > 0$ das Intervall $I_\delta(x) : x - \delta, x + \delta$ bilden, und den Bruch $\dfrac{\text{Maß } (I_\delta(x) \times \mathfrak{M})}{2\delta}$ betrachten. Für $\delta \to 0$ heiße sein Limes superior $\overline{\Delta}(x, \mathfrak{M})$, sein Limes inferior $\underline{\Delta}(x, \mathfrak{M})$, es ist stets $0 \leqq \underline{\Delta} \leqq \overline{\Delta} \leqq 1$. Nach einem bekannten Satze von Lebesgue gilt in ganz $\mathfrak{M}$, mit Ausnahme einer Menge vom Maße 0, $\underline{\Delta}(x, \mathfrak{M}) = 1$ [2]); und da offenbar $\overline{\Delta}(x, \mathfrak{M}) = 1 - \underline{\Delta}(x, 1 - \mathfrak{M})$ ist, ergibt Anwendung auf $1 - \mathfrak{M}$: Außerhalb $\mathfrak{M}$ gilt, mit Ausnahme einer Menge vom Maße 0, $\overline{\Delta}(x, \mathfrak{M}) = 0$. Im ersteren Falle ist natürlich auch $\overline{\Delta} = 1$, im letzteren auch $\underline{\Delta} = 1$. Da aus $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ $\overline{\Delta}(x, \mathfrak{M}) = \overline{\Delta}(x, \mathfrak{N})$, $\underline{\Delta}(x, \mathfrak{M}) = \underline{\Delta}(x, \mathfrak{N})$ folgt, hängen $\overline{\Delta}$, $\underline{\Delta}$ nur von der Klasse $\mathfrak{k}$ von $\mathfrak{M}$ ab, wir können also auch $\overline{\Delta}(x, \mathfrak{k})$, $\underline{\Delta}(x, \mathfrak{k})$ schreiben. Die Menge aller x mit $\overline{\Delta}(x, \mathfrak{k}) = \underline{\Delta}(x, \mathfrak{k}) = 1$ heiße $\overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}}$, die Komplementärmenge aller x mit $\overline{\Delta}(x, \mathfrak{k}) = \underline{\Delta}(x, \mathfrak{k}) = 0$ heiße $\underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}}$; nach dem vorhin Gesagten gehören $\overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}}$, $\underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}}$ beide zu $\mathfrak{k}$.

Man erkennt mühelos die folgenden Eigenschaften der $\overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}}$, $\underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}}$:

$$\overline{\mathfrak{M}}_0 = \underline{\mathfrak{M}}_0 = 0; \quad \overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}} < \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}}; \quad \overline{\mathfrak{M}}_{1-\mathfrak{k}} = 1 - \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}},$$

$$\underline{\mathfrak{M}}_{1-\mathfrak{k}} = 1 - \overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}}; \quad \overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_1} \dotplus \overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_2} < \overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_1 \dotplus \mathfrak{k}_2} < \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_1} \dotplus \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_2} = \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_1 \dotplus \mathfrak{k}_2};$$

$$\overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_1 \times \mathfrak{k}_2} = \overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_1} \times \overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_2} < \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_1 \times \mathfrak{k}_2} < \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_1} \times \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_2}. \; —$$

Da für ein Repräsentanten-System $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}}$ u. a. $\mathfrak{k}_1 \times \mathfrak{k}_2 \times (1 - \mathfrak{k}_3) = 0$ $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_1} \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_2} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_3}) = 0$ nach sich zieht, d. h. $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_1} \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_2} < \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_3}$; ferner $(1 - \mathfrak{k}_1) \times \mathfrak{k}_3 = 0$ $(1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_1}) \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_3} = 0$ und $(1 - \mathfrak{k}_2) \times \mathfrak{k}_3 = 0$ $(1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_2}) \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_3} = 0$, also $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_1} > \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_3}$ und $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_2} > \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_3}$, d. h. $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_1} \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_2} > \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_3}$ — so haben alle drei Klassen-Relationen $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_1} \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_2} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_3}$ zur Folge. Da sie für $\mathfrak{k}_1 \times \mathfrak{k}_2 = \mathfrak{k}_3$

[2]) Vgl. Lebesgue, Annales de l'École Normale (3) **27** (1910), S. 407.

wirklich alle drei bestehen, ist $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_1} \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_2} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_1 \times \mathfrak{k}_2}$. Durch analoge Betrachtungen zeigt man $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_1} \dotplus \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_2} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_1 \dotplus \mathfrak{k}_2}$, $\mathfrak{M}_{1-\mathfrak{k}} = 1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}}$, sowie $\mathfrak{M}_0 = 0$, $\mathfrak{M}_1 = 1$. Da nun $\overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}}$ und $\underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}}$ nur diese Bedingungen nicht restlos erfüllen, sind sie als Repräsentanten unbrauchbar. Wir werden aber sehen, daß die Repräsentanten-Wahl mit $\overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}} < \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}} < \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}}$ gelingt.

Hierzu berufen wir uns auf den Wohlordnungssatz: Die Menge K aller Äquivalenzklassen $\mathfrak{k}$ sei nach einem geeigneten Wohlordnungstypus α_0 wohlgeordnet, d. h. die $\mathfrak{k}$ den Ordnungszahlen $\alpha < \alpha_0$ eineindeutig zugeordnet: $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_\alpha$ entspreche α. Wir wollen die $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_\alpha}$ so bestimmen, daß allgemein

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\beta_1}} \times \cdots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\beta_p}} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\gamma_1}}) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\gamma_q}}) < \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_{\beta_1} \times \cdots \times \mathfrak{k}_{\beta_p} \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_1}) \times \cdots \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_q})}$$

gilt. Dies hat die Konsequenz, daß die $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_\alpha}$ eine Repräsentation bilden, wie wir es w. o. wünschten; denn für $\mathfrak{k}_{\beta_1} \times \cdots \times \mathfrak{k}_{\beta_p} \times (1 - \mathfrak{k}_{\gamma_1}) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{k}_{\gamma_q}) = 0$ ist die rechte Seite $= \underline{\mathfrak{M}}_0 = 0$, also auch die linke $= 0$. Ferner folgt daraus $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_\alpha} < \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_\alpha}$. Ersetzen wir hierin $\mathfrak{k}_\alpha$ durch $1 - \mathfrak{k}_\alpha$ (das ja auch ein $\mathfrak{k}_{\alpha'}$ ist), so ergibt sich $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_\alpha} > \overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_\alpha}$ — also $\overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_\alpha} < \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_\alpha} < \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_\alpha}$, d. h. das Repräsentanten-System ist von der vorher beschriebenen Art. Die Konstruktion dieser $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_\alpha}$ vollziehen wir durch transfinite Rekursion: Nehmen wir an, daß für ein $\alpha_1 < \alpha_0$ die Definition der $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_\alpha}$ mit $\alpha < \alpha_1$ bereits erfolgt sei, und daß die obige Mengen-Implikation für alle $\beta_1, \ldots, \beta_p, \gamma_1, \ldots, \gamma_q < \alpha_1$ erfüllt ist — es gilt dann $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\alpha_1}}$ so zu definieren, daß diese Beziehung auch für alle $\beta_1, \ldots, \beta_p, \gamma_1, \ldots, \gamma_q \leqq \alpha_1$ zutrifft. Da wir keine wirklich neue Bedingung vor uns haben, solange nicht ein β oder γ tatsächlich $= \alpha_1$ ist; da ferner, wenn sowohl ein β als auch ein $\gamma = \alpha_1$ ist, auf beiden Seiten unserer Relation 0 steht, also wieder keine Bedingung vorliegt; und da schließlich, wenn mehrere β (oder γ) $= \alpha_1$ sind, alle bis auf eines fortgelassen werden können, ohne unsere Beziehung zu ändern — so dürfen wir annehmen, daß genau ein $\beta = \alpha_1$ ist, und kein γ, oder umgekehrt. Sei dies β bzw. γ das letzte, d. h. β_p bzw. γ_q, schreiben wir noch $p+1$ bzw. $q+1$ für p bzw. q, so lauten die für $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\alpha_1}}$ hinzukommenden Bedingungen so:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\beta_1}} \times \cdots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\beta_p}} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\gamma_1}}) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\gamma_q}}) \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\alpha_1}} \\
&< \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_{\beta_1} \times \cdots \times \mathfrak{k}_{\beta_p} \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_1}) \times \cdots \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_q}) \times \mathfrak{k}_{\alpha_1}}, \\
&\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\beta_1}} \times \cdots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\beta_p}} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\gamma_1}}) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\gamma_q}}) \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\alpha_1}}) \\
&< \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_{\beta_1} \times \cdots \times \mathfrak{k}_{\beta_p} \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_1}) \times \cdots \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_q}) \times \mathfrak{k}_{\alpha_1}}.
\end{aligned}\right\} \beta_1, \ldots, \beta_p, \gamma_1, \ldots, \gamma_q < \alpha_1,$$

Diese Bedingungen können auch so geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\alpha_1}} &< \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_{\beta_1} \times \cdots \times \mathfrak{k}_{\beta_p} \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_1}) \times \cdots \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_q}) \times \mathfrak{k}_{\alpha_1}} \\
&\dotplus (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\beta_1}}) \times \cdots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\beta_p}} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\gamma_1}}) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\gamma_q}})), \\
\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\alpha_1}} &> (1 - \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_{\beta_1} \times \cdots \times \mathfrak{k}_{\beta_p} \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_1}) \times \cdots \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_q}) \times (1-\mathfrak{k}_{\alpha_1})}) \\
&\times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\beta_1}} \times \cdots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\beta_p}} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\gamma_1}}) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\gamma_q}}).
\end{aligned}$$

Damit diese Bedingungen durch ein $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\alpha_1}}$ für alle Komplexe $\beta_1, \ldots, \beta_p, \gamma_1, \ldots, \gamma_q < \alpha_1$ simultan befriedigt werden können, muß die rechte Seite der ersten Gleichung für jeden Komplex $\beta_1, \ldots, \beta_p, \gamma_1, \ldots, \gamma_q < \alpha_1$ $>$ sein, als die rechte Seite der zweiten für jeden Komplex $\beta'_1, \ldots, \beta'_p, \gamma'_1, \ldots, \gamma'_q < \alpha_1$. (Dann können wir $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\alpha_1}}$ z. B. der Vereinigungsmenge der rechten Seiten der zweiten Gleichung für alle zugelassenen β, γ-Komplexe gleichsetzen.) Die genannte Mengen-Implikation lautet:

$$(1 - \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_{\beta_1'} \times \cdots \times \mathfrak{k}_{\beta_r'} \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_1}) \times \cdots \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_s'}) \times (1-\mathfrak{k}_{\alpha_1})})$$
$$\times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\beta_1'}} \times \cdots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\beta_r'}} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\gamma_1'}}) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\gamma_s'}})$$
$$< \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_{\beta_1} \times \cdots \times \mathfrak{k}_{\beta_p} \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_1}) \times \cdots \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_q}) \times \mathfrak{k}_{\alpha_1}}$$
$$\dot{+} (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\beta_1}} \times \cdots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\beta_p'}} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\gamma_1}}) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\gamma_q}})),$$

oder

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\beta_1'}} \times \cdots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\beta_r'}} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\gamma_1}}) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\gamma_s'}})$$
$$\times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\beta_1}} \times \cdots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\beta_p}} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\gamma_1}}) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\gamma_q}})$$
$$< \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_{\beta_1'} \times \cdots \times \mathfrak{k}_{\beta_r'} \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_1'}) \times \cdots \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_s'}) \times (1-\mathfrak{k}_{\alpha_1})}$$
$$\dot{+} \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_{\beta_1} \times \cdots \times \mathfrak{k}_{\beta_p} \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_1}) \times \cdots \times (1-\mathfrak{k}_{\beta_q}) \times \mathfrak{k}_{\alpha_1}}$$ [3]).

Nun ist die rechte Seite

$$= \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_{\beta_1'} \times \cdots \times \mathfrak{k}_{\beta_r'} \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_1'}) \times \cdots \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_s'}) \times (1-\mathfrak{k}_{\alpha_1})} \dot{+} \mathfrak{k}_{\beta_1} \times \cdots \times \mathfrak{k}_{\beta_p} \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_1}) \times \cdots \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_q}) \times \mathfrak{k}_{\alpha_1}$$
$$> \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_{\beta_1'} \times \cdots \times \mathfrak{k}_{\beta_r'} \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_1'}) \times \cdots \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_s'}) \times \mathfrak{k}_{\beta_1} \times \cdots \times \mathfrak{k}_{\beta_p} \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_1}) \times \cdots \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_q})}$$ [4]).

Somit genügt es, wenn

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\beta_1'}} \times \cdots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\beta_r'}} \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_1 \beta} \times \cdots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\beta_p}} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\gamma_1'}}) \times \cdots$$
$$\times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\gamma_s'}}) \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\gamma_1}}) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_{\gamma_q}})$$
$$< \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{k}_{\beta_1'} \times \cdots \times \mathfrak{k}_{\beta_r'} \times \mathfrak{k}_{\beta_1} \times \cdots \times \mathfrak{k}_{\beta_p} \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_1'}) \times \cdots \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_s'}) \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_1}) \times \cdots \times (1-\mathfrak{k}_{\gamma_q})}$$

gilt — aber dies folgt, da $\beta_1', \ldots, \beta_r', \beta_1, \ldots, \beta_p, \gamma_1', \ldots, \gamma_s', \gamma_1, \ldots, \gamma_q < \alpha_1$ sind, aus unserer Prämisse.

Damit ist die Konstruktion des Repräsentanten-Systems der $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}_\alpha}$, $\alpha < \alpha_0$, d. h. der $\mathfrak{M}_\mathfrak{k}$, durchgeführt.

2. Wir betrachten nunmehr alle reellen, beschränkten, für alle reellen x, und nur diese, definierten Funktionen $f(x)$, die im Lebesgueschen Sinne meßbar sind. Unter Beachtung dieser Realitäts-Bedingung können wir die in der Einleitung beschriebene Äquivalenzklassen-Einteilung auch für diese Funktionen vornehmen, und ein algebraisches Repräsentanten-System $f_\mathfrak{R}(x)$ ihrer Klassen $\mathfrak{R}$ suchen — wobei wir an Stelle der komplexen allgemeineren Polynome sinngemäß die reellen gewöhnlichen Polynome treten lassen. D. h. wir beschränken die Fragestellung der Einleitung aufs Reelle. Diese Aufgabe werden wir nun, mit Hilfe des Mengen-Repräsentanten-Systems $\mathfrak{M}_\mathfrak{k}$, lösen.

a sei eine reelle rationale Zahl. $\mathfrak{N}(a, f)$ sei die Menge aller x mit $f(x) < a$, $\mathfrak{k}(a, f)$ die Klasse von $\mathfrak{N}(a, f)$, wir definieren $f^*(x)$ als untere Grenze aller rationalen a, für die x zu $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}(a,f)}$ gehört. Da $f(x)$ beschränkt ist, also für ein festes C stets $\leqq C$, $\geqq -C$, ist für $a > C$ bzw. $a \leqq -C$ $\mathfrak{N}(a, f) = 1$ bzw. $= 0$, $\mathfrak{k}(a, f) = 1$ bzw. $= 0$, $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}(a,f)} = 1$ bzw. $= 0$, also x sicher Element bzw. sicher nicht Element von $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}(a,f)}$ — somit ist $f^*(x)$ endlich und $\leqq C$, $\geqq -C$, d. h. beschränkt. Für $f \sim g$ ist $\mathfrak{k}(a, f) = \mathfrak{k}(a, g)$ für jedes a, also $f^* \equiv g^*$, d. h. f^* hängt nur von der Klasse von f ab.

Die Unterschiedsmenge von $\mathfrak{N}(a, f)$ und $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}(a,f)}$ ist eine Menge vom Lebesgueschen Maße 0, also auch die Vereinigungsmenge derselben für alle rationalen a (bei festem f!). Gehört aber x nicht zu ihr, so gehört es $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}(a,f)}$ dann und nur dann an, wenn es zu $\mathfrak{N}(a, f)$

---

[3]) Die Mengen-Implikationen $(1 - \mathfrak{R}) \times \mathfrak{S} < \mathfrak{R}' \dot{+} (1 - \mathfrak{S}')$ und $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}' < \mathfrak{R} \dot{+} \mathfrak{R}'$ sind, wie man leicht verifiziert, gleichwertig.

[4]) Wegen der leicht verifizierbaren Mengen-Implikation $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S} \dot{+} \mathfrak{R}' \times (1 - \mathfrak{S}) > \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}'$ ist

$$\underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{R} \times \mathfrak{S} \dot{+} \mathfrak{R}' \times (1-\mathfrak{S})} > \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}'}.$$

gehört, d. h. wenn $f(x) < a$ ist — also ist $f^*(x)$ dann die untere Grenze aller rationalen a mit $f(x) < a$, d. h. $f^*(x) = f(x)$. Die Menge aller x mit $f^*(x) \neq f(x)$ ist somit eine vom Lebesgueschen Maße 0, also $f^* \sim f$, d. h. f^* gehört zur Klasse von f.

Die Klasse von f sei $\mathfrak{K}$, wir nennen f^* $f_{\mathfrak{K}}$: $f_{\mathfrak{K}}$ hängt nur von $\mathfrak{K}$ ab, und gehört dazu. —

Sei $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ eine (reelle) stetige Funktion, das in der Einleitung über allgemeinere Polynome Gesagte gilt wörtlich auch für $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$: Die Klasse von $\varphi(f_1, \ldots, f_n)$ hängt nur von den bzw. Klassen $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ der $f_1, \ldots, f_n$ ab, und möge $\varphi(\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n)$ genannt werden. Wir nehmen nun $\varphi(\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n) = 0$ an, und wollen zeigen, daß für alle x $\varphi(f_{\mathfrak{K}_1}, \ldots, f_{\mathfrak{K}_n}) = 0$ gilt.

Sei also per Absurdum $\varphi(f_{\mathfrak{K}_1}, \ldots, f_{\mathfrak{K}_n}) \neq 0$ für ein $x = x_0$. Da $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ stetig ist, existieren n Paare rationaler Zahlen $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ mit $a_1 < f_{\mathfrak{K}_1}(x_0) < b_1, \ldots, a_n < f_{\mathfrak{K}_n}(x_0) < b_n$, so daß für alle $a_1 \leqq u_1 < b_1, \ldots, a_n \leqq u_n < b_n$ $\varphi(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$ ist. Also ist $\varphi(f_{\mathfrak{K}_1}(x), \ldots, f_{\mathfrak{K}_n}(x)) \neq 0$, wenn $a_1 \leqq f_{\mathfrak{K}_1}(x) < b_1, \ldots, a_n \leqq f_{\mathfrak{K}_n}(x) < b_n$ ist. Da nun bis auf eine Menge vom Lebesgueschen Maße 0 $f_{\mathfrak{K}_1}(x) = f_1(x), \ldots, f_{\mathfrak{K}_n}(x) = f(x_n)$ ist, ist bis auf eine solche x-Menge, $\varphi(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \neq 0$ Folge von $a_1 \leqq f(x) < b_1, \ldots, a_n \leqq f_n(x) < b_n$. Und da wegen $\varphi(\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n) = 0$ mit Ausnahme einer ebensolchen x-Menge $\varphi(f_1(x), \ldots, f_n(x)) = 0$ ist, kann $a_1 \leqq f_1(x) < b_1, \ldots, a_n \leqq f_n(x) < b_n$ nur in einer Menge vom Lebesgueschen Maße 0 gelten. Somit hat die Menge $\mathfrak{R}(b_1, f_1) \times (1 - \mathfrak{R}(a_1, f_1)) \times \cdots \times \mathfrak{R}(b_n, f_n) \times (1 - \mathfrak{R}(a_n, f_n))$ das Maß 0, es ist $\mathfrak{k}(b_1, f_1) \times (1 - \mathfrak{k}(a_1, f_1)) \times \cdots \times \mathfrak{k}(b_n, f_n) \times (1 - \mathfrak{k}(a_n, f_n)) = 0$, und daher $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}(b_1, f_1)} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}(b_1, f_1)}) \times \cdots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}(b_n, f_n)} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}(a_n, f_n)}) = 0$. Nun gehört nach Definition von $f_{\mathfrak{K}_\nu}(x_0)$, und wegen $a_\nu < f_\nu(x_0) < b_\nu$, x_0 nicht zu $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}(a_\nu, f_\nu)}$, wohl aber zu $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}(b_\nu, f_\nu)}$ — also gehört es zu $\mathfrak{M}_{\mathfrak{k}(b_\nu, f_\nu)} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}(a_\nu, f_\nu)})$. Da dies für alle $\nu = 1, \ldots, n$ gilt, gehört x_0 auch zum obenstehenden Durchschnitt dieser Mengen, obwohl derselbe leer sein sollte. Das ist unmöglich.

Somit bilden die $f_{\mathfrak{K}}$ tatsächlich ein Repräsentanten-System von der gewünschten Art.

3. Jetzt können wir uns den in der Einleitung beschriebenen komplexwertigen, beschränkten, für alle reellen x, und nur diese, definierten $f(x)$, die im Lebesgueschen Sinne meßbar sind, zuwenden. $\Re f(x)$, $\Im f(x)$ sind reell, also Funktionen von der in **2.** diskutierten Art, ihre Klassen hängen nur von der Klasse $\mathfrak{K}$ von $f(x)$ ab ($\Re u$ und $\Im u$ sind stetig, sogar allgemeinere Polynome: $\frac{1}{2} u + \frac{1}{2} \bar{u}$, $\frac{1}{2i} u - \frac{1}{2i} \bar{u}$), sie mögen $\Re\mathfrak{K}$ bzw. $\Im\mathfrak{K}$ genannt werden. Wir definieren nunmehr: $f_{\mathfrak{K}} = f_{\Re\mathfrak{K}} + i f_{\Im\mathfrak{K}}$. $f_{\mathfrak{K}}$ hängt nur von $\mathfrak{K}$ ab, und da bis auf eine x-Menge vom Lebesgueschen Maße 0 $f_{\Re\mathfrak{K}}(x) = \Re f(x)$, $f_{\Im\mathfrak{K}}(x) = \Im f(x)$ gilt, also $f_{\mathfrak{K}}(x) = \Re f(x) + i \Im f(x) = f(x)$, gehört $f_{\mathfrak{K}}$ zu $\mathfrak{K}$.

Schließlich sei $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ eine (für alle Komplexen $(u_1, \ldots, u_n)$ stetige Funktion. Wir definieren die Klasse $\varphi(\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n)$ wie in der Einleitung und in **2.** Seien $v_1, w_1, \ldots, v_n, w_n$ $2n$ reelle Variable, wir setzen $\psi(v_1, w_1, \ldots, v_n, w_n) = \varphi(v_1 + i w_1, \ldots, v_n + i w_n)$. Dann ist, wie man leicht verifiziert, $\psi(\Re\mathfrak{K}_1, \Im\mathfrak{K}_1, \ldots, \Re\mathfrak{K}_n, \Im\mathfrak{K}_n) = \varphi(\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n)$. Aus $\varphi(\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n) = 0$ folgt nunmehr $\psi(\Re\mathfrak{K}_1, \Im\mathfrak{K}_1, \ldots, \Re\mathfrak{K}_n, \Im\mathfrak{K}_n) = 0$, also nach **2.** für alle x $\psi(f_{\Re\mathfrak{K}_1}(x), f_{\Im\mathfrak{K}_1}(x), \ldots, f_{\Re\mathfrak{K}_n}(x), f_{\Re\mathfrak{K}_n}(x)) = 0$, und daher nach Definition der $f_{\mathfrak{K}_1}(x), \ldots, f_{\mathfrak{K}_n}(x)$ $\varphi(f_{\mathfrak{K}_1}(x), \ldots, f_{\mathfrak{K}_n}(x)) = 0$.

Die $f_{\mathfrak{K}}(x)$ bilden also ein Repräsentanten-System von der gewünschten Art. Man

beachte, daß wir die charakteristische Eigenschaft derselben nicht nur für die allgemeineren Polynome $p(u_1, \ldots, u_n)$ bewiesen haben, sondern für alle stetigen Funktionen $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ überhaupt!

II. Eigenschaften der Repräsentanten-Systeme und Verallgemeinerungen.

1. In der Einleitung verlangten wir für die algebraischen Repräsentanten-Systeme der Äquivalenzklassen $f_{\mathfrak{K}}$ bloß für allgemeinere Polynome, daß aus $\varphi(\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n) = 0$ $\varphi(f_{\mathfrak{K}_1}, \ldots, f_{\mathfrak{K}_n}) = 0$ (für alle x!) folge — bei unserer Konstruktion erreichten wir jedoch, daß dies für alle stetigen φ galt. Dieser auffallende Umstand hat seine Erklärung darin, daß allgemein aus dem Erfülltsein unser Bedingung für alle allgemeineren Polynome dasselbe für sämtliche stetigen Funktionen φ folgt, und dies soll jetzt bewiesen werden.

Sei nämlich $\varphi(\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n) = 0$, und trotzdem $\varphi(f_{\mathfrak{K}_1}(x_0), \ldots, f_{\mathfrak{K}_n}(x_0)) \neq 0$. Da $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$ stetig ist, gibt es also ein $\delta > 0$, so daß für $|u_1 - f_{\mathfrak{K}_1}(x_0)|^2 + \cdots + |u_n - f_{\mathfrak{K}_n}(x_0)|^2 < \delta^2$ auch noch $\varphi(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$ ist. Da mit Ausnahme einer Menge vom Maße 0 $\varphi(f_{\mathfrak{K}_1}(x), \ldots, f_{\mathfrak{K}_n}(x)) = 0$ ist, ist dann auch $|f_{\mathfrak{K}_1}(x) - f_{\mathfrak{K}_1}(x_0)|^2 + \cdots + |f_{\mathfrak{K}_n}(x) - f_{\mathfrak{K}_n}(x_0)|^2 \geqq \delta^2$. Wir setzen nun

$$g(x) = \operatorname{Min}\left(\frac{1}{|f_{\mathfrak{K}_1}(x) - f_{\mathfrak{K}_1}(x_0)|^2 + \cdots + |f_{\mathfrak{K}_n}(x) - f_{\mathfrak{K}_n}(x_0)|^2}, \quad \frac{1}{\delta^2}\right),$$

dies ist eine beschränkte und meßbare Funktion. Nach obigem gilt, mit Ausnahme einer Menge vom Maße 0,

$$(|f_{\mathfrak{K}_1}(x) - f_{\mathfrak{K}_1}(x_0)|^2 + \cdots + |f_{\mathfrak{K}_n}(x) - f_{\mathfrak{K}_n}(x_0)|^2)\, g(x) - 1 = 0.$$

Nun ist $(|u_1 - f_{\mathfrak{K}_1}(x_0)|^2 + \cdots + |u_n - f_{\mathfrak{K}_n}(x_0)|^2)\, u_{n+1} - 1$ ein allgemeineres Polynom in $u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}$, und dieses ist für $u_1 = f_{\mathfrak{K}_1}(x), \ldots, u_n = f_{\mathfrak{K}_n}(x)$, $u_{n+1} = g(x)$, mit Ausnahme einer Menge vom Maße 0, gleich 0. $f_{\mathfrak{K}_1}(x), \ldots, f_{\mathfrak{K}_n}(x)$ haben die Klassen $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$, $g(x)$ habe die Klasse $\mathfrak{L}$, dann gilt für die Repräsentanten

$$(|f_{\mathfrak{K}_1}(x) - f_{\mathfrak{K}_1}(x_0)|^2 + \cdots + |f_{\mathfrak{K}_n}(x) - f_{\mathfrak{K}_n}(x_0)|^2)\, f_{\mathfrak{L}}(x) - 1 = 0$$

für alle x. Trotzdem ist linke Seite für $x = x_0$ offenkundig $= -1 \neq 0$. Dies ist ein Widerspruch.

2. An Stelle des Lebesgueschen Maßes, daß allen unseren bisherigen Betrachtungen zugrunde lag, können wir auch andere, verwandte Begriffsbildungen treten lassen.

So können wir z. B. eine für alle reellen x, und nur diese, definierte Funktion $\varphi(x)$ einführen, welche monoton nicht-abnehmend ist, und an die Stelle der Mengen vom Maße 0 diejenigen Mengen treten lassen, über welche erstreckt das Lebesgue-Stieltjesche Integral $\int d\varphi(x) = 0$ ist.

Unter Verwendung einer auf Lebesgue zurückgehenden Definition des Lebesgue-Stieltjesschen Integrals, können wir dies auch so machen. Sei $\psi(y)$ die Inverse von $\varphi(x)$, die, um auch streckenweise konstante oder stellenweise unstetige $\varphi(x)$ (wie sie z. B. in der Operatorentheorie vorkommen) mit zu erfassen, etwa so definiert wird: $\psi(y)$ ist die obere Grenze aller x, für die $\varphi(x) \leqq y$ ist (findet dies nie oder immer statt, so sei $\psi(y) = -\infty$ bzw. $= +\infty$ — oder auch undefiniert). Das über eine Menge $\mathfrak{M}$ erstreckte Integral $\int d\varphi(x)$ ist dann gleich dem Maß der Menge $\mathfrak{M}_\varphi$ aller y, für die $\psi(y)$ zu $\mathfrak{M}$ gehört. Wir lassen also an Stelle der Mengen $\mathfrak{M}$ vom Maße 0 diejenigen $\mathfrak{M}$ treten, für welche $\mathfrak{M}_\varphi$ das Maß 0 hat.

Ferner betrachten wir, an Stelle der beschränkten, im Lebesgueschen Sinne meßbaren Funktionen $f(x)$, diejenigen beschränkten $f(x)$, für die $f(\varphi(x))$ im Lebesgueschen

Sinne meßbar ist. Und unter $f \underset{\varphi}{\sim} g$ verstehen wir, daß für die Menge $\mathfrak{M}$ aller x mit $f(x) \neq g(x)$ $\mathfrak{M}_\varphi$ das Maß 0 hat. Somit bedeutet $f \underset{\varphi}{\sim} g$ $f(\varphi) \sim g(\varphi)$. Für diesen neuen Äquivalenzbegriff $\underset{\varphi}{\sim}$ können wir wiederum Äquivalenzklassen bilden, und unser ursprüngliches Problem erneut formulieren.

Da jedoch das neue Problem für die f mit dem alten für die $f(\varphi)$ gleichwertig ist [5]), existieren auch jetzt die Repräsentanten. —

Eine andere Verallgemeinerungs-Möglichkeit wäre die, die f nicht von einer, sondern von mehreren reellen Variablen abhängen zu lassen. (Hierher gehört auch der Fall, daß die Variable x komplex ist.) Da es eineindeutige und maßgleiche Abbildungen des n-dimensionalen Raumes auf die Zahlengerade gibt [6]), gelten unsere Resultate auch dann; übrigens gelten unsere Überlegungen ohnehin beinahe ohne jede Änderung auch im Raume.

[5]) Allerdings brauchen die Repräsentanten, die nach unserem ursprünglichen Verfahren gewonnen werden, nicht in den Konstanzintervallen von φ konstant zu sein, was die $f(\varphi)$ gerade charakterisiert. Wir hätten uns aber bei unserem ursprünglichen Verfahren konsequent auf solche Funktionen beschränken können, die in den Konstanzintervallen von φ konstant sind (bzw. auf solche Mengen, die von jedem dieser Intervalle keinen oder alle Punkte enthalten), und wären genau so ans Ziel gekommen.

[6]) Vgl. z. B. a. a. O. [2]).

Eingegangen 1. Februar 1931.

Theorie der halbfiniten unendlichen Matrizen.

Von *Gottfried Köthe* in Münster und *Otto Toeplitz* in Bonn.

Die Theorie der beschränkten unendlichen Matrizen, die aus Hilberts Theorie der unendlichvielen Veränderlichen herausgewachsen ist [1]), ist nicht die einzige Theorie eines vollständigen Systems von unendlichen Matrizen, in dem ein Kalkül nach dem genauen Muster des Kalküls mit n-reihigen Matrizen aufgestellt werden kann. Unter den vielen Systemen, die man bisher betrachtet hat [2]), hat das der *zeilenfiniten* Matrizen, d. h. der Matrizen, die in jeder einzelnen ihrer Zeilen nur endlichviele Nichtnullen aufweisen, die Eigenschaft, daß alle Summen, die bei der Multiplikation zweier solcher Matrizen auftreten, nur endlichviele von 0 verschiedene Summanden enthalten, also in Wahrheit keine unendlichen, sondern nur endliche Summen sind. Da hierdurch bei diesem System alle Konvergenzbetrachtungen von vornherein ausscheiden, soll es als ein „konvergenzfreies System" bezeichnet werden. Das System der spaltenfiniten Matrizen, das zu ihm transponiert ist, ist natürlich auch konvergenzfrei. Andere konvergenzfreie Systeme sind bisher nicht betrachtet worden.

Es ist uns nun gelungen, eine Reihe weiterer konvergenzfreier Systeme aufzustellen. Die Theorie des nächst einfachen von ihnen, das wir als „halbfinit" bezeichnen, wird im folgenden gegeben, zuerst die Konstruktion und Vollständigkeit (§ 1), sodann die Theorie der Auflösung linearer Gleichungssysteme mit halbfiniter Koeffizientenmatrix (§§ 2, 3), endlich eine Skizze der Konstruktion weiterer Systeme (§ 4).

Das Interesse dieser Theorie beruht darauf, daß man hier unter relativ einfachen Verhältnissen über Fragen Klarheit erhalten kann, die bei den nicht-konvergenzfreien Systemen, wie z. B. bei dem beschränkten System, z. Z. noch unangreifbar erscheinen. Die Auflösung der linearen Gleichungssysteme ist eine erste Probe in dieser Richtung. Bei den zeilenfiniten Systemen [3]) ist sie von überraschender Einfachheit, nämlich in genauer Analogie zu den Systemen von endlichvielen Gleichungen mit endlichvielen Unbekannten. Es gilt die „Alternative" zwischen der Lösbarkeit der homogenen und der der unhomogenen Gleichungen, und es gilt umfassender und präziser der folgende Satz: „Jede zeilenfinite Matrix $\mathfrak{A}$ ist äquivalent einer Einsermatrix $\mathfrak{J}$, d. h. einer Matrix, deren jede Reihe höchstens eine Eins, sonst nur Nullen enthält, in dem Sinne, daß es zwei zeilenfinite Matrizen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ mit eindeutigen vorderen und hinteren zeilenfiniten Reziproken gibt, für die $\mathfrak{U}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{V} = \mathfrak{J}$ gilt." Bei den halbfiniten Matrizen — und das ist das lehrreiche an ihnen — besteht diese volle Analogie zur endlichen Algebra nicht mehr; die Alternative hat aufgehört, aber an ihre Stelle treten einige nur wenig kompliziertere Tatbestände, die man restlos übersehen und aus denen man für schwerere Fälle lernen kann.

---

[1]) E. Hellinger und O. Toeplitz, Gött. Nachr. math.-phys. Kl. 1906, pag. 351—355; Math. Ann. **69** (1909), pag. 289—330.

[2]) Enc. d. math. Wiss. II, 3, pag. 1442—1450.

[3]) O. Toeplitz, Pal. Rend. **28** (1909), pag. 88—96.

§ 1. Das System der halbfiniten Matrizen.

Die halbfiniten Matrizen kann man am bequemsten definieren, wenn man die Indizes ihrer Elemente nicht in der üblichen Weise die Werte 1, 2, 3, . . . durchlaufen läßt, sondern alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$. Die Matrix dehnt sich dann nicht nur nach rechts und unten aus, sondern nach allen vier Richtungen, und man muß darin einen horizontalen und einen vertikalen Teilungsstrich markieren, damit man beim Komponieren von Zeilen und Spalten weiß, welche Elemente man mit einander zu komponieren hat [4]):

$$\mathfrak{A} = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{-2,-2} & a_{-2,-1} & a_{-2,0} & a_{-2,1} & \cdot \\ \cdot & a_{-1,-2} & a_{-1,-1} & a_{-1,0} & a_{-1,1} & \cdot \\ \hline \cdot & a_{0,-2} & a_{0,-1} & a_{0,0} & a_{0,1} & \cdot \\ \cdot & a_{1,-2} & a_{1,-1} & a_{1,0} & a_{1,1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right).$$

Um das Ausschreiben solcher Matrizen möglichst einzuschränken, wollen wir die vier Teilmatrizen, die durch die Striche abgeteilt werden, durch $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{A}_*$, $^*\mathfrak{A}$, $_*\mathfrak{A}$ bezeichnen, wobei die Stellung des Sterns jeweils das Feld kennzeichnet, welches gemeint ist. Man hat dann

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A} & \mathfrak{A}^* \\ {}_*\mathfrak{A} & \mathfrak{A}_* \end{pmatrix}.$$

Definition. *Die Matrix $\mathfrak{A}$ heißt halbfinit, wenn $^*\mathfrak{A}$ spaltenfinit, $\mathfrak{A}^*$ endlich, $\mathfrak{A}_*$ zeilenfinit, und $_*\mathfrak{A}$ beliebig ist.* Eine Matrix soll dabei *endlich* heißen, wenn nur endlichviele ihrer Elemente von 0 verschieden sind.

Satz 1. *Das System aller halbfiniten Matrizen gestattet den Kalkül, d. h. es ist ein Ring, in dem die Rechenoperationen mit den üblichen des Matrizenkalküls übereinkommen.*

Der Beweis ist sehr übersichtlich, wenn man sich vorab überlegt, daß die Multiplikation zweier Matrizen von dem obigen vierfeldrigen Typus einfach so vollzogen werden kann, daß man die zugehörigen zweireihigen Matrixmatrizen wie gewöhnliche zweireihige Matrizen, aber unter sorgfältiger Wahrung der Reihenfolge der Faktoren ausmultipliziert und dann wieder als unendliche Matrizen vom obigen Typus auffaßt:

$$\begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A} & \mathfrak{A}^* \\ {}_*\mathfrak{A} & \mathfrak{A}_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{B} & \mathfrak{B}^* \\ {}_*\mathfrak{B} & \mathfrak{B}_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A}\,{}^*\mathfrak{B} + \mathfrak{A}^*\,{}_*\mathfrak{B} & {}^*\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}^* + \mathfrak{A}^*\,\mathfrak{B}_* \\ {}_*\mathfrak{A}\,{}^*\mathfrak{B} + \mathfrak{A}_*\,{}_*\mathfrak{B} & {}_*\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}^* + \mathfrak{A}_*\,\mathfrak{B}_* \end{pmatrix} = \mathfrak{C}.$$

Nun gilt, wenn $\mathfrak{Z}$ eine zeilenfinite Matrix bedeutet, $\mathfrak{S}$ eine spaltenfinite, $\mathfrak{N}$ eine endliche, $\mathfrak{U}$ eine beliebige:

$$\mathfrak{S}^2 = \mathfrak{S}, \quad \mathfrak{U}\mathfrak{N} = \mathfrak{Z}, \quad \mathfrak{S}\mathfrak{N} = \mathfrak{N},$$
$$\mathfrak{Z}^2 = \mathfrak{Z}, \quad \mathfrak{N}\mathfrak{U} = \mathfrak{S}, \quad \mathfrak{N}\mathfrak{Z} = \mathfrak{N}.$$

Aus diesen Relationen und der Definition der Halbfinitheit liest man unmittelbar ab, daß $\mathfrak{C}$ existiert und selbst wieder halbfinit ist. Und zwar ergibt sich diese Existenz in der Art, daß alle auftretenden unendlichen Summen in Wahrheit endlich werden, d. h. das System ist „konvergenzfrei".

Die Gültigkeit der Rechenregeln in unserem Ring ergibt sich rein formal. Nur die des assoziativen Gesetzes der Multiplikation muß besonders hervorgehoben werden; man muß hier überlegen, daß bei einem Produkt von 3 halbfiniten Matrizen die auftretenden Doppelsummen ebenfalls nur endlichviele Summanden enthalten; daraus folgt diejenige Vertauschbarkeit von Doppelsummen, die mit dem assoziativen Gesetz gleichbedeutend ist, unmittelbar.

---

[4]) O. Toeplitz, Math. Ann. **70** (1910), pag. 354 Anm.

Satz 2. *Das System der halbfiniten Matrizen ist vollständig, d. h. es ist als Teilsystem in keinem weiteren System von unendlichen Matrizen enthalten, in dem der Kalkül ebenfalls noch in dem Sinne gilt, daß ein Produkt zweier Matrizen als existent angesehen wird, wenn die auftretenden unendlichen Summen* $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_{ij} b_{jk}$ *im gewöhnlichen Sinne konvergent sind.*

Den Beweis führen wir indirekt. Gesetzt $\mathfrak{A}$ wäre eine nicht-halbfinite Matrix aus einem solchen Obersystem, und es wäre

1) $^*\mathfrak{A}$ nicht spaltenfinit, sondern es gäbe in $^*\mathfrak{A}$ eine Spalte, etwa die k-te, die infinit ist, also unendlichviele Nichtnullen enthält. Wir bestimmen dann solche Zahlen $b_1, b_2, \ldots$, daß

$$a_{-1,k}\, b_1 + a_{-2,k}\, b_2 + \cdots$$

divergiert. Die Matrix

$$\mathfrak{B} = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \hline \cdot & b_2 & b_1 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)$$

ist halbfinit, das Produkt $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ existiert aber nicht; denn das Element in der 0-ten Zeile und k-ten Spalte müßte gleich der obigen Summe sein, die divergiert. Die Multiplikation wäre also in dem Obersystem nicht ausnahmslos ausführbar. Daß

2) $\mathfrak{A}_*$ zeilenfinit sein muß, zeigt man in analoger Weise. Wäre

3) $\mathfrak{A}^*$ nicht endlich und wäre eine einzelne Zeile oder eine einzelne Spalte davon infinit, so würde die gleiche Betrachtung wie eben einen Widerspruch ergeben, da bei ihr gar nicht benutzt worden war, daß die betrachtete Spalte gerade der linken Hälfte entstammte (bzw. die Zeile der unteren Hälfte). Wäre also trotzdem $\mathfrak{A}^*$ nicht-endlich, so wählen wir aus $\mathfrak{A}^*$ eine Folge $\mathfrak{z}_{n_1}, \mathfrak{z}_{n_2}, \ldots$ von Zeilen, deren jede wenigstens ein von Null verschiedenes Element enthält, aber derart, daß in jeder Spalte von $\mathfrak{A}^*$ höchstens ein Element $\neq 0$ dieser Zeilen steht. Multiplizieren wir $\mathfrak{A}$ mit einer Matrix $\mathfrak{B}$ vom obigen Typus, in der die $b_{n_i} = 1$, alle anderen Elemente gleich Null sind, so bekommen wir eine Matrix, deren 0-te Zeile unendlichviele Nichtnullen in der rechten Hälfte enthält, was dem unter 2) Gezeigten widerspricht.

§ 2. Äquivalenz der halbfiniten Matrizen: Reduktion auf Einsermatrizen.

Definition. *Zwei halbfinite Matrizen* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *heißen äquivalent, wenn es zwei „intakte" halbfinite Matrizen* $\mathfrak{U}$ *und* $\mathfrak{V}$ *gibt, d. h. zwei halbfinite Matrizen, die jede eine eindeutig bestimmte, zugleich vordere und hintere halbfinite Reziproke besitzen, so daß* $\mathfrak{U}\mathfrak{A}\mathfrak{V} = \mathfrak{B}$.

In diesem Paragraph wollen wir zeigen, daß jede halbfinite Matrix einer Einsermatrix äquivalent ist, d. h. einer solchen, die in jeder Zeile und in jeder Spalte höchstens eine Eins, sonst nur Nullen aufweist. Die Reduktion von $^*\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_*$ wird sich aus den entsprechenden Sätzen über zeilen- und über spaltenfinite Matrizen leicht ableiten lassen; $\mathfrak{A}^*$ mit seinen endlichvielen Nichtnullen wird noch weniger Schwierigkeiten bereiten. Das eigentliche Problem ist die Reduktion von $_*\mathfrak{A}$. Wir beginnen deshalb die Untersuchung mit dem besonderen Fall, daß

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ {}_*\mathfrak{A} & 0 \end{pmatrix}$$

ist, wo links unten eine ganz willkürliche Matrix steht.

Ist $\mathfrak{S}$ irgendeine spaltenfinite, $\mathfrak{Z}$ irgendeine zeilenfinite Matrix, so gilt offenbar

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & 0 \\ 0 & \mathfrak{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ {}_*\mathfrak{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{S} & 0 \\ 0 & \mathfrak{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathfrak{Z}\,{}_*\mathfrak{A}\,\mathfrak{S} & 0 \end{pmatrix}.$$

Gelingt es also, intakte $\mathfrak{Z}$ *und* $\mathfrak{S}$ *zu finden* ($\mathfrak{Z}$ intakt im Sinne der zeilenfiniten Matrizen, $\mathfrak{S}$ intakt im Sinne der spaltenfiniten Matrizen), *so daß* $\mathfrak{Z}\,{}_*\mathfrak{A}\,\mathfrak{S}$ *eine Einsermatrix ist, so ist auch* $\mathfrak{A}$ *auf eine solche reduziert.*

Das Hilfsmittel, mit dem diese Bestimmung gelingt *), ist die sog. Jacobische Transformation [5]), d. h. folgende Tatsache: Sind die Abschnittsdeterminanten der Matrix ${}_*\mathfrak{A}$, d. h. die Determinanten

$$A_1 = |{}_*a_{11}|, \quad A_2 = \begin{vmatrix} {}_*a_{11} & {}_*a_{12} \\ {}_*a_{21} & {}_*a_{22} \end{vmatrix}, \ldots$$

alle von 0 verschieden, so kann man zwei Matrizen

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 & \cdot \\ u_{21} & u_{22} & 0 & \cdot \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{V} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & \cdot \\ 0 & v_{22} & v_{23} & \cdot \\ 0 & 0 & v_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

bestimmen, daß $\mathfrak{U}\mathfrak{V} = {}_*\mathfrak{A}$ wird. Diese Tatsache wird gewöhnlich für n-reihige Matrizen ausgesprochen; da aber die u_{ik} und v_{ik} sich rekursiv bestimmen und so, daß die m-te Zeile von $\mathfrak{U}$ und die m-te Spalte von $\mathfrak{V}$ nur vom m-ten Abschnitt von ${}_*\mathfrak{A}$ abhängt, besteht keinerlei Hindernis, diese rein formale Bestimmung auf ganz willkürliche unendliche Matrizen zu übertragen.

Überdies sind die Diagonalgrößen u_{ii} und v_{ii} sämtlich von 0 verschieden, wie man auch unmittelbar leicht einsieht. Daraus folgt, daß die Matrizen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$, die eine im Sinne der zeilenfiniten Matrizen, die andere im Sinne der spaltenfiniten Matrizen intakt sind; denn betrachtet man $\mathfrak{U}$ als Koeffizientenmatrix einer linearen Transformation, so kann man diese rekursiv und eindeutig auflösen, erhält also eine eindeutige zeilenfinite hintere Reziproke; nach den Formalsätzen über Reziproke [6]) ist diese dann von selbst auch vordere und zwar die einzige vordere Reziproke. Ganz ähnlich für $\mathfrak{V}$.

Besitzt ${}_*\mathfrak{A}$ nur nichtverschwindende Abschnittsdeterminanten, so ist $\mathfrak{U}^{-1}\,{}_*\mathfrak{A}\,\mathfrak{V}^{-1} = \mathfrak{E}$, also gewiß eine Einsermatrix, und damit ist alles erledigt.

Gibt es unter den Abschnittsdeterminanten von ${}_*\mathfrak{A}$ verschwindende, so müssen der Jacobischen Transformation zwei vorbereitende Transformationen vorausgeschickt werden.

---

*) Anm. bei der Korrektur. Herr H. Ulm-Göttingen macht uns darauf aufmerksam, daß man (unter Verzicht auf eine explizite Lösungsformel) die Existenz der zeilen- bzw. spaltenfiniten Transformation $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{Q}$, die die Matrix ${}_*\mathfrak{A}$ in eine Einsermatrix überführt, auf einem natürlicheren Wege finden kann. Der Grundgedanke ist der folgende. Zwischen den Zeilen und Spalten von ${}_*\mathfrak{A}$ gebe es keine linearen Dependenzen. Eine Zeile von ${}_*\mathfrak{A}$ heiße von der „Kürze“ n, wenn ihre n-te Koordinate die erste von Null verschiedene ist. k_1 sei die Kürze der ersten Zeile von ${}_*\mathfrak{A}$. Durch Subtraktion passender Vielfachen der ersten Zeile von den folgenden wird erreicht, daß in der k_1-ten Spalte in allen folgenden Zeilen nur Nullen stehen. Mit der zweiten Zeile der modifizierten Matrix verfahre ich ebenso, u. s. f. Alle diese Umformungen werden durch vordere Multiplikation mit einer einzigen zeilenfiniten intakten Matrix $\mathfrak{P}$ erreicht, die das „unendliche Produkt“ der den obigen einzelnen Umformungen entsprechenden zeilenfiniten Matrizen ist. Die Matrix $\mathfrak{P}\,{}_*\mathfrak{A}$ ist spaltenfinit und intakt. Ist $\mathfrak{Q}$ ihre spaltenfinite Reziproke, so wird $\mathfrak{P}\,{}_*\mathfrak{A}\mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$. — Unter Benutzung des Grundgedankens dieser Überlegung werden wir in einer Fortsetzung dieser Arbeit eine einheitliche Form des ganzen Beweises darlegen, die nicht nur für halbfinite sondern für andere konvergenzfreie Systeme durchführbar ist.

[5]) Der Gebrauch der Jacobischen Transformationen für unendliche Matrizen bei O. Toeplitz, Gött. Nachr. math.-phys. Kl. 1907, pag. 101—109.

[6]) O. Toeplitz, Math. Ann. **69** (1909), pag. 311 f.

1. Wir ersetzen diejenigen Zeilen von ${}_*\mathfrak{A}$, die von den ihnen vorangehenden Zeilen linear abhängig sind, durch Nullzeilen. Dies läuft darauf hinaus, daß ${}_*\mathfrak{A}$ vorn mit einer Matrix $\mathfrak{P}_1$ multipliziert wird, die folgendermaßen gebaut ist: Ist die n-te Zeile $\mathfrak{z}_n$ von den ihr vorangehenden linear unabhängig, so ist das Diagonalelement der n-ten Zeile von $\mathfrak{P}_1$ gleich 1, alle übrigen Elemente dieser Zeile sind 0. Ist dagegen $\mathfrak{z}_n$ eine lineare Kombination

$$\mathfrak{z}_n = r_{n,1}\ \mathfrak{z}_1 + \cdots + r_{n,n-1}\ \mathfrak{z}_{n-1},$$

so lauten die Elemente der n-ten Zeile von $\mathfrak{P}_1$:

$$-r_{n,1}, \ldots, \quad -r_{n,n-1},\ 1,\ 0,\ 0, \ldots.$$

Die Matrix ist also von folgender Art:

$$\mathfrak{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & . \\ 0 & 1 & 0 & 0 & . \\ -r_{31} & -r_{32} & 1 & 0 & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Daß die Matrix im zeilenfiniten Sinne intakt ist, ist aus denselben Gründen klar, wie oben bei der Matrix $\mathfrak{U}$.

Ebenso konstruiere man jetzt eine Matrix $\mathfrak{Q}_1$, die, als hinterer Faktor verwendet, in $\mathfrak{P}_1 {}_*\mathfrak{A}$ diejenigen Spalten, die von den ihnen vorangehenden linear abhängen, durch Nullen ersetzt. Bei dieser Operation behalten diejenigen Zeilen von $\mathfrak{P}_1 {}_*\mathfrak{A}$, die Nullzeilen waren, diesen Charakter bei, und die übrigen bewahren die lineare Unabhängigkeit, die zwischen ihnen hergestellt war.

Das Gesamtergebnis dieser 1. Transformation $\mathfrak{P}_1 {}_*\mathfrak{A}\,\mathfrak{Q}_1$ heiße ${}_*\mathfrak{A}_1$.

2. Wir betrachten nun zunächst die Matrix $\mathfrak{C}$, die aus ${}_*\mathfrak{A}_1$ durch Wegstreichung aller Nullzeilen und Nullspalten entsteht. Diese Matrix $\mathfrak{C}$ hat also die Eigenschaft, daß nie zwischen endlichvielen Zeilen und nie zwischen endlichvielen Spalten von ihr eine lineare Dependenz besteht. Wir beweisen nun den

Hilfssatz. *Ist $\mathfrak{C}$ eine unendliche Matrix, zwischen deren Zeilen und Spalten keine endlichen linearen Dependenzen bestehen, so kann man durch eindeutig umkehrbare Permutation der Zeilen und der Spalten erreichen, daß alle Abschnittsdeterminanten von 0 verschieden sind.*

Ist $c_{11} \neq 0$, so ist der 1. Abschnitt schon nach Wunsch. Ist $c_{11} = 0$, so gibt es ein erstes $c_{1k_1} \neq 0$; dann setze man die k_1-te Spalte anstelle der 1. und schiebe alle weiteren, die links von ihr gestanden haben, um eins nach rechts; man hat dann erreicht, daß die 1. Abschnittsdeterminante $\neq 0$ geworden ist. Ist die 2. Abschnittsdeterminante $= 0$, so werden die beiden obersten Elemente der 2. Spalte denen der 1. Spalte proportional sein. Es können aber nicht die sämtlichen Elemente der 2. Spalte denen der 1. Spalte proportional sein, da sonst beide Spalten in Dependenz wären. Sei h_1 der erste Index, für den es eintritt, daß das h_1-te Element der 2. Spalte sich der Proportionalität nicht mehr einfügt. Diese h_1-te Zeile machen wir zur 2. Zeile; dann ist also die 2. Abschnittsdeterminante $\neq 0$. Damit ist das Gewünschte für $n = 1, 2$ geleistet, und zwar überdies so, daß die ursprüngliche 1. Zeile und die ursprüngliche 1. Spalte beide in der 2. Abschnittsdeterminante Verwendung gefunden haben.

Das Verfahren werde jetzt gemäß folgender Induktion fortgesetzt. Sei bereits durch Umordnung der Zeilen und Spalten erreicht, daß die Abschnittsdeterminanten bis zur $2n$-ten alle $\neq 0$ sind und daß die ersten n Zeilen und die ersten n Spalten der ursprünglichen Matrix in der $2n$-ten Abschnittsdeterminante Verwendung gefunden haben. Ist dann die $(2n+1)$-te Abschnittsdeterminante $\neq 0$, so lasse ich die $(2n+1)$-te Zeile

und Spalte der umgeformten Matrix in Ruhe und gehe zum nächsten Schritt; ist jene Determinante aber $= 0$, so ist die $(2n+1)$-te Zeile (in ihren ersten $2n+1$ Koordinaten) eine lineare Komposition der ersten $2n$ Zeilen

$$\mathfrak{z}'_{2n+1} = s_1 \mathfrak{z}'_1 + \cdots + s_{2n} \mathfrak{z}'_{2n},$$

wo der Akzent bedeuten soll, daß nur die ersten $2n+1$ Koordinaten in jeder Zeile genommen sind. Für die *vollen* Zeilen kann diese Relation nicht gelten. Wir gehen bis zur ersten Koordinate (Spalte), wo sie nicht gilt, der k_{n+1}-ten, und setzen diese an Stelle der $(2n+1)$-ten Spalte und schieben dann diese und die weiteren dazwischenstehenden Spalten um 1 nach rechts. Nun ist die $(2n+1)$-te Abschnittsdeterminante $\neq 0$. Ist jetzt die $(2n+2)$-te Abschnittsdeterminante $\neq 0$, so lassen wir die $(2n+2)$-te Zeile und Spalte in Ruhe; ist sie $= 0$, so machen wir dasselbe wie eben, in Spalten statt Zeilen. Dabei sind die ersten n Reihen alle in der $2n$-ten Abschnittsdeterminante verwendet geblieben, da die $2n$ ersten Reihen überhaupt nicht mehr umgeordnet wurden. Es ist aber auch die $(n+1)$-te Zeile und Spalte der ursprünglichen Matrix $\mathfrak{C}$ jetzt verwendet worden. Denn entweder befand sie sich unter den $2n$ ersten, oder sie war durch das Umeinsweiterschieben der in der Abschnittsdeterminante nichtverwendeten Reihen an die $(2n+1)$-te Stelle geraten und ist beim $(2n+1)$-ten bzw. beim $(2n+2)$-ten Schritt verwendet worden.

Daß dieses alternierende Verfahren die Abschnittsdeterminanten $\neq 0$ macht, ist klar. Es kam nur darauf an, daß *alle* Zeilen und *alle* Spalten der ursprünglichen Matrix bei dem unendlichen Umordnungsprozeß an endlicher Stelle verwendet worden sind, damit die die Umordnung darstellenden Permutationsmatrizen intakt sind. Dafür ist aber bei dem Induktionsverfahren gerade gesorgt worden.

Der Hilfssatz ist hiermit bewiesen. Wir kehren nun zu der Matrix ${}_*\mathfrak{A}_1$ zurück und überlegen, was aus ihr geworden ist, wenn wir diejenigen ihrer Reihen, die $\mathfrak{C}$ angehören, den durch den Hilfssatz gegebenen Permutationen unterwerfen, die dazwischen etwa stehenden Nullreihen aber an ihrem Platze lassen. Die dabei entstehende Matrix $\mathfrak{P}_2 {}_*\mathfrak{A}_1 \mathfrak{Q}_2 = {}_*\mathfrak{A}_2$ wird dieselben Nullreihen aufweisen, aber nach deren Streichung eine Matrix werden, deren Abschnittsdeterminanten sämtlich $\neq 0$ sind.

Nach diesen vorbereitenden Transformationen haben wir eine Matrix gewonnen, auf die wir die Jacobische Transformation anwenden können. Ist ${}_*\mathfrak{A}_2$ frei von Nullzeilen, so ist damit unmittelbar die Transformation $\mathfrak{P}_3, \mathfrak{Q}_3$ gewonnen, die ${}_*\mathfrak{A}_2$ in eine Einsermatrix, nämlich die Einheitsmatrix überführt, $\mathfrak{P}_3 {}_*\mathfrak{A}_2 \mathfrak{Q}_3 = \mathfrak{E}$. Sind aber Nullreihen vorhanden, so liefern die Jacobischen Transformierenden nicht unmittelbar die Transformationen $\mathfrak{P}_3, \mathfrak{Q}_3$, die wir brauchen, da sie nur die nullfreien Reihen betreffen. Wir gewinnen diese aber aus ihnen, indem wir in denjenigen Reihen, über die noch nicht verfügt ist, in der Diagonale 1 und sonst Nullen setzen. Alsdann wird $\mathfrak{P}_3 {}_*\mathfrak{A}_2 \mathfrak{Q}_3 = {}_*\mathfrak{A}_3$ eine Matrix, die die gleichen Nullreihen aufweist wie ${}_*\mathfrak{A}_2$ und nach deren Streichung in die Einheitsmatrix übergeht, also eine Einsermatrix.

Wir haben damit den bisher allein behandelten Spezialfall erledigt, daß in $\mathfrak{A}$ nur der linke untere Teil ${}_*\mathfrak{A}$ vorhanden ist. Wir müssen jetzt den allgemeinen Fall auf diesen zurückführen.

Wir betrachten die Matrix

$$\mathfrak{J} = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \hline \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)$$

und überlegen, daß $\mathfrak{F}$ halbfinit und intakt ist (weil ihre Transponierte $\mathfrak{F}'$ ebenfalls halbfinit und $\mathfrak{F}\mathfrak{F}' = \mathfrak{E}, \mathfrak{F}'\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$) und daß (unter $\mathfrak{U}$ irgend eine Matrix verstanden) $\mathfrak{F}\mathfrak{U}$ aus $\mathfrak{U}$ einfach dadurch hervorgeht, daß man alle seine Zeilen um eins nach oben schiebt. Man kann daher durch vordere Multiplikation mit einer hinreichend hohen negativen Potenz von $\mathfrak{F}$ die Matrix $\mathfrak{A}$ soweit hinunterschieben, daß die endlichvielen Nichtnullen rechts oben unter den horizontalen Strich fallen. $\mathfrak{A}$ ist also einer Matrix $\mathfrak{A}_1$ äquivalent:

$$\mathfrak{A}_1 = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A}_1 & 0 \\ {}_*\mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_{1*} \end{pmatrix}.$$

Gemäß der Äquivalenztheorie der zeilen- und der der spaltenfiniten Matrizen gibt es zwei zeilen- bzw. spaltenfinite intakte Matrizen $\mathfrak{Z}, \widetilde{\mathfrak{Z}}$ bzw. $\mathfrak{S}, \widetilde{\mathfrak{S}}$, so daß $\mathfrak{Z}\mathfrak{A}_{1*}\widetilde{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{A}_{2*}$ und $\mathfrak{S}{}^*\mathfrak{A}_1\widetilde{\mathfrak{S}} = {}^*\mathfrak{A}_2$ wird, wo $\mathfrak{A}_{2*}$ und ${}^*\mathfrak{A}_2$ Einsermatrizen sind. Danach wird

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{S} & 0 \\ 0 & \mathfrak{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A}_1 & 0 \\ {}_*\mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_{1*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\mathfrak{S}} & 0 \\ 0 & \widetilde{\mathfrak{Z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A}_2 & 0 \\ {}_*\mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_{2*} \end{pmatrix} = \mathfrak{A}_2,$$

wo ${}_*\mathfrak{A}_2$ irgendeine Matrix ist, ${}^*\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}_{2*}$ aber Einsermatrizen sind.

Im nächsten Schritt formen wir unsere Matrix $\mathfrak{A}_2$ so um, daß in den Spalten und Zeilen von ${}_*\mathfrak{A}_2$, über bzw. rechts von denen Einsen aus ${}^*\mathfrak{A}_2$ bzw. $\mathfrak{A}_{2*}$ stehen, nur noch Nullen auftreten.

Die Einsen in ${}^*\mathfrak{A}_2$ mögen an den Stellen (m_1, n_1), (m_2, n_2), . . . stehen. Wir bilden die Matrix

$$\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E} & 0 \\ \mathfrak{M} & \mathfrak{E} \end{pmatrix},$$

in der $\mathfrak{M}$ so definiert ist: $\mathfrak{M}$ hat in der m_1-ten, m_2-ten, . . . Spalte die n_1-te, n_2-te, . . . Spalte von ${}_*\mathfrak{A}_2$ stehen, aber jedes Element mit dem negativen Vorzeichen. Die übrigen Spalten von $\mathfrak{M}$ seien Nullspalten. Die Matrix $\mathfrak{P}$ ist nach früheren Überlegungen intakt. Es wird

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{E} & 0 \\ \mathfrak{M} & \mathfrak{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A}_2 & 0 \\ {}_*\mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_{2*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A}_2 & 0 \\ {}_*\mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_{2*} \end{pmatrix} = \mathfrak{A}_3,$$

${}_*\mathfrak{A}_3$ eine Matrix, die mit ${}_*\mathfrak{A}_2$ übereinstimmt bis auf die n_1-te, n_2-te, . . . Spalte, die durch Nullspalten ersetzt sind.

Durch Multiplikation mit einer analog gebildeten intakten Matrix $\mathfrak{Q}$ von rechts ersetzen wir auch die Zeilen von ${}_*\mathfrak{A}_3$, rechts von denen eine Eins in $\mathfrak{A}_{2*}$ steht, durch Nullzeilen. Die so erhaltene Matrix $\mathfrak{A}_4$ sieht so aus:

$$\mathfrak{A}_4 = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A}_2 & 0 \\ {}_*\mathfrak{A}_4 & \mathfrak{A}_{2*} \end{pmatrix}.$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle.

1. Die durch Streichen der Nullreihen aus ${}_*\mathfrak{A}_4$ entstehende Matrix ${}_*\mathfrak{B}$ ist quadratisch, endlich oder unendlich. Nach unseren früheren Resultaten, die für Matrizen endlichen Grades natürlich auch gelten, gibt es zwei Transformatoren, die ${}_*\mathfrak{B}$ in eine Einsermatrix transformieren. Verlangen wir ferner, daß die Reihen von $\mathfrak{A}_4$, die nicht in ${}_*\mathfrak{B}$ vorkommen, ungeändert bleiben, so werden dadurch zwei intakte Transformatoren $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{Q}'$ bestimmt, so daß

$$\mathfrak{P}'\mathfrak{A}_4\mathfrak{Q}' = \mathfrak{A}_5 = \begin{pmatrix} {}^*\mathfrak{A}_2 & 0 \\ {}_*\mathfrak{A}_5 & \mathfrak{A}_{2*} \end{pmatrix}$$

die gewünschte Einsermatrix wird.

2. Die durch Streichen der Nullreihen von ${}_*\mathfrak{A}_4$ entstehende Matrix ${}_*\mathfrak{B}$ ist nicht quadratisch, sie besitze z. B. mehr Zeilen als Spalten, also endlichviele, sagen wir k,

Spalten. Sind $\mathfrak{z}_{n_1}, \ldots, \mathfrak{z}_{n_r}$, $r \leqq k$, die obersten linear unabhängigen Zeilen von ${}_*\mathfrak{B}$, aus denen sich alle übrigen linear kombinieren lassen, so lassen wir die Zeilen $\mathfrak{z}_{n_1}, \ldots, \mathfrak{z}_{n_r}$ und noch $k - r$ weitere ungeändert, die übrigen ersetzen wir durch Nullzeilen. Dies erreichen wir durch vordere Multiplikation von $\mathfrak{A}_4$ mit einer Matrix $\begin{pmatrix} \mathfrak{E} & 0 \\ 0 & \mathfrak{Z} \end{pmatrix}$, in der $\mathfrak{Z}$ eine Matrix der Form $\mathfrak{P}_1$ vom Beginn dieses Paragraphen ist. Dadurch ist dieser Fall auf den vorhergehenden zurückgeführt und die Reduktion einer beliebigen halbfiniten Matrix auf eine Einsermatrix durchgeführt.

§ 3. Äquivalenz der halbfiniten Matrizen: die kanonischen Normalformen.

Bei den zeilenfiniten Matrizen ist die Reduktion beendet, wenn sie bis zur Einsermatrix geführt ist. Denn da alle Permutationen, als Matrizen betrachtet, zeilenfinit und intakt sind, kann man nach Streichung der Nullreihen durch Permutation der Zeilen und der Spalten die Einheitsmatrix erzeugen. Bei den halbfiniten Matrizen dagegen gibt es Permutationen, die als Matrizen geschrieben nicht halbfinit sind, z. B.

$$\mathfrak{E} = \left(\begin{array}{c|cc|cc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \hline \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right).$$

Schon in dem Falle, daß Nullreihen überhaupt nicht auftreten, wird sich dies bemerkbar machen.

Wir nehmen also vorerst an, daß die halbfinite Einsermatrix $\mathfrak{J}$, die wir zu behandeln haben, keine Nullzeilen und keine Nullspalten enthält. Sie enthält dann in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine 1. Wir behaupten, daß sie entweder der Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ oder der folgenden Matrix $\mathfrak{F}$ äquivalent ist:

$$\mathfrak{F} = \left(\begin{array}{c|cccccccc|ccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \hline \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right).$$

Zum Beweise unterscheiden wir, ob $\mathfrak{J}$ in seinem linken unteren Teil, m. a. W., ob ${}_*\mathfrak{J}$ nur endlichviele Einsen enthält oder unendlichviele. Im ersten Fall ist $\mathfrak{J}$ der Einheitsmatrix äquivalent: Bilden wir nämlich die Transponierte $\mathfrak{J}'$ von $\mathfrak{J}$, so ist $\mathfrak{J}'$ halbfinit und zugleich vordere und hintere Reziproke von $\mathfrak{J}$, also $\mathfrak{J}$ nach den Formalsätzen intakt. Im anderen Falle enthält ${}_*\mathfrak{J}$ unendlichviele Einser, und folglich enthält $^*\mathfrak{J}$ unendlichviele Nullspalten, da jede Spalte von $\mathfrak{J}$ genau eine 1 enthalten soll. Andererseits muß $^*\mathfrak{J}$ aber auch in jeder Zeile eine 1 enthalten, da $\mathfrak{J}^*$, so wie es § 2 geliefert hat, nur Nullen enthält. Nach der Äquivalenztheorie der spaltenfiniten Matrizen kann man also $^*\mathfrak{J}$ durch vordere und hintere Multiplikation mit Permutationsmatrizen auf die Gestalt $^*\mathfrak{F}$ bringen, und ebenso $\mathfrak{J}_*$ auf die Gestalt $\mathfrak{F}_*$. Was nun ${}_*\mathfrak{J}$ betrifft, so hat es bei allen diesen Umordnungen seinen Charakter als Einsermatrix mit unendlichvielen Einsern bewahrt. Es ist

klar, daß diese Einser genau auf die Zeilen bzw. Spalten mit den Indizes 0, 1, 3, 5, ... bzw. $-1, -2, -4, -6, \ldots$ verteilt sein müssen; nach Wegstreichung der übrigen Reihen hat man also eine Matrix vor sich, die in jeder Reihe genau eine Eins enthält und die, da links unten keinerlei Beschränkungen im Permutieren bestehen, in die Einheitsmatrix umgeformt werden kann. Damit ist $\mathfrak{F}$ hergestellt.

Enthält nun die Matrix $\mathfrak{F}$ auch Nullzeilen oder Nullspalten, so führt eine ganz ähnliche Betrachtung zur Aufstellung der Normalformen; man muß nur dauernd von der Tatsache Gebrauch machen, daß man die Reihen der Matrix, die ganz auf einer Seite des Teilstrichs stehen, nach Belieben permutieren darf, sowie von der „Verschiebungsmatrix" $\mathfrak{V}$, die schon oben benutzt wurde. Die dabei entstehenden Normalformen kann man vielleicht am besten in Worten beschreiben. Es sei zunächst

$\mathfrak{E}$ die halbfinite Einheitsmatrix, d. h. die ganze Diagonale mit Einsen besetzt, sonst lauter Nullen,

$\mathfrak{E}_u$ die rechtserstreckte Einheitsmatrix, d. h. $a_{00}, a_{11}, \ldots = 1$, sonst alles $= 0$,

$\mathfrak{E}_l$ die linkserstreckte Einheitsmatrix, d. h. $\ldots, a_{-2,-2}, a_{-1,-1} = 1$, sonst alles $= 0$,

$\mathfrak{E}_e$ die endliche Einheitsmatrix, d. h. $a_{00}, \ldots, a_{e-1,e-1} = 1$, sonst alles $= 0$,

$\mathfrak{F}$ die oben definierte Matrix,

$\mathfrak{F}_l$ die Matrix, die aus $\mathfrak{F}$ entsteht, wenn man die rechte Hälfte von $\mathfrak{F}$ durch lauter Nullen ersetzt und in der neuen Matrix die Nullzeilen streicht,

$\mathfrak{F}_u$ die Matrix, die aus $\mathfrak{F}$ durch Nullsetzen der oberen Hälfte und Streichen der Nullspalten in der neuen Matrix entsteht,

$\mathfrak{F}_{lu}$ die Matrix, bei der links unten die Einheitsmatrix steht, d. h. $a_{0,-1}, a_{1,-2}, a_{2,-3}, \ldots = 1$, sonst nur Nullen.

Aus diesen acht Matrizen entstehen nun die sämtlichen Normalformen, in die man jede Einsermatrix überführen kann, indem man in sie noch endlich- oder unendlichviele Nullzeilen oder Nullspalten (außer den teilweise schon vorhandenen) einfügt.

Es handelt sich jetzt darum, inwieweit die so erlangten Normalformen ein kanonisches System von Normalformen darstellen, d. h. inwieweit sie unter einander unäquivalent sind. Für das System der zeilenfiniten Matrizen beantwortet sich die entsprechende Frage in sehr einfacher Weise dadurch, daß man die Lösungen des homogenen Gleichungssystems betrachtet, das die vorgelegte Matrix zur Koeffizientenmatrix hat, ohne der Lösung irgendwelche Einschränkungen aufzuerlegen, sowie die finiten Lösungen des transponierten homogenen Gleichungssystems; die Kardinalzahl der linear unabhängigen unter den Lösungen des einen wie des transponierten Systems, sowie auch die Kardinalzahl der linear unabhängigen Vektoren, die man hinzufügen muß, um eine Basis des Gesamtraumes zu erhalten (Defekt), ist nämlich, wie man leicht einsieht, bei allen äquivalenten Matrizen die gleiche; und man sieht sofort, daß bei den hier von der Reduktionstheorie gelieferten Normalformen diese Kardinalzahlen verschiedene sind, woraus ihre gegenseitige Inäquivalenz hervorgeht.

Für das System der halbfiniten Matrizen reicht nun die analoge Betrachtung der Lösungen der homogenen Gleichungen allein nicht aus, sondern es müssen noch einige andere Invarianten hinzugefügt werden. Deren Schilderung sei der Untersuchung vorangestellt:

Invariante Eigenschaften, die allen zu einander äquivalenten halbfiniten Matrizen gemeinsam sind.

I. Sei $\mathfrak{A}$ irgendeine halbfinite Matrix, $\mathfrak{B} = \mathfrak{U}\mathfrak{A}\mathfrak{V}$ eine zu ihr äquivalente, also $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ intakte halbfinite Matrizen. Heiße ferner eine Stelle $\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots$ *links-finit*, wenn unter ihren Koordinaten mit negativem Index höchstens endlichviele von 0 ver-

schieden sind, *rechtsfinit*, wenn unter ihren Koordinaten mit positivem Index höchstens endlichviele Nichtnullen vorkommen. Man überzeugt sich nun der Reihe nach leicht von der Richtigkeit der folgenden Tatsachen.

1. Die linksfiniten Stellen bilden einen linearen Raum in dem Sinne, daß jede lineare Kombination von endlichvielen linksfiniten Stellen wieder eine linksfinite Stelle ist.

2. Eine lineare homogene Transformation, deren Koeffizientenmatrix halbfinit ist, führt jede linksfinite Stelle in eine linksfinite Stelle über.

3. Eine halbfinite Transformation (wie kurz gesagt werden soll), die überdies intakt ist, führt n linear-unabhängige linksfinite Stellen in n andere linksfinite Stellen über, die wiederum linear unabhängig sind. Sie führt daher auch ein System von unendlichvielen linksfiniten Stellen, von denen je endlichviele linear unabhängig sind, in ein ebensolches System über, läßt also die Kardinalzahl der Dimensionen jedes solchen linearen Raumes invariant.

4. Die Gesamtheit der Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix $\mathfrak{A}$ besitzt dieselbe Kardinalzahl von unter sich linear-unabhängigen Lösungen wie die des Gleichungssystems mit der zu $\mathfrak{A}$ äquivalenten Matrix $\mathfrak{B}$. Jede Lösung des Gleichungssystems mit der Matrix $\mathfrak{A}$ ist nämlich Lösung des Systems mit der Matrix $\mathfrak{U}\mathfrak{A}$, und umgekehrt, und die Gesamtheit dieser Lösungen geht durch die intakte Transformation $\mathfrak{V}$ in die zur Matrix $\mathfrak{B}$ gehörende Gesamtheit über.

5. Eine Menge von unendlichvielen linksfiniten Stellen heiße „gleichmäßig-linksfinit“, wenn man einen gemeinsamen Index für alle Stellen der Menge finden kann, links von dem sie alle nur Nullen aufweisen. Jede halbfinite Transformation führt eine solche gleichmäßig-linksfinite Menge von linksfiniten Stellen in eine ebensolche über.

6. Eine intakte halbfinite Transformation kann eine Menge von unendlichvielen Stellen, die *nicht* gleichmäßig finit sind, nie in eine Menge von Stellen überführen, die gleichmäßig linksfinit sind.

7. Bildet die Gesamtheit der Lösungen eines homogenen linearen halbfiniten Gleichungssystems $\mathfrak{A}$ ein gleichmäßig-linksfinites System, so auch die jedes äquivalenten Gleichungssystems $\mathfrak{B}$, und wenn das eine nicht gleichmäßig-linksfinit ist, so auch das andere nicht.

8. Die Transponierten der halbfiniten Matrizen verhalten sich ganz genau so zum Raum der rechtsfiniten Stellen, wie die halbfiniten Matrizen selbst zum Raum der linksfiniten Stellen.

Auf Grund dieser Vorbemerkungen können wir nun zunächst die Nichtäquivalenz der oben geschilderten 8 Normalformen zu je zweien dartun. Wir beginnen mit $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$. Wären sie äquivalent, also $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}\mathfrak{E}\mathfrak{V}$, so wäre auch $\mathfrak{F}$ intakt, als Produkt dreier intakter Matrizen. Aber bei $\mathfrak{F}$ gibt es eine Menge von Stellen, die zwar alle linksfinit sind, aber nicht gleichmäßig, und denen vermöge $\mathfrak{F}$ ein gleichmäßig-linksfinites System zugeordnet ist. Bezeichnet nämlich $\mathfrak{e}_j$ diejenige Stelle, deren sämtliche Koordinaten 0 sind mit Ausnahme der einen j-ten $e_j = 1$, so transformiert $\mathfrak{F}$ die Stellen $\mathfrak{e}_{-2}, \mathfrak{e}_{-4}, \mathfrak{e}_{-6}, \ldots$ in die Stellen $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_5, \ldots$; alle diese Stellen sind linksfinit, aber während die zweite Menge gleichmäßig linksfinit ist, ist es die erste Menge nicht. Nach Satz 6 verträgt sich dies aber nicht mit der Intaktheit der Matrix $\mathfrak{F}$.

$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ können mit keiner der 6 weiteren Normalmatrizen äquivalent sein, da diese alle irgendwelche Nullreihen enthalten, also die zugehörigen oder die transponierten homogenen Gleichungen irgendwelche Lösungen aufweisen, die bei $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ offensichtlich ausgeschlossen sind. Die Kardinalzahl dieser Lösungen ist bei allen übrigen Normalformen in beiderlei Sinne ∞, bei $\mathfrak{F}_u$ und $\mathfrak{F}_l$ nur je in dem einen Sinne, so daß diese Kardinalzahlen

nur $\mathfrak{F}_u$ und $\mathfrak{F}_l$ als unter sich und von den übrigen nichtäquivalent erweisen. Erst Satz 7 und 8 helfen dazu, die übrigen Nichtäquivalenzen einzusehen. Daß zwei Matrizen vom Typus $\mathfrak{E}_e$ mit einer verschiedenen endlichen Anzahl e von Einsen unäquivalent sind, zeigt man entweder wie bei endlichen Matrizen mit dem Begriff der Determinantenteiler oder mit dem oben im zeilenfiniten Falle erwähnten Defektbegriff.

Wir haben schließlich noch die vielerlei, aber leicht zu übersehenden derivierten Normalformen auf ihre Äquivalenz hin zu untersuchen, die sich aus den betrachteten 8 Normalformen durch Einfügung von (weiteren) Nullreihen ableiten. Es gilt der Satz:

Zwei solche Einsermatrizen sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie

1. nach Streichen geeigneter Nullreihen in dieselbe der 8 Normalformen übergehen (im Falle $\mathfrak{E}_e$ muß außerdem die Zahl e in beiden Matrizen die gleiche sein), wenn
2. die Kardinalzahlen der Nullzeilen und der Nullspalten übereinstimmen, und wenn
3. die Anzahl der Nullreihen auf der einen bzw. der anderen Seite des Teilstriches in beiden Matrizen endlich oder in beiden unendlich ist.

Beim Beweise kommt man nicht durchweg mit den Sätzen 7 und 8 aus. Einige Fälle können erst dadurch bewältigt werden, daß man wie beim Beweise der Nichtäquivalenz von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ selbst Satz 6 heranzieht. Wir wollen uns damit begnügen, einen Fall als Muster durchzuführen; man wird sofort übersehen, daß es auch sonst immer nach demselben Prinzip gehen muß. Wir betrachten die Matrizen $\overline{\mathfrak{E}}_l$ und $\overline{\mathfrak{F}}_l$, die aus $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ dadurch entstehen, daß man die linke Hälfte beider Matrizen beibehält, in die rechte aber lauter Nullen setzt. $\overline{\mathfrak{E}}_l$ und $\overline{\mathfrak{F}}_l$ haben als Lösungen der homogenen Gleichungen eine gleichmäßig-linksfinite Menge von Stellen, und bezüglich der transponierten homogenen Gleichungen verhalten sie sich ebenfalls gleichartig. Ebenso wie bei $\mathfrak{F}$ gibt es nun bei jeder Matrix, bei der sich unendlich viele Einsen nach links unten erstrecken, ein nicht gleichmäßig-linksfinites Stellensystem, das in ein gleichmäßig-linksfinites transformiert wird; vermöge Satz 6 wird es bei jeder dazu äquivalenten Matrix ein ebensolches geben; aber bei einer Matrix, die nach Streichung geeigneter Nullreihen zu einer Matrix wird, die höchstens in der Diagonale Einser hat, kann es etwas derartiges nicht geben. Also ist $\overline{\mathfrak{E}}_l$ mit $\overline{\mathfrak{F}}_l$ unäquivalent.

Damit ist die Theorie der linearen halbfiniten Gleichungssysteme vollständig gegeben.

§ 4. Andere konvergenzfreie Systeme.

In § 3 ist von der Tatsache Gebrauch gemacht worden, daß die halbfiniten Matrizen oder richtiger die Transformationen mit halbfiniter Matrix den Raum der linksfiniten Stellen in sich transformieren. Diese Tatsache ist umkehrbar: die halbfiniten Matrizen sind die einzigen mit dieser Eigenschaft; der Beweis hierfür ist in ganz ähnlicher Weise wie der für die Vollständigkeit des halbfiniten Systems (§ 1) zu führen. *Das halbfinite System kann man also auch charakterisieren als das System aller Transformationen, die auf den Raum der linksfiniten Stellen anwendbar sind und ihn in sich transformieren.* In ähnlicher Weise könnte man übrigens die Gesamtheit der zeilenfiniten und die der spaltenfiniten Matrizen charakterisieren, die eine als zu dem Raum aller Stellen gehörig, die andere als zum Raum der finiten Stellen gehörig, d. h. der Stellen, die nur endlichviele Nichtnullen aufweisen.

Diese Auffassungsweise liefert den Ansatzpunkt für die Aufstellung weiterer Systeme. Indem wir uns die nähere Ausführung hiervon für eine spätere Gelegenheit vorbe-

halten, geben wir im Augenblick nur die beiden nächst folgenden Systeme noch an. Das nächste ergibt sich, wenn man in einer zeilenfiniten Matrix statt der Zahlen, die ihre Elemente sind, lauter spaltenfinite Matrizen einsetzt, das folgende, indem man statt spaltenfiniter Matrizen die transponierten von halbfiniten Matrizen einsetzt. Auf diese zweifach geordneten Matrizen folgen dann mehrfach geordnete Matrizen.

Wir gehen auf diese Theorie im Augenblick deshalb noch nicht näher ein, weil die Frage der Identität der so entstehenden Systeme einer Präzisierung bedarf. Man wird natürlich zwei solche Systeme als identisch ansehen, wenn sie durch eine homologe Permutation der Zeilen und Spalten auseinander hervorgehen. Aber Permutationen sind etwas Spezielles, und zu einer befriedigenden Begriffsbildung gelangt man erst dann, wenn man die Identität als Isomorphismus interpretiert. Die Untersuchung aber, wann zwei solche Systeme isomorph sind, erfordert ganz andere Prinzipien, die Herr A. Weber in seiner Dissertation soeben angewendet hat. Zu seinen Resultaten gehört, daß das zeilenfinite System keinem anderen isomorph sein kann, und daß das halbfinite im wesentlichen nur zu seinem transponierten isomorph ist. Erst die Benutzung der hier angewendeten Prinzipien kann es gestatten, die Aufstellung aller konvergenzfreien Systeme anzugreifen.

Eingegangen 2. Februar 1931.

Algebraische Funktionen von zwei Veränderlichen.

A. Totale Differentiale. (Algebraischer Teil.)

Von *Heinrich W. E. Jung* in Halle a. d. Saale.

Diese und einige folgende Arbeiten enthalten inhaltlich nicht viel Neues. Nur die Art der Behandlung des Stoffes rechtfertigt sie vielleicht.

I. Der algebraische Körper K.

1. *Definition von K.*

Es sei K ein algebraischer Körper zweier unabhängigen Veränderlichen. Wir wählen aus K zwei voneinander unabhängige Größen x, y. Es sei K vom Relativgrade n über dem Körper (xy) der rationalen Funktionen von x, y. Ist dann z eine in bezug auf (xy) primitive Größe aus K, so besteht eine Gleichung $F(x, y, z) = 0$, wo F ein rational unzerlegbares Polynom von x, y, z ist, das in z den Grad n hat.

Der Körper K enthält einen Unterkörper, dessen Funktionen nur von x abhängen. Wir bezeichnen ihn mit K_1 und sein Geschlecht mit p_1. K_1 enthält den Körper (x) der rationalen Funktionen von x, kann aber noch andere Funktionen enthalten. Unter K_2 verstehen wir den Unterkörper von K, der die Größen enthält, die nur von y abhängen; er habe das Geschlecht p_2.

2. *Die Stellen des Körpers K* [1]).

Eine Stelle S des Körpers K ist dadurch definiert, daß sich in ihrer Umgebung alle Größen aus K darstellen lassen als Quotienten zweier gewöhnlichen Potenzreihen zweier Hilfsgrößen u, v. Es sind u, v nur Ortsuniformisierende und von Stelle zu Stelle verschieden. Sie können als Funktionen aus K gewählt werden. Wir können und wollen es so einrichten, daß x und y an allen Stellen bestimmte Werte annehmen. Sind a, b die Werte, die x, y an der Stelle S annehmen, so wollen wir $x - a$ mit x' und $y - b$ mit y' bezeichnen, wobei $x - a$ und $y - b$ bedeuten sollen $1/x$ und $1/y$, wenn a und b unendlich sind. Es sind dann x' und y' an jeder Stelle gewöhnliche Potenzreihen der Ortsuniformisierenden u, v. Es sind also x und y bei der Definition der Stellen ausgezeichnet, wodurch aber die Definition der Stellen keineswegs eindeutig geworden ist. Wir setzen voraus, daß die Stellen, für die $x = \infty$ oder $y = \infty$, keine Besonderheit aufweisen, was, wenn nötig, durch eine lineare Transformation in x und eine in y immer zu erreichen ist.

Die Stellen sind alle gleichberechtigt, so daß an sich keine singulär ist. Wir können nur von singulären Stellen in bezug auf x, y sprechen, und zwar nennen wir eine Stelle S dann und nur dann singulär, wenn die Potenzreihen von u, v, die x' und y' in der Umgebung von S darstellen, einen gemeinsamen Teiler haben.

---

[1]) Die Ziffern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß.

3. *Primteiler* [2]).

Es sei $\mathfrak{P}$ ein algebraischer Körper einer Veränderlichen, der zu K in der Beziehung steht, daß jeder Größe aus K eindeutig eine aus $\mathfrak{P}$ entspricht, und zwar so, daß die algebraischen Gleichungen zwischen den Größen aus K erhalten bleiben. Wir müssen dabei freilich im Körper $\mathfrak{P}$ auch die Zahl ∞ zulassen. Den Übergang von K zu $\mathfrak{P}$ drücken wir dadurch aus, daß wir sagen, wir setzen $\mathfrak{P} = 0$. Wir ordnen dem Körper $\mathfrak{P}$ einen Primteiler von K zu, den wir auch mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen, indem wir die Teilbarkeit durch $\mathfrak{P}$ in folgender Weise definieren.

Ist R eine Funktion aus K und ist $R = 0$ für $\mathfrak{P} = 0$, so sagen wir, R ist durch eine positive Potenz von $\mathfrak{P}$ teilbar. Sind R und T zwei Funktionen aus K, so ist für $\mathfrak{P} = 0$ der Bruch $R/T = 0$, $= \infty$ oder gleich einer von 0 und ∞ verschiedenen Größe des Körpers $\mathfrak{P}$. Wir sagen in diesen Fällen, R ist durch eine höhere, eine niedrigere oder durch dieselbe Potenz von $\mathfrak{P}$ teilbar wie T. Es gibt immer Funktionen in K, die durch eine möglichst niedrige Potenz von $\mathfrak{P}$ teilbar sind. Ist G eine solche Funktion, so gibt es zu jeder Funktion R aus K eine ganze Zahl λ derart, daß R/G^λ für $\mathfrak{P} = 0$ in eine von 0 und ∞ verschiedene Größe des Körpers $\mathfrak{P}$ übergeht. Wir sagen dann, R ist genau durch die λ-te Potenz von $\mathfrak{P}$ teilbar.

Es sei R eine Funktion aus K, die durch die erste Potenz von $\mathfrak{P}$ teilbar ist, und S sei eine Stelle von K. Für die Umgebung von S sei $R = G(u, v)/H(u, v)$, wo G und H gewöhnliche Potenzreihen von u, v ohne gemeinsamen Teiler sein sollen. Es seien u und v als Funktionen aus K gewählt. Für $\mathfrak{P} = 0$ werden u und v Größen des algebraischen Körpers einer Veränderlichen $\mathfrak{P}$. Werden sie also nicht beide zu Konstanten, so besteht für $\mathfrak{P} = 0$ zwischen ihnen eine unzerlegbare Gleichung $g(u, v) = 0$. Werden G und g beide Null für $u = v = 0$, so bezeichnen wir den größten gemeinsamen Teiler von G und g mit $\mathfrak{P}(u, v)$ und nennen ihn die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}$ für die Stelle S. Sie ist nur bis auf eine Einheit als Faktor bestimmt. In der Umgebung von S ist dann der Primteiler $\mathfrak{P}$ durch die Gleichung $\mathfrak{P}(u, v) = 0$ gegeben. Wir ergänzen diese Definition in folgender Weise. Haben G und g keinen eigentlichen gemeinsamen Teiler, d. h. keinen Teiler, der für $u = v = 0$ verschwindet, oder werden G oder g in S nicht Null, so sei die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}$ für die Stelle S gleich 1 gesetzt.

Wir berücksichtigen im folgenden nur diejenigen Primteiler, die wenigstens an einer Stelle eine von 1 verschiedene zugeordnete Funktion haben. Es gilt dann der Satz:

Jede Funktion des Körpers K ist auf eine und nur eine Art in das Produkt einer endlichen Zahl von Primteilern zerlegbar. Ist R eine Funktion aus K und ist, in Primteiler zerlegt, $R = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_r$, so hat die Darstellung von R in der Umgebung einer Stelle S durch die Hilfsgrößen u, v die Form $R = \mathfrak{P}_1(u, v)\, \mathfrak{P}_2(u, v) \cdots \mathfrak{P}_r(u, v)\, E$, wo $\mathfrak{P}_k(u, v)$ die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}_k$ für S und E eine Einheit ist.

Ist die zugeordnete Funktion eines Primteilers $\mathfrak{P}$ für eine Stelle S nicht 1, so sagen wir, $\mathfrak{P}$ geht durch die Stelle S.

Werden x und y für $\mathfrak{P} = 0$ beide konstant, so nennen wir $\mathfrak{P}$ einen *Punktprimteiler*. Wir bezeichnen diese Primteiler i. a. mit $\mathfrak{P}$ unter Hinzufügung eines Index. Sind a, b die konstanten Werte von x, y für $\mathfrak{P} = 0$, so soll (a, b) die Projektion von $\mathfrak{P}$ heißen und einer jeden Stelle, durch die $\mathfrak{P}$ geht. Ist S eine solche Stelle, so nehmen x, y in S die Werte a, b an und $x' = x - a$, $y' = y - b$ sind als Funktionen der Ortsuniformisierenden u, v durch $\mathfrak{P}(u, v)$ teilbar. Da auch umgekehrt x' und y' für $\mathfrak{P} = 0$ beide 0 werden, wenn sie als Funktionen von u, v durch $\mathfrak{P}(u, v)$ teilbar sind, so folgt nach der am Ende von Nr. 2 angegebenen Definition: Eine Stelle S ist dann und nur dann singulär (in bezug auf x, y), wenn durch sie mindestens ein Punktprimteiler geht.

Werden x und y für $\mathfrak{P} = 0$ nicht beide konstant, so nennen wir $\mathfrak{P}$ einen *Kurvenprimteiler*; es besteht dann für $\mathfrak{P} = 0$ zwischen ihnen eine unzerlegbare Gleichung $P(x, y) = 0$. Den durch diese Gleichung definierten algebraischen Körper einer Veränderlichen bezeichnen wir mit P und nennen ihn die Projektion von $\mathfrak{P}$ (in bezug auf x, y). Es ist P ein Unterkörper von $\mathfrak{P}$ und der Zähler von $P(x, y)$. Den Grad von $\mathfrak{P}$ in bezug auf P nennen wir kurz den Grad von $\mathfrak{P}$. Ist dieser Grad f, so nennen wir P^f die Norm von $\mathfrak{P}$ und $P^f(x, y)$ die Idealnorm von $\mathfrak{P}$. Unter der Norm und der Idealnorm eines Punktprimteilers verstehen wir die Zahl 1.

4. *Die Funktionen des Körpers K in der Umgebung eines Kurvenprimteilers* [3][4]).

Es sei $P(x, y)$ ein (rational) unzerlegbares Polynom von x, y. Ist P von x unabhängig, so kann P in der Form $y - b$ angenommen werden, und wenn es von y unabhängig ist, in der Form $x - a$. Wir setzen voraus, daß P von y abhängig ist. Um den Fall zu übersehen, wo P von y unabhängig ist, braucht man nur x mit y zu vertauschen. Es sei $y = y_1$ eine Lösung von $P = 0$. Dann läßt sich jede Funktion aus K als Potenzreihe darstellen, die nach ganzen steigenden Potenzen von $y - y_1$ oder einer ganzzahligen Wurzel aus $y - y_1$ fortschreitet und die höchstens eine endliche Zahl von negativen Potenzen enthält. Die Koeffizienten sind algebraische Funktionen von x. Sie gehören einem Körper an, der der Koeffizientenkörper heißt. Solcher Entwicklungen nach Potenzen von $y - y_1$ gibt es für jede Funktion eine endliche Zahl. Es genügt, diese Entwicklungen. für die primitive Größe z zu kennen, da daraus die der anderen Größen aus K ohne weiteres folgen.

Es sei

$$z = e_0(y - y_1)^{\frac{\alpha}{\lambda}} + e_1(y - y_1)^{\frac{\alpha+1}{\lambda}} + \cdots \tag{1}$$

eine solche Entwicklung. Sie schreite nach steigenden ganzen Potenzen von $(y - y_1)^{\frac{1}{\lambda}}$ fort. Der Koeffizientenkörper dieser Reihe heiße Q. Er ist ein Körper über P, etwa vom Relativgrade h. Aus der Entwicklung (1) gehen dann, wenn man sie selbst mitrechnet, λh Entwicklungen hervor, indem man einmal $(y - y_1)^{\frac{1}{\lambda}}$ durch seine λ möglichen Werte ersetzt und außerdem, unabhängig davon, die Koeffizienten durch ihre h in bezug auf P konjugierten Werte. Diese λh Entwicklungen brauchen nicht von einander verschieden zu sein. Die Zahl der verschiedenen ist ein Vielfaches von λ und sei mit λf bezeichnet. Es ist f ein Teiler von h; ist $h = rf$, so sind je r der Entwicklungen miteinander identisch,

Ist $r > 1$, so gibt es eine algebraische Funktion e von x, die folgendes leistet. Setzen wir

$$e(y - y_1) = \eta, \tag{2}$$

und schreiben wir (1) in der Form

$$z = t_0 + t_1\eta^{\frac{1}{\lambda}} + t_2\eta^{\frac{2}{\lambda}} + \cdots + t_{\lambda-1}\eta^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}, \tag{3}$$

wo die t_r Potenzreihen nach ganzen Potenzen von $y - y_1$ sein sollen, so ist der Koeffizientenkörper dieser Reihen ein Körper vom Relativgrade f über P, den wir mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen. Die λf Reihen, die aus (3) hervorgehen, indem man $\eta^{\frac{1}{\lambda}}$ durch seine λ Werte und die Koeffizienten durch ihre konjugierten ersetzt, sind voneinander verschieden. Entwickelt man die Funktionen aus K mit Hilfe von (3) nach Potenzen von η, setzt dann $\eta = 0$, so geht der Körper K in den Körper $\mathfrak{P}$ über. Es ist also $\mathfrak{P}$ ein Kurvenprimteiler, P ist seine Projektion und f sein Grad. Wir nennen $\mathfrak{P}$ einen *Verzweigungsteiler* von der *Verzweigungsordnung* $\lambda - 1$. Die Funktion e kann aus $\mathfrak{P}$ gewählt werden.

Ist $\lambda f = n$, so gibt es keinen weiteren Primteiler, dessen Projektion P ist. Ist $\lambda f < n$, so gibt es mindestens noch einen. Es gebe etwa noch genau einen, $\mathfrak{Q}$; seine Verzweigungsordnung sei $\mu - 1$ und sein Grad g. Es ist $\lambda f + \mu g = n$. Der Zähler P von $P(x, y)$ ist genau durch $\mathfrak{P}^{\lambda}\mathfrak{Q}^{\mu}$ teilbar.

Wir werden die Verzweigungsteiler, wenn sie besonders hervorgehoben werden sollen, mit $\mathfrak{W}$ unter Hinzufügung eines Index bezeichnen. Das Produkt aller Verzweigungsteiler, jeden in der Potenz seiner Verzweigungsordnung genommen, bezeichnen wir mit $\mathfrak{W}$ und nennen es den *Kurvenverzweigungsdivisor* (in bezug auf x, y). Die Norm von $\mathfrak{W}$ bezeichnen wir mit W und die Idealnorm mit $W(x, y)$ oder kurz auch mit W. Wir zerlegen W in drei Faktoren W_1, W_2, W_3, von denen der erste nur von x, der zweite nur von y abhängen soll, während der dritte x und y enthält. Diese Zerlegung übertragen wir auch auf $\mathfrak{W}$. Wir verstehen noch unter w_k ein Polynom, das alle Faktoren enthält, die W_k hat, aber jeden nur in der ersten Potenz, und setzen $w = w_1 w_2 w_3$. Ist dann S eine singuläre Stelle und ist (g, h) die Projektion von S, so ist (g, h) eine mehrfache Stelle der Kurve $w(x, y) = 0$.

Es sei noch bemerkt, daß man statt nach Potenzen von $y - y_1$ auch nach Potenzen von $P(x, y)$ entwickeln kann.

5. *Divisoren und Klassen* [2]).

Das Produkt irgendwelcher Primteiler heißt Divisor. Unter der zugeordneten Funktion eines Divisors $\mathfrak{Q}$ für eine Stelle S verstehen wir die Funktion, die entsteht, wenn man jeden Primteiler von $\mathfrak{Q}$ durch seine zugeordnete Funktion ersetzt. Wir teilen die Divisoren in Klassen, indem wir zwei Divisoren dann und nur dann in dieselbe Klasse aufnehmen, wenn ihr Quotient eine Funktion des Körpers ist. Zwei Divisoren $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$, die derselben Klasse angehören, heißen äquivalent, $\mathfrak{Q}_1 \sim \mathfrak{Q}_2$. Ein Divisor heißt ganz, wenn er keinen Primteiler in negativer Potenz enthält. Die Zahl der in einer Klasse enthaltenen linear unabhängigen ganzen Divisoren ist endlich und heißt die Dimension der Klasse. Wir bezeichnen die Klasse eines Divisors $\mathfrak{Q}$ mit $(\mathfrak{Q})$ und ihre Dimension mit $\{\mathfrak{Q}\}$.

Unter den Klassen heben wir zwei hervor, die Hauptklasse und die Differential- oder kanonische Klasse. Die Hauptklasse besteht aus den Funktionen des Körpers. Sie enthält also auch den Divisor 1 und kann mit (1) bezeichnet werden. Ihre Dimension ist 1, da 1 ihr einziger ganzer Divisor ist. Sind ξ und η zwei voneinander unabhängige Größen aus K und ist R irgendeine von 0 und ∞ verschiedene Größe aus K, so ist in der Umgebung jeder Stelle S das Doppeldifferential $R d\xi d\eta$ in der Form $\mathfrak{Q} du dv$ darstellbar, wo $\mathfrak{Q}$ die zugeordnete Funktion eines durch das Differential eindeutig definierten Divisors ist, den wir auch mit $\mathfrak{Q}$ bezeichnen. Alle so definierten Divisoren sind untereinander äquivalent, und jeder von ihnen definiert die Differentialklasse. Wir bezeichnen sie mit $(\mathfrak{K})$. Ihre Dimension wird mit p_g bezeichnet und das geometrische Geschlecht von K genannt. Es ist p_g die Zahl der linear unabhängigen Doppeldifferentiale erster Gattung.

Im besonderen bezeichnen wir den durch das Differential $dxdy$ bestimmten Divisor mit $\mathfrak{Z}\mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2}$, wo $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ die Nenner von x und y sind. Es ist dann an jeder Stelle $dx'dy' = \mathfrak{Z} du dv$, wo x', y' die in Nr. 2 angegebene Bedeutung haben. Ferner unterscheidet sich $\mathfrak{Z}$ von dem in Nr. 4 definierten Kurvenverzweigungsdivisor $\mathfrak{W}$ nur durch einen ganzen Divisor, der nur aus Punktprimteilern besteht, der aber auch jeden von diesen mindestens in der ersten Potenz enthält. Wir schreiben

$$(4) \qquad \mathfrak{Z} = \mathfrak{V}\mathfrak{W} = \mathfrak{V}\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_2\mathfrak{W}_3 = \frac{dx'\,dy'}{du\,dv} = \frac{\partial x'}{\partial u}\frac{\partial y'}{\partial v} - \frac{\partial x'}{\partial v}\frac{\partial y'}{\partial u}.$$

Über die Punktprimteiler gilt noch folgendes. Keine Funktion aus K kann nur längs Punktprimteilern null oder nur längs solcher unendlich werden. Es gilt sogar:

Wird eine Funktion aus K für einen Punktprimteiler $\mathfrak{V}$ null (unendlich), so wird sie mindestens längs eines Kurvenprimteilers null (unendlich), der durch mindestens eine der Stellen geht, durch die $\mathfrak{V}$ geht. Enthält also eine Klasse einen Divisor $\mathfrak{V}$, der nur aus Punktprimteilern besteht, so kann sie höchstens $\mathfrak{V}$ als ganzen Divisor enthalten.

6. *Zahl der Schnittpunkte zweier Klassen* [2]).

Es sei $\mathfrak{P}$ ein Primteiler. Für $\mathfrak{P} = 0$ geht jeder zu $\mathfrak{P}$ teilerfremde Divisor $\mathfrak{Q}$ von K in einen Divisor $\mathfrak{q}$ des Körpers $\mathfrak{P}$ über. Da jede Funktion aus K in eine Funktion aus $\mathfrak{P}$ übergeht, so gehen äquivalente Divisoren in äquivalente Divisoren über oder: Alle Divisoren der Klasse $(\mathfrak{Q})$ gehen in Divisoren der Klasse $(\mathfrak{q})$ über. Die Ordnung der Klasse $(\mathfrak{q})$ bezeichnen wir mit $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{P})$ und nennen sie die Zahl der Schnittpunkte der Divisoren $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{P}$ oder besser der Klassen $(\mathfrak{Q})$ und $(\mathfrak{P})$. Diese Zahl hat auch dann einen bestimmten Sinn, wenn der speziell aus $(\mathfrak{Q})$ gewählte Divisor $\mathfrak{Q}$ zu $\mathfrak{P}$ nicht teilerfremd ist. Ist $\mathfrak{T}$ ein weiterer Divisor und ist, in Primteiler zerlegt,

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1}\mathfrak{P}_2^{\lambda_2}\dots\mathfrak{P}_r^{\lambda_r},$$

so setzen wir

$$(\mathfrak{Q}, \mathfrak{T}) = \lambda_1(\mathfrak{Q}, \mathfrak{P}_1) + \lambda_2(\mathfrak{Q}, \mathfrak{P}_2) + \cdots + \lambda_r(\mathfrak{Q}, \mathfrak{P}_r)$$

und nennen diese Zahl die Zahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{T}$ oder der Klassen $(\mathfrak{Q})$ und $(\mathfrak{T})$. Im besonderen heißt $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q})$ der Grad der Klasse $(\mathfrak{Q})$. Für das Symbol $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{T})$ gilt:

$$(\mathfrak{Q}, \mathfrak{T}) = (\mathfrak{T}, \mathfrak{Q}).$$

(5) $$(\mathfrak{Q}, \mathfrak{T}) = (\mathfrak{Q}', \mathfrak{T}'), \text{ wenn } \mathfrak{Q} \sim \mathfrak{Q}', \mathfrak{T} \sim \mathfrak{T}',$$

$$(\mathfrak{Q}, \mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2) = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{T}_1) + (\mathfrak{Q}, \mathfrak{T}_2).$$

Von besonderer Wichtigkeit ist es zu wissen, welche Klasse von K für $\mathfrak{P} = 0$ in die kanonische Klasse von $\mathfrak{P}$ übergeht. Dazu müssen wir erst den Divisor der mehrfachen Punkte von $\mathfrak{P}$ definieren. Es sei S eine Stelle durch die $\mathfrak{P}$ geht, und $\mathfrak{P}(u, v)$ sei die zugeordnete Funktion von $\mathfrak{P}$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{d}_S$ den Divisor der mehrfachen Stellen, den die Kurve $\mathfrak{P}(u, v) = 0$ in $u = v = 0$ hat, also den Divisor von $\mathfrak{P}$, in den

$$\frac{1}{du}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial v} = -\frac{1}{dv}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial u}$$

für $\mathfrak{P} = 0$ an der Stelle S übergeht. Nur für eine endliche Zahl von Stellen S ist $\mathfrak{d}_S$ von 1 verschieden. Das Produkt aller dieser Divisioren $\mathfrak{d}_S$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{d}_\mathfrak{P}$ und nennen es den Divisor der mehrfachen Stellen von $\mathfrak{P}$. Die Ordnung von $\mathfrak{d}_\mathfrak{P}$, die immer gerade ist, bezeichnen wir mit $2\sigma_\mathfrak{P}$. Es gilt der Satz:

Sind $(\mathfrak{K})$ und $(\mathfrak{k})$ die kanonischen Klassen von K und $\mathfrak{P}$, so geht die Klasse $(\mathfrak{K}\mathfrak{P})$ für $\mathfrak{P} = 0$ in die Klasse $(\mathfrak{k}\mathfrak{d}_\mathfrak{P})$ über. Da die Ordnung von $(\mathfrak{k})$ gleich $2\pi - 2$ ist, wenn π das Geschlecht von $\mathfrak{P}$ ist, so gilt weiter:

Ist π das Geschlecht von $\mathfrak{P}$ und $2\sigma_\mathfrak{P}$ die Ordnung des Divisors der mehrfachen Stellen von $\mathfrak{P}$, so ist

(6) $$2\pi - 2 = (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}\mathfrak{K}) - 2\sigma_\mathfrak{P}.$$

Wir definieren noch das Geschlecht $\pi(\mathfrak{Q})$ einer Klasse $(\mathfrak{Q})$ durch

(7) $$2\pi(\mathfrak{Q}) - 2 = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}\mathfrak{K}).$$

7. *Die Divisorenbüschel $x = konst.$ und $y = konst.$*

Die Nenner von x und y seien $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$. Sind a und b irgend zwei Konstanten, so sind die Zähler von $x - a$, $y - b$, die mit $\mathfrak{L}_a, \mathfrak{M}_b$ bezeichnet seien, ganze Divisoren der Klassen $(\mathfrak{L})$, $(\mathfrak{M})$. Die Divisoren $\mathfrak{L}_a$ und $\mathfrak{M}_b$ bilden die Divisorenbüschel $\langle\mathfrak{L}\rangle$ und $\langle\mathfrak{M}\rangle$. Da x an jeder Stelle einen bestimmten Wert annimmt, so kann an keiner Stelle gleichzeitig

$x - a_1$ und $x - a_2$ null sein. Daher können zwei ganze Divisoren aus $(\mathfrak{L})$ sich nirgends schneiden, so daß $(\mathfrak{L}, \mathfrak{L}) = 0$. Die ganzen Divisoren von $(\mathfrak{L})$ gehen daher für $\mathfrak{L}_a = 0$ in Konstante über oder die Klasse $(\mathfrak{L})$ geht in die Hauptklasse des Körpers $\mathfrak{L}_a$ über. Entsprechendes gilt für die Klasse $(\mathfrak{M})$. Da n Werte von z zu jedem Wertepaar x, y gehören, so ist die Zahl der Schnittpunkte eines ganzen Divisors aus $(\mathfrak{L})$ und eines aus $(\mathfrak{M})$ gleich n. Es ist also

$$(8) \qquad (\mathfrak{L}, \mathfrak{L}) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{M}) = 0, \quad (\mathfrak{L}, \mathfrak{M}) = n.$$

Die Divisoren $\mathfrak{L}_a$ können sämtlich zerfallen. Da aber ganz allgemein die Divisoren einer linearen Schar keine beweglichen mehrfachen Stellen haben können, so sind i. a. die Primteiler, in die $\mathfrak{L}_a$ zerfällt, voneinander verschieden, schneiden sich gegenseitig nicht und haben keine mehrfachen Stellen. Nur für eine endliche Zahl von Werten a kann es anders sein. Es sei a keiner von den Ausnahmewerten und es sei, in Primteiler zerlegt,

$$\mathfrak{L}_a = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_r,$$

dann ist zunächst $(\mathfrak{P}_k, \mathfrak{P}_l) = 0$ für $k \neq l$. Aber das gilt auch für $k = l$. Ist nämlich c eine von a verschiedene Konstante, so wird x z. B. längs $\mathfrak{P}_2$ gleich a und längs $\mathfrak{L}_c$ gleich c, so daß $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{L}_c$ sich nicht schneiden können. Es ist also $(\mathfrak{P}_2, \mathfrak{L}_c) = 0$, also auch $(\mathfrak{P}_2, \mathfrak{L}_a) = 0$, da $\mathfrak{L}_c \sim \mathfrak{L}_a$, oder

$$(\mathfrak{P}_2, \mathfrak{L}_a) = (\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_1) + (\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_2) + \cdots + (\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_r) = 0,$$

woraus in der Tat folgt, daß auch $(\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_2) = 0$ ist.

Das Geschlecht von $\mathfrak{P}_k$ sei p_k. Die Zahlen p_k sind alle einander gleich, da die $\mathfrak{P}_k$ stetig ineinander übergehen können. Da $\mathfrak{P}_k$ keine mehrfache Stelle hat, so wird nach (6) wegen $(\mathfrak{P}_k, \mathfrak{P}_k) = 0$

$$(9) \qquad 2p_k - 2 = (\mathfrak{P}_k, \mathfrak{K}).$$

Das virtuelle Geschlecht p von $\mathfrak{L}_a$ oder das Geschlecht der Klasse $(\mathfrak{L})$ definieren wir durch

$$(10) \qquad p - 1 = (p_1 - 1) + (p_2 - 1) + \cdots + (p_r - 1).$$

Hieraus folgt wegen (5) und (9)

$$2p - 2 = (\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_r, \mathfrak{K}) = (\mathfrak{L}_a, \mathfrak{K}) = (\mathfrak{L}, \mathfrak{K}).$$

Definieren wir das Geschlecht q der Klasse $(\mathfrak{M})$ analog wie das von $(\mathfrak{L})$, so haben wir unter Beachtung von $(\mathfrak{L}, \mathfrak{L}) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{M}) = 0$

$$(11) \quad 2p - 2 = (\mathfrak{L}, \mathfrak{K}) = (\mathfrak{L}, \mathfrak{L}\mathfrak{K}), \quad 2q - 2 = (\mathfrak{M}, \mathfrak{K}) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{M}\mathfrak{K}),$$

in Übereinstimmung mit der in Nr. 6 gegebenen Definition des Geschlechtes einer Klasse.

Wir definieren noch die Jacobischen Divisoren der Büschel $\langle \mathfrak{L} \rangle$ und $\langle \mathfrak{M} \rangle$. Es sei a eine Konstante, und zwar ein Ausnahmewert und es sei der Zähler $\mathfrak{L}_a$ von $x - a$, in Primteiler zerlegt,

$$\mathfrak{L}_a = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \mathfrak{P}_2^{\lambda_2} \cdots \mathfrak{P}_r^{\lambda_r}.$$

Es ist dann $\mathfrak{P}_k$, wenn es kein Punktprimteiler ist, ein Verzweigungsteiler der Verzweigungsordnung $\lambda_k - 1$ und genau in der Potenz $\lambda_k - 1$ in $\mathfrak{W}_1$ enthalten, da x längs $\mathfrak{P}_k$ konstant ist. Wir bezeichnen den Divisor, der jeden der Primteiler $\mathfrak{P}_k$ genau in der ersten Potenz enthält, mit $\mathfrak{L}'_a$, setzen also

$$\mathfrak{L}'_a = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_r.$$

Wir setzen noch $\mathfrak{L}''_a = \mathfrak{L}_a / \mathfrak{L}'_a$. Es ist $\mathfrak{L}''_a$ nur für eine endliche Zahl von Werten von a von 1 verschieden. Das Produkt aller $\mathfrak{L}''_a$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{V}'\mathfrak{W}_1$, so daß nach dem eben gesagten $\mathfrak{V}'$ ein ganzer Divisor ist, der nur Punktprimteiler enthält. Da an jeder Stelle $x - a = \mathfrak{L}_a(u, v)$, so sind $\partial x'/\partial u$ und $\partial x'/\partial v$ durch $\mathfrak{V}'\mathfrak{W}_1$ teilbar. Wir setzen

$$(12) \qquad \partial x'/\partial u = \mathfrak{V}'\mathfrak{W}_1 L_1, \quad \partial x'/\partial v = \mathfrak{V}'\mathfrak{W}_1 L_2,$$

Es sind L_1 und L_2 an jeder Stelle, sobald die Darstellung von x' durch u, v gegeben ist, bestimmte gewöhnliche Potenzreihen von u, v. Sie sind aber nicht die zugeordneten Funktionen von Divisoren, da sie nicht invariant sind. Aus $x' = \mathfrak{L}_a$ folgt, daß

$$L_1 = \partial\mathfrak{L}_a'/\partial u, \quad L_2 = \partial\mathfrak{L}_a'/\partial v \quad \text{für} \quad \mathfrak{L}_a' = 0. \tag{13}$$

Bezeichnen wir also den gemeinsamen Divisor, den $\partial\mathfrak{L}_a'/\partial u$ und $\partial\mathfrak{L}_a'/\partial v$ in dem (zerfallenden) Körper einer Veränderlichen $\mathfrak{L}_a'$ haben, mit $\mathfrak{d}_{1a}$, so sind L_1 und L_2 durch $\mathfrak{d}_{1a}$ teilbar. Diese Betrachtungen können wir für jeden der Ausnahmewerte a anstellen. Das Produkt aller so erhaltenen Divisoren $\mathfrak{d}_{1a}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{d}_1$ und nennen es den *Jacobischen Divisor des Büschels* $\langle\mathfrak{L}\rangle$. Es sind dann L_1 und L_2 durch $\mathfrak{d}_1$ teilbar.

Dieselben Betrachtungen können wir für das Büschel $\langle\mathfrak{M}\rangle$ anstellen und erhalten die (12) und (13) entsprechenden Gleichungen

$$\partial y'/\partial u = \mathfrak{V}''\mathfrak{W}_2 M_1, \qquad \partial y'/\partial v = \mathfrak{V}''\mathfrak{W}_2 M_2, \tag{14}$$

$$M_1 = \partial\mathfrak{M}_b'/\partial u, \qquad M_2 = \partial\mathfrak{M}_b'/\partial v \quad \text{für} \quad \mathfrak{M}_b' = 0. \tag{15}$$

Es sind M_1 und M_2 durch den Jacobischen Divisor $\mathfrak{d}_2$ des Büschels $\langle\mathfrak{M}\rangle$ teilbar.

Schließlich ergibt sich noch aus (4), nämlich

$$\frac{\partial x'}{\partial u}\frac{\partial y'}{\partial v} - \frac{\partial x'}{\partial v}\frac{\partial y'}{\partial u} = \mathfrak{Z} = \mathfrak{V}\mathfrak{W} = \mathfrak{V}\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_2\mathfrak{W}_3 \tag{16}$$

in Verbindung mit (12) und (14), daß $\mathfrak{V}$ durch $\mathfrak{V}'\mathfrak{V}''$ teilbar ist, und wenn wir setzen $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}'\mathfrak{V}''\mathfrak{V}'''$, so wird

$$L_1 M_2 - L_2 M_1 = \mathfrak{V}'''\mathfrak{W}_3. \tag{17}$$

8. *Der Körper* $K(y)$[5]).

Für manche Untersuchungen ist es praktisch, nach dem Vorgange von Herrn E. Picard, die eine der Veränderlichen, etwa y als Parameter zu betrachten. Wir fassen dann den Körper K als algebraischen Körper der einen unabhängigen Veränderlichen x auf, und zwar als einen Körper, der von einem Parameter y abhängt, und bezeichnen ihn mit $K(y)$. Die Riemannsche Fläche über der x-Ebene, auf der die Funktionen aus $K(y)$ eindeutig sind, und deren Gestalt auch von y abhängt, nennen wir $R(y)$. Die Verzweigungsstellen von $R(y)$ können zum Teil von y unabhängig sein. Diese liegen an den Nullstellen von $W_1(x)$. Die anderen hängen von y ab und liegen bei den Nullstellen von $W_3(x, y)$. Solche Werte von y, für die Verzweigungsstellen von $R(y)$ zusammenfallen, nennen wir singuläre Werte des Parameters y. Es sind das die Werte von y, für die $w_1(x)\, w_3(x, y)$ als Funktion von x mehrfache Nullstellen hat. Außerdem sind die Nullstellen von $w_2(y)$ singulär.

Ist b ein Wert von y, so ist der Körper $K(b)$ natürlich identisch mit dem früher definierten Körper $\mathfrak{M}_b$. Es kann also $K(y)$ für alle Werte von y zerfallen. Zerfällt $K(y)$ in s Körper, so zerfällt $\mathfrak{M}_y$ in s Primteiler, die mit diesen Körpern identisch sind. Haben diese Körper die Geschlechter $q_1, q_2, \ldots, q_s$, so definieren wir das virtuelle Geschlecht π von $K(y)$ durch

$$\pi - 1 = (q_1 - 1) + (q_2 - 1) + \cdots + (q_s - 1), \tag{18}$$

analog der Definition des Geschlechtes von $\mathfrak{L}$ in Nr. 7. Ist y ein regulärer Wert, so ist π gleich dem in Nr. 7 definierten Geschlecht q der Klasse $(\mathfrak{M})$. Geht y in einen der singulären Werte über, so können Verzweigungspunkte von $R(y)$ zusammenfallen und das Geschlecht von $K(y)$ wird kleiner als q. Es kann aber auch sein, daß Verzweigungspunkte an übereinander liegende Stellen rücken, ohne sich gegenseitig zu stören.

[5]) Bd. I, S. 93.

Dann bleibt das Geschlecht q. Wir rechnen auch wohl diejenigen Werte von y zu den singulären, für die einer der Verzweigungspunkte von $R(y)$ nach $x = \infty$ rückt.

Wir bestimmen noch den Verzweigungsdivisor, der zu $R(y_0)$ gehört, also den zu dx' gehörenden Divisor. Er sei mit $\mathfrak{z}_x$ bezeichnet. In Primteiler zerlegt, sei

$$\mathfrak{M}_{y_0} = \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \ldots \mathfrak{Q}_s .$$

Es ist dann an jeder Stelle S von K

$$y' = y - y_0 = \mathfrak{M}_{y_0}(u, v) = \mathfrak{Q}_1(u, v)\mathfrak{Q}_2(u, v) \ldots \mathfrak{Q}_s(u, v) \tag{19}$$

und in der Umgebung von S ist der Körper $K(y_0)$ definiert durch

$$y' = \mathfrak{M}_{y_0}(u, v) = 0 . \tag{20}$$

Wir beschränken uns auf den Fall, wo die Primteiler $\mathfrak{Q}_k$ voneinander verschieden sind. Es ist dann $y - y_0$ kein Teiler von $W_3(y)$.

Es ist im Körper $K(y_0)$, also für $y' = 0$

$$\mathfrak{Z}\, du = \frac{\partial x'}{\partial u}\frac{\partial y'}{\partial v}du - \frac{\partial x'}{\partial v}\frac{\partial y'}{\partial u}du = \frac{\partial y'}{\partial v}\left\{\frac{\partial x'}{\partial u}du + \frac{\partial x'}{\partial v}dv\right\} = \frac{\partial y'}{\partial v}dx'$$

oder

$$dx' = \mathfrak{Z}\frac{du}{\partial \mathfrak{M}_{y_0}/\partial v} . \tag{21}$$

Bezeichnen wir also den zu $\mathfrak{M}_{y_0}$ gehörenden Divisor der mehrfachen Stellen mit $\mathfrak{d}$ und mit $\mathfrak{z}$ den Divisor, in den $\mathfrak{Z}$ für $\mathfrak{M}_{y_0} = 0$ übergeht, so haben wir

$$\mathfrak{z}_x = \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{d}} . \tag{22}$$

Ist y_0 ein regulärer Wert von y, so ist (Nr. 7) $\mathfrak{d} = 1$. Es geht also dann der Verzweigungsdivisor von K in bezug auf x, y für $y = y_0$ in den Verzweigungsdivisor von $K(y_0)$ in bezug auf x über.

Schließlich sei noch bemerkt, daß man im Körper $K(y)$ eine Basis für die Vielfachen eines Divisors $\mathfrak{q}$ rational, d. h. so bestimmen kann, daß man im Körper K bleibt, wenn nur $\mathfrak{q}$ selbst rational gegeben ist. Im besonderen kann man eine Basis für die ganzen Funktionen und eine Basis für die Vielfachen des Divisors $\mathfrak{z}_x^{-1}$ rational bestimmen. Daher kann man auch die Integranden erster und zweiter Gattung in $K(y)$ auf rationalem Wege finden.

9. *Basen des Körpers K* [4]).

Unter einer Basis des Körpers K versteht man n Funktionen aus K, $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_n$, so daß sich jede Funktion R aus K in der Form darstellen läßt

$$R = g_1\zeta_1 + g_2\zeta_2 + \cdots + g_n\zeta_n , \tag{23}$$

wo die g rationale Funktionen von x, y sind. Die Funktionen g sind durch R eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen $\zeta_\varkappa$ auch mit $\zeta_{\varkappa 1}$ und die konjugierten Funktionen mit $\zeta_{\varkappa 2}, \ldots, \zeta_{\varkappa n}$. Wir erhalten so ein quadratisches System, das wir mit ζ bezeichnen, und wir wollen unter einer Basis auch wohl ein solches quadratisches System verstehen. Das Kriterium dafür, daß ein derartiges quadratisches System eine Basis ist, ist, daß seine Determinante nicht identisch null ist. Das Quadrat dieser Determinante gehört dem Körper (xy) an und heißt die Diskriminante des Systems.

Ist $\mathfrak{Q}$ ein Divisor von K, so nennen wir eine Funktion R aus K ein Vielfaches von $\mathfrak{Q}$, wenn $R = \mathfrak{Q}\mathfrak{G}$, wo $\mathfrak{G}$ ein ganzer Divisor ist. Wir nennen ferner eine Funktion R fast ein Vielfaches von $\mathfrak{Q}$, wenn $R = \mathfrak{Q}\mathfrak{G}\mathfrak{A}\mathfrak{L}^{-\alpha}\mathfrak{M}^{-\beta}$, wo $\mathfrak{G}$ ein ganzer Divisor sein soll und $\mathfrak{A}$ ein Divisor, der nur Punktprimteiler enthält. $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ sind wie früher

die Nenner von x, y und α und β ganze Zahlen. Wir nennen dann die Basis ζ eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{Q}$, wenn eine in der Form (23) dargestellte Funktion R dann und nur dann fast ein Vielfaches von $\mathfrak{Q}$ ist, wenn die g ganze rationale Funktionen von x, y sind. Zu jedem Divisor $\mathfrak{Q}$ gibt es eine solche Basis. Ist ζ eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{Q}$, so ist

$$|\zeta|^2 = W(x,y)\{IN(\mathfrak{Q})\}^2. \tag{24}$$

Es sei im besonderen ξ eine Basis für die Vielfachen von 1, d. h. für die ganzen Funktionen, und η eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{Z}^{-1}$. Es ist $IN(\mathfrak{Z}) = W(x,y)$ und daher nach (24)

$$|\xi|^2 = W(x,y), \quad |\eta|^2 = \{W(x,y)\}^{-1}. \tag{25}$$

Es sei

$$G = g_1\xi_1 + g_2\xi_2 + \cdots + g_n\xi_n,$$
$$H = h_1\eta_1 + h_2\eta_2 + \cdots + h_n\eta_n.$$

Dann ist G dann und nur dann ganz, d. h. es wird nur unendlich für unendliches x oder y, wenn die g ganz sind. Auf die Punktprimteiler braucht man keine Rücksicht zu nehmen, da eine Funktion im endlichen nicht nur längs eines Punktprimteilers unendlich werden kann. Ferner wird das Doppeldifferential $H\,dx\,dy$ dann und nur dann für endliches x und y höchstens längs Punktprimteilern unendlich, wenn die h ganz sind. Soll $H\,dx\,dy$ im endlichen überhaupt nicht unendlich werden, so müssen die h i. a. noch weiteren Bedingungen genügen, die in linearen Gleichungen zwischen den Koeffizienten bestehen.

Es gilt noch der Satz: Ist b ein nicht singulärer Wert von y und geht für $y = b$ der Divisor $\mathfrak{Q}$ in den Divisor $\mathfrak{q}$ des durch $y = b$ definierten Körpers $K(b)$ oder $\mathfrak{M}_b$ über, so geht eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{Q}$ in eine Basis des Körpers $\mathfrak{M}_b$ für die Vielfachen von $\mathfrak{q}$ über.

10. *Defekt einer Klasse.*

Es sei $\mathfrak{P}$ ein Primteiler und $(\mathfrak{Q})$ eine Klasse. Für $\mathfrak{P} = 0$ gehe $(\mathfrak{Q})$ in die Klasse $(\mathfrak{q})$ über. Jeder ganze Divisor aus $(\mathfrak{Q})$ geht in einen ganzen Divisor von $(\mathfrak{q})$ über, soweit er nicht etwa durch $\mathfrak{P}$ teilbar ist. Aber man braucht auf diese Art nicht jeden ganzen Divisor von $(\mathfrak{q})$ aus einem ganzen Divisor von $(\mathfrak{Q})$ zu erhalten. Ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'\mathfrak{P}$ ein ganzer Divisor aus $(\mathfrak{Q})$, der durch $\mathfrak{P}$ teilbar ist, so ist $\mathfrak{G}'$ ein ganzer Divisor aus $(\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{-1})$ und umgekehrt. Die Zahl der ganzen Divisoren aus $(\mathfrak{Q})$, die für $\mathfrak{P} = 0$ linear unabhängig bleiben, ist daher $\{\mathfrak{Q}\} - \{\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{-1}\}$. Diese Zahl kann also kleiner sein als die Dimension $\{\mathfrak{q}\}$ der Klasse $(\mathfrak{q})$. Wir setzen

$$\omega_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{Q}) = \{\mathfrak{q}\} - \{\mathfrak{Q}\} + \{\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{-1}\} \tag{26}$$

und nennen die so definierte Zahl ω den *Defekt der Klasse* $(\mathfrak{Q})$ *in bezug auf* $\mathfrak{P}$. Diese Definition erweitern wir. Zunächst lassen wir zu, daß $\mathfrak{P}$ ein ganzer Divisor ist ohne mehrfache Primteiler. Denn der Begriff Klasse und der Begriff der Dimension einer Klasse läßt sich auf zerfallende Körper ohne weiteres ausdehnen. Es sei ferner $\mathfrak{T}$ ein Divisor, ganz oder nicht, aber die Klasse $(\mathfrak{T})$ enthalte mindestens einen ganzen Divisor ohne mehrfache Teiler. Es sei $\mathfrak{P}$ ein solcher ganzer Divisor aus $(\mathfrak{T})$, und zwar einer, der keine Besonderheiten aufweist, also z. B. keinen größeren Divisor der mehrfachen Stellen hat als jeder andere, dann wollen wir unter $\omega_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{Q})$ verstehen $\omega_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{Q})$. Diese Zahl ist unabhängig von der besonderen Wahl von $\mathfrak{P}$ innerhalb der Klasse $(\mathfrak{T})$. Denn der Defekt kann sich bei stetiger Änderung von $\mathfrak{P}$ nur stetig ändern, solange keine Besonderheiten auftreten, kann sich also gar nicht ändern, da er eine ganze Zahl ist.

Wir betrachten ein Beispiel. Es sei b ein regulärer Wert von y. Den Zähler von $y - b$, also den durch $y - b = 0$ definierten Körper $K(b)$ bezeichnen wir wieder mit $\mathfrak{M}_b$. Es sei $(\mathfrak{K})$ die kanonische Klasse von K, also $\mathfrak{K} \sim \mathfrak{Z}\mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2}$. Wir wollen eine Eigenschaft des Defektes der Klasse $(\mathfrak{K}\mathfrak{L}^{\alpha+2}\mathfrak{M}) = (\mathfrak{Z}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{-1})$ herleiten. Für $y = b$ geht $\mathfrak{Z}$ in den Verzweigungsdivisor $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{M}_b$ in bezug auf x über, $\mathfrak{L}$ in den Nenner $\mathfrak{l}$ von x und $\mathfrak{M}$ in 1. Sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{g}$ ganze Divisoren aus $(\mathfrak{Z}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{-1})$ und $(\mathfrak{z}\mathfrak{l}^{\alpha})$, so sind

$$R = \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{M}}{\mathfrak{Z}\mathfrak{L}^{\alpha}}, \quad r = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{z}\mathfrak{l}^{\alpha}}$$

Funktionen aus K und $K(b)$, die fast Vielfache sind von $\mathfrak{Z}^{-1}$ und $\mathfrak{z}^{-1}$. Außerdem wird R null für $y = \infty$. Es sei wieder η eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{Z}^{-1}$ und es gehe η für $y = b$ in $\bar{\eta}$ über, sodaß $\bar{\eta}$ eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{z}^{-1}$ ist. Da unter den Vielfachen von $\mathfrak{Z}^{-1}$ auch die ganzen rationalen Funktionen von x, y vorkommen, so können die Funktionen η_k so gewählt werden, daß unter ihnen die Zahl 1 vorkommt. Es sei etwa $\eta_1 = 1$. Es ist dann auch $\bar{\eta}_1 = 1$. Die Funktionen R und r lassen sich in der Form darstellen

$$R = g_1\eta_1 + g_2\eta_2 + \cdots + g_n\eta_n, \tag{27}$$

$$r = h_1\bar{\eta}_1 + h_2\bar{\eta}_2 + \cdots + h_n\bar{\eta}_n, \tag{28}$$

wo die g Polynome in x, y und die h in x sind. Da $\eta_1 = 1$ ist, und R für $y = \infty$ verschwinden soll, so muß g_1 identisch null sein. Dagegen braucht h_1 nicht identisch zu verschwinden, sondern kann irgendeine ganze rationale Funktion von x sein, deren Grad nicht höher ist als α, wenn $\alpha \geqq 0$. Zu den Funktionen r gehören daher die $\alpha + 1$ linear unabhängigen Funktionen $1, x, x^2, \ldots, x^{\alpha}$. Diese Funktionen sind linear unabhängig von allen Funktionen r, bei denen h_1 null ist, da zwischen den n Funktionen $\bar{\eta}_{\varkappa}$ keine lineare homogene Gleichung besteht mit rationalen Funktionen von x als Koeffizienten. Die $\alpha + 1$ ganzen Divisoren $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_{\alpha+1}$ der Klasse $(\mathfrak{z}\mathfrak{l}^{\alpha})$, die durch diese Funktionen r bestimmt sind, sind alle durch $\mathfrak{z}$ teilbar. Da bei den Funktionen R in der Darstellung (27) g_1 null ist, so gehen sie für $y = b$ in Funktionen r über, bei denen h_1 null ist, so daß kein R in eine der Funktionen $1, x, x^2, \ldots, x^{\alpha}$ übergehen kann. Daher kann kein ganzer Divisor der Klasse $(\mathfrak{Z}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{-1}) = (\mathfrak{K}\mathfrak{L}^{\alpha+2}\mathfrak{M})$ in einen der ganzen Divisoren $\mathfrak{g}_k$ der Klasse $(\mathfrak{z}\mathfrak{l}^{\alpha})$ für $y = b$ übergehen. Der Defekt der Klasse $(\mathfrak{K}\mathfrak{L}^{\alpha+2}\mathfrak{M})$ in bezug auf $\mathfrak{M}_b$ oder $\mathfrak{M}$ ist also mindestens $\alpha + 1$. Nehmen wir das Ergebnis hinzu, das durch Vertauschen von x mit y entsteht, so haben wir

$$\omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{K}\mathfrak{L}\mathfrak{M}^{\beta+2}) \geqq \beta + 1, \; \omega_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{K}\mathfrak{L}^{\alpha+2}\mathfrak{M}) \geqq \alpha + 1,$$

wobei berücksichtigt ist, daß jeder Defekt seiner Definition nach größer oder gleich null ist.

Dies Ergebnis können wir erweitern, wenn der Körper K_1, der die nur von x abhängenden Funktionen umfaßt, nicht der Körper (x) der rationalen Funktionen von x ist. Es sei dann n_1 der Grad und $\mathfrak{q}_1$ der Verzweigungsdivisor von K_1 in bezug auf x. Es gehören dann zu den Funktionen r auch die Funktionen, die in K_1 die Form $\mathfrak{g}/\mathfrak{q}_1\mathfrak{l}^{\alpha}$ haben, wo $\mathfrak{g}$ ein ganzer Divisor und $\mathfrak{l}$ der Nenner von x sein soll. Jede dieser Funktionen ist, wie jede Funktion aus K_1 gleichzeitig Funktion aus K. Sie gehört aber nicht zu den Funktionen R, da diese für $y = \infty$ verschwinden, und kann auch nicht aus einer der Funktionen R für $y = b$ hervorgehen. Die Anzahl der linear unabhängigen dieser Funktionen ergibt sich aus dem Riemann-Rochschen Satz für

$\alpha \geqq -1$ zu $n_1(\alpha+2)+p_1-1$. Bezeichnen wir noch den Grad von K_2 in bezug auf den Körper (y) der rationalen Funktionen von y mit n_2, so haben wir

$$\omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{K}\mathfrak{L}\mathfrak{M}^{\beta+2}) \geqq n_2(\beta+2)+p_2-1 \quad \text{für} \quad \beta \geqq -1, \tag{29}$$
$$\omega_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{K}\mathfrak{L}^{\alpha+2}\mathfrak{M}) \geqq n_1(\alpha+2)+p_1-1 \quad \text{für} \quad \alpha \geqq -1.$$

Ich gebe noch einige Sätze über den Defekt an, ohne sie hier neu zu beweisen. Ist $(\mathfrak{Q})$ eine Klasse, so gibt es zwei ganze Zahlen λ_0 und μ_0, so daß

$$\omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\lambda}) = 0 \text{ für } \lambda \geqq \lambda_0, \quad \omega_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{M}^{\mu}) = 0 \text{ für } \mu \geqq \mu_0. \tag{30}$$

Es sei $\mathfrak{P}$ ein Primteiler und es habe sein Divisor der mehrfachen Stellen die Ordnung 2σ. Ist dann $(\mathfrak{Q})$ irgendeine Klasse, so gibt es eine ganze Zahl ν_0, so daß

$$\omega_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{\nu}) = \sigma \text{ für } \nu \geqq \nu_0. \tag{31}$$

11. *Über die Dimension einer Klasse.*

Es sei $(\mathfrak{Q})$ irgendeine Klasse und $\mathfrak{P}$ ein Primteiler ohne mehrfache Stellen. Das Geschlecht π von $\mathfrak{P}$ ist dann gegeben durch (Nr. 6, Formel 6)

$$2\pi - 2 = (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}\mathfrak{K}). \tag{32}$$

wo $(\mathfrak{K})$ die kanonische Klasse von K ist. Die Ergänzungsklasse von $(\mathfrak{Q})$, also die Klasse $(\mathfrak{K}\mathfrak{Q}^{-1})$ sei mit $(\mathfrak{Q}')$ bezeichnet. Für $\mathfrak{P}=0$ mögen die Klassen $(\mathfrak{K})$, $(\mathfrak{P})$, $(\mathfrak{Q})$, $(\mathfrak{Q}')$ übergehen in die Klassen $(\mathfrak{k})$, $(\mathfrak{p})$, $(\mathfrak{q})$, $(\mathfrak{q}')$ des Körpers $\mathfrak{P}$. Nach Nr. 6 ist $(\mathfrak{k}\mathfrak{p})$ die kanonische Klasse von $\mathfrak{P}$, so daß die Klassen $(\mathfrak{q}\mathfrak{p})$ und $(\mathfrak{q}')$ Ergänzungsklassen im Körper $\mathfrak{P}$ sind. Da die Ordnung von $(\mathfrak{q}\mathfrak{p})$ gleich $(\mathfrak{Q}\mathfrak{P}, \mathfrak{P})$ ist, so ergibt sich nach dem Riemann-Rochschen Satz unter Benutzung von (32)

$$\{\mathfrak{q}\mathfrak{p}\} - \{\mathfrak{q}'\} = (\mathfrak{Q}\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) - (\pi - 1) = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{P}) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}, \mathfrak{K}). \tag{33}$$

In der Formel (26), Nr. 10, ersetzen wir einmal $\mathfrak{Q}$ durch $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}$ und dann durch $\mathfrak{Q}'$ und erhalten, in anderer Anordnung,

$$\{\mathfrak{Q}\mathfrak{P}\} = \{\mathfrak{Q}\} + \{\mathfrak{q}\mathfrak{p}\} - \omega_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{P}), \tag{34}$$

$$\{\mathfrak{Q}'\mathfrak{P}^{-1}\} = \{\mathfrak{Q}'\} - \{\mathfrak{q}'\} + \omega_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{Q}'). \tag{35}$$

Sind $(\mathfrak{T})$ und $(\mathfrak{T}')$ zwei Ergänzungsklassen, so wollen wir als dauernde Abkürzung einführen

$$[\mathfrak{T}] = [\mathfrak{T}'] = \{\mathfrak{T}\} + \{\mathfrak{T}'\} + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}'). \tag{36}$$

Dann erhalten wir aus (34), (35) durch Addition in Verbindung mit (33)

$$[\mathfrak{Q}] = [\mathfrak{Q}\mathfrak{P}] + \omega_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{P}) - \omega_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{Q}'). \tag{37}$$

Wir zeigen noch, daß diese Formel auch gilt, wenn $\mathfrak{P}$ kein Primteiler ist, sondern ein ganzer Divisor ohne mehrfache Primteiler, dessen einzelne Primteiler keine mehrfachen Stellen haben und sich gegenseitig nicht schneiden, so daß also $\mathfrak{P}$ wiederum keine mehrfachen Stellen hat. Es sei etwa $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\ldots\mathfrak{P}_r$ und es sei π_k das Geschlecht von $\mathfrak{P}_k$. Es ist $(\mathfrak{P}_k, \mathfrak{P}_l) = 0$ für $k \neq l$. Den Defekt einer Klasse in bezug auf $\mathfrak{P}$ definieren wir durch (26), Nr. 10, so daß die Gleichungen (34), (35) bestehen bleiben. Die Formel für den Riemann-Rochschen Satz bleibt richtig, wenn man unter dem Geschlecht des zerfallenden Körpers $\mathfrak{P}$ die durch

$$\pi - 1 = (\pi_1 - 1) + (\pi_2 - 1) + \cdots + (\pi_r - 1) \tag{38}$$

definierte Zahl π versteht. Wegen $(\mathfrak{P}_k, \mathfrak{P}_l) = 0$ für $k \neq l$, besteht für diese Zahl π unverändert die Gleichung (32), so daß alle Gleichungen erhalten bleiben, aus denen (37) folgt. Im besonderen gilt diese Formel also auch, wenn wir $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{L}$ oder $\mathfrak{M}$ ersetzen.

II. Differentiale.

1. *Definitionen.*

Sind A und B Funktionen aus K, so nennen wir

$$dI = A\,dx + B\,dy \tag{39}$$

ein lineares Differential oder auch kurz ein Differential von K. Ist die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \tag{40}$$

erfüllt, so heißt dI ein totales oder vollständiges Differential. Zu diesen gehören auch die totalen Differentiale der Funktionen des Körpers K. Diese bieten kein besonderes Interesse und wir definieren daher:

Zwei Differentiale dI_1 und dI_2 sind kongruent, $dI_1 \equiv dI_2$, oder ihre Differenz ist kongruent 0, $dI_1 - dI_2 \equiv 0$, wenn die Differenz das Differential einer Funktion aus K ist.

Von r Differentialen $dI_1, dI_2, \ldots, dI_r$ sagen wir, sie sind linear abhängig, wenn es r Konstante $c_1, c_2, \ldots, c_r$ gibt, die nicht alle null sind, so daß

$$c_1 dI_1 + c_2 dI_2 + \cdots + c_r dI_r \equiv 0.$$

Unter den Differentialen sind noch diejenigen ausgezeichnet, die von einer der Veränderlichen x oder y allein abhängen, die also zu dem Körper K_1 oder K_2 (*I*, Nr. 1) gehören. Diese sind natürlich immer totale Differentiale.

Man teilt die totalen Differentiale und ihre Integrale in drei Gattungen ein. Ein Integral heißt von der dritten Gattung, wenn es mindestens längs eines Primteilers logarithmisch unendlich wird. In allen anderen Fällen heißt es ein Integral zweiter Gattung. Zu diesen rechnet man also i. a. auch die Integrale, die nirgends unendlich werden und die Integrale erster Gattung genannt werden. Wir werden auf diese Definition noch genauer eingehen. Wir beschränken uns auf Differentiale zweiter Gattung und werden nur ausnahmsweise von denen dritter Gattung sprechen. Es sind also im folgenden immer Differentiale zweiter Gattung gemeint, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt ist.

2. *Miteinander verbundene Funktionen.*

Unsere Aufgabe wird sein, totale Differentiale mit gewissen vorgeschriebenen Eigenschaften zu bestimmen. Dabei macht die Erfüllung der Integrabilitätsbedingungen besondere Schwierigkeiten. Ist die Funktion A gegeben, so gibt es i. a. keine Funktion B derart, daß für das Differential (39) die Bedingung (40) erfüllt ist. Gibt es aber eine solche Funktion B, so ist sie eindeutig bestimmt bis auf einen Summanden, der nur von y abhängt, der also dem Körper K_2 angehört. Wir wollen jeder Funktion A eine Funktion B so zuordnen, daß $Adx + Bdy$ ein totales Differential wird, sobald es überhaupt möglich ist, zu A ein derartiges B zu finden. Zu dem Zwecke bestimmen wir im Körper $K(y)$, dessen wirkliches Geschlecht jetzt mit q bezeichnet sei, $2q$ linear unabhängige Integranden zweiter Gattung $R_1, R_2, \ldots, R_{2q}$. Diese können wir so wählen, daß sie rational in y sind, daß sie also dem Körper K angehören. Wir nehmen sie ferner so gewählt an, daß die Differentiale $R_k dx$ höchstens für unendliches x oder y unendlich werden. Später werden wir den R_k noch weitere Bedingungen auferlegen. Die Haupteigenschaft von $2q$ linear unabhängigen Integranden zweiter Gattung ist: Jeder Integrand zweiter Gattung A aus $K(y)$ läßt sich auf eine und nur auf eine Art in der Form darstellen

$$A = g_1 R_1 + g_2 R_2 + \cdots + g_{2q} R_{2q} + \frac{\partial H}{\partial x}, \tag{41}$$

wo die g rationale Funktionen von y sind. Ist $dI = Adx + Bdy$ ein totales Differential, so ist $dI_1 = dI - dH = A_1 dx + B_1 dy$ ein zu dI kongruentes Differential, das auch total ist, bei dem aber A_1 aus den R_k linear und homogen zusammengesetzt ist mit rationalen Funktionen von y als Koeffizienten. Daraus folgt, daß wir alle linear unabhängigen Differentiale erhalten, wenn wir uns auf diejenigen Funktionen A beschränken, die sich in der Form darstellen lassen

$$A = g_1 R_1 + g_2 R_2 + \cdots + g_{2q} R_{2q}. \tag{42}$$

Im besonderen lassen sich auch die Funktionen $\partial R_k / \partial y$ in der Form (41) darstellen. Es sei

$$\frac{\partial R_k}{\partial y} = c_{k1} R_1 + c_{k2} R_2 + \cdots + c_{k,2q} R_{2q} + \frac{\partial S_k}{\partial x}. \tag{43}$$

Wir bezeichnen das aus rationalen Funktionen von y bestehende quadratische System der c_{kl} mit c und mit R und S die aus einer Spalte bestehenden Systeme, die in dieser Spalte die R_k und die S_k enthalten. Dann können wir die Gleichungen (43) in der Form schreiben

$$\frac{\partial R}{\partial y} = cR + \frac{\partial S}{\partial x}. \tag{44}$$

Bezeichnen wir ferner mit g ein System mit einer Zeile aus n rationalen Funktionen g_k von y, so nimmt (42) die Form $A = gR$ an. Wir nennen zwei Funktionen

$$A = gR, \quad B = gS, \tag{45}$$

die mit demselben g durch vordere Multiplikation aus R und S entstehen, *miteinander verbunden*. Aus (45) folgt durch Differentiation nach y in Verbindung mit (44)

$$\frac{\partial A}{\partial y} = g'R + g\frac{\partial R}{\partial y} = (g' + gc)R + g\frac{\partial S}{\partial x}$$

oder, wenn wir noch setzen

$$h = g' + gc, \tag{46}$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = hR. \tag{47}$$

Nehmen wir an, es gibt eine Funktion B_0, so daß $\partial A / \partial y = \partial B_0 / \partial x$, so folgt aus (47)

$$\frac{\partial (B_0 - B)}{\partial x} = hR.$$

Da aber die R_k linear unabhängige Integranden zweiter Gattung sind, so folgt hieraus, daß $h = 0$ und daß $B_0 - B$ nur von y abhängt. Also:

Gibt es zu der Funktion $A = gR$ eine zweite Funktion B, so daß $Adx + Bdy$ ein totales Differential ist, so ist bis auf einen nur von y abhängenden Summanden die mit A verbundene Funktion $B = gS$ diese Funktion.

3. *Die linearen Differentialgleichungssysteme* (E) *und* (E') [5]).

Aus den Ergebnissen der vorigen Nr. folgt noch:

Eine Funktion $A = gR$ ist dann und nur dann in einem totalen Differential der Faktor von dx, wenn die rationalen Funktionen g_k von y dem linearen Differentialgleichungssystem

[5]) Bd. I, S. 94 ff.

(48) $$g' = -gc, \qquad (E')$$

das wir mit (E') bezeichnen, genügen.

Das zu (E') adjungierte System bezeichnen wir mit (E). Es hat folgende Bedeutung. Es sei C eine geschlossene Kurve in der Riemannschen Fläche $R(y)$, (I, Nr. 8). Das über C erstreckte Integral von $R_k dx$ sei mit ω_k bezeichnet und es bedeute ω das aus der einen Zeile $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2q}$ bestehende System und $\bar{c}$ das transponierte von c. Es sei also ω ein System zusammengehöriger Perioden der $2q$ Integrale $\int R_k dk$. Dann folgt aus (44) durch Integration über C und Übergang zu den transponierten Systemen

(49) $$\omega' = +\omega\bar{c}, \qquad (E).$$

Also:

Je $2q$ zusammengehörende Perioden der $2q$ Integrale $\int R_k dx$ genügen einem linearen Differentialgleichungssystem (E), das zu dem System (E') adjungiert ist.

Dieser Satz stammt bis auf die Bedeutung von (E') von L. Fuchs. Dieser hat auch bewiesen, daß die Integrale von (E) sich überall bestimmt verhalten. Es gehören also (E) und (E') zur Fuchsschen Klasse.

Aus unseren Betrachtungen ergibt sich noch:

Wir erhalten alle linear unabhängigen totalen Differentiale zweiter Gattung, abgesehen von den nur von y abhängigen, also dem Körper K_2 angehörenden, indem wir die rationalen Lösungen von (E') bestimmen.

Es sei noch angegeben, was erst in einer späteren Arbeit bewiesen werden soll, daß aus jeder Lösung eines der Systeme (E) und (E') auf rationalem Wege eine Lösung des anderen gefunden werden kann, so daß die beiden Systeme gleich viel linear unabhängige rationale Lösungen haben.

4. *Die Differentiale in der Umgebung eines Kurvenprimteilers.*

Es sei $dI = Adx + Bdy$ ein totales Differential und es sei $\mathfrak{P}$ ein Kurvenprimteiler und $P(x, y)$ seine Idealnorm. (Vgl. I, Nr. 4). Ferner sei y_1 eine Lösung von $P = 0$. Wir denken uns A und B in der Umgebung von $\mathfrak{P}$ nach Potenzen von $y - y_1$ entwickelt. Das absolute Glied in A sei a und der Faktor von $(y - y_1)^{-1}$ in B sei b. Da dI ein totales Differential ist, so erhalten wir I bis auf einen nur von x abhängenden Summanden, indem wir die Reihe für B gliedweise nach y integrieren. Der hinzuzufügende Summand ist $\int adx$. Daraus folgt, daß sich I in der Umgebung eines Kurvenprimteilers im wesentlichen verhält wie eine Funktion des Körpers K. Es läßt sich I auch entwickeln nach steigenden Potenzen von $y - y_1$ und die Koeffizienten gehören demselben Koeffizientenkörper an, dem die Koeffizienten der Entwicklungen der Funktionen des Körpers angehören. Nur zwei Unterschiede können vorhanden sein. Einmal braucht das absolute Glied $\int adx$ nicht dem Koeffizientenkörper anzugehören und dann kann in der Entwicklung ein Logarithmus vorkommen, nämlich $b \log (y - y_1)$. Aus der Integrabilitätsbedingung folgt, daß b konstant sein muß. Denn in $\partial A/\partial y$ kommt die (-1)-te Potenz von $(y - y_1)$ nicht vor und in $\partial B/\partial x$ hat sie den Faktor db/dx. Dieser muß also null sein. Es heißt b das Residuum des Differentials für den Primteiler $\mathfrak{P}$. Wenn wir statt nach Potenzen von $y - y_1$ nach Potenzen von $P(x, y)$ entwickeln, so tritt im Differential an Stelle von $b(y - y_1)^{-1} dy$ das Glied $bP^{-1}dP$ und im Integral an Stelle von $b \log (y - y_1)$ das Glied $b \log P$, wie daraus folgt, daß

$$\frac{dP}{P} = \frac{dy}{y - y_1} + f(y - y_1)\, dy\,,$$

wo f eine gewöhnliche Potenzreihe von $y - y_1$ ist.

5. *Die Differentiale in der Umgebung eines Punktprimteilers.*

Es sei $\mathfrak{V}$ ein Punktprimteiler und $\mathfrak{V}(u, v)$ seine zugeordnete Funktion für eine Stelle, durch die er geht. Nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz können wir $\mathfrak{V}(u, v)$ als ganze rationale Funktion von v annehmen. Ferner seien u und v als Funktionen aus K gewählt, so daß für $\mathfrak{V} = 0$ zwischen u, v eine rationale irreduzible Gleichung $g(u, v) = 0$ besteht. (I, Nr. 3). Es ist $\mathfrak{V}(u, v)$ ein Teiler von g. Führen wir in dI statt x, y die Veränderlichen u, v ein, so nimmt dI die Form an

$$dI = U du + V dv,$$

wo U, V gewöhnliche Potenzreihen von u, v sind oder Quotienten solcher. Ist v_1 eine Lösung von $\mathfrak{V}(u, v) = 0$, also auch von $g(u, v) = 0$, und daher als Potenzreihe von u darstellbar, so lassen sich U und V nach steigenden ganzen Potenzen von $v - v_1$ entwickeln. Diese Entwicklungen können höchstens eine endliche Zahl von negativen Potenzen enthalten. Die Koeffizienten sind Potenzreihen von u. Wir haben also ganz ähnliche Verhältnisse wie in der vorigen Nr., nur daß u, v an Stelle von x, y getreten sind. Wir schließen, daß I sich im wesentlichen so nach Potenzen von $v - v_1$ entwickeln läßt wie U und V. Nur braucht das absolute Glied, das gleich $\int a du$ ist, wenn a das absolute Glied in der Entwicklung von U ist, keine reine Potenzreihe von u zu sein, sondern kann $\log u$ enthalten. Und außerdem kann ein Glied $b \log (v - v_1)$ vorkommen. Der Faktor b heißt wieder das Residuum von dI für $\mathfrak{V}$ und muß auch hier konstant sein. In Verbindung mit der vorigen Nr. haben wir:

Das Residuum eines totalen Differentials in bezug auf einen Primteiler ist immer konstant.

Enthält die Entwicklung von I nach Potenzen von $v - v_1$ negative Potenzen oder $\log (v - v_1)$, so wird I für $v = v_1$ unendlich. Da aber $g(u, v)$ rational unzerlegbar ist, so wird I für $g(u, v) = 0$ unendlich. Es kann aber $g(u, v)$ als Funktion des Körpers K nicht nur längs des Punktprimteilers $\mathfrak{V}$ null werden, sondern muß mindestens noch längs eines Kurvenprimteilers verschwinden, der durch mindestens eine der Stellen geht, durch die $\mathfrak{V}$ geht. Daraus folgt:

Das Integral I eines totalen Differentials $dI = A dx + B dy$ kann längs eines Punktprimteilers nur (algebraisch oder logarithmisch) unendlich werden, wenn es gleichzeitig mindestens längs eines Kurvenprimteilers unendlich wird, der durch mindestens eine der Stellen geht, durch die der Punktprimteiler geht. Und das Integral muß längs eines solchen Kurvenprimteilers logarithmisch unendlich werden, wenn es längs des Punktprimteilers in dieser Art unendlich wird.

Dieser Satz ist besonders wichtig bei der Bestimmung der Integrale erster Gattung. Denn er zeigt, daß man sich dabei um die Punktprimteiler gar nicht zu kümmern braucht. Wird das Integral längs keines Kurvenprimteilers unendlich, so wird es ganz von selbst auch längs keines Punktprimteilers unendlich.

Integrale, die in irgendeiner ihrer Entwicklungen einen Logarithmus enthalten, heißen, wie schon oben angegeben, von dritter Gattung, die anderen von zweiter Gattung. Im folgenden beschränken wir uns auf die Integrale zweiter Gattung.

6. *Die Differentiale in der Umgebung einer Stelle.*

Es sei wieder $dI = A dx + B dy$ ein Differential, nicht notwendig ein totales. Es sei S eine Stelle des Körpers K. Führen wir statt x, y die Veränderlichen u, v ein, so erhalten wir

$$dI = A dx + B dy = U du + V dv, \tag{50}$$

wie in der vorigen Nr. Es ist

$$(51) \qquad U = A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial y}{\partial u}, \quad V = A\frac{\partial x}{\partial v} + B\frac{\partial y}{\partial v},$$

woraus unter Berücksichtigung von (I, Nr. 5), nämlich

$$(52) \qquad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \mathfrak{Z}\mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2},$$

folgt

$$(53) \quad \mathfrak{Z}\mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2}A = U\frac{\partial y}{\partial v} - V\frac{\partial y}{\partial u}; \quad \mathfrak{Z}\mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2}B = -U\frac{\partial x}{\partial v} + V\frac{\partial x}{\partial u}.$$

Nehmen x und y in S die Werte a und b an, so setzen wir wie in I, Nr. 2 $x - a = x'$, $y - b = y'$. Es ist dann, da für unendliches a und b unter $x - a$ und $y - b$ zu verstehen ist $1/x$ und $1/y$,

$$(54) \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \mathfrak{L}^{-2}\frac{\partial x'}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \mathfrak{L}^{-2}\frac{\partial x'}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \mathfrak{M}^{-2}\frac{\partial y'}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \mathfrak{M}^{-2}\frac{\partial y'}{\partial v}.$$

Damit wird aus (53)

$$(55) \quad \mathfrak{Z}\mathfrak{L}^{-2}A = U\frac{\partial y'}{\partial v} - V\frac{\partial y'}{\partial u}, \quad \mathfrak{Z}\mathfrak{M}^{-2}B = -U\frac{\partial x'}{\partial v} + V\frac{\partial x'}{\partial u}.$$

Aus (51) ergibt sich noch

$$(56) \qquad \left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right)dx\,dy = \left(\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u}\right)du\,dv.$$

Sind

$$dI_1 = A_1dx + B_1dy = U_1du + V_1dv, \quad dI_2 = A_2dx + B_2dy = U_2du + V_2dv$$

zwei Differentiale, so folgt aus den zu (51) analogen Gleichungen

$$(57) \qquad (A_1B_2 - A_2B_1)dx\,dy = (U_1V_2 - U_2V_1)du\,dv.$$

7. *Differentiale erster Gattung*[6]).

Soll das Differential dI in (50) ein Differential erster Gattung sein, so ist dazu, neben der Integrabilitätsbedingung notwendig und hinreichend, daß an jeder Stelle U und V gewöhnliche Potenzreihen von u, v sind. In Verbindung mit den Formeln in I, Nr. 7 ergibt sich aus (55):

Damit das Differential $dI = Adx + Bdy$ von der ersten Gattung ist, ist notwendig, daß A und B die Form haben

$$(58) \qquad A = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{L}^2}{\mathfrak{V}'\mathfrak{V}'''\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_3}, \qquad B = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{V}''\mathfrak{V}'''\mathfrak{W}_2\mathfrak{W}_3},$$

wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ganze Divisoren sind. In der Umgebung einer Stelle S haben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Darstellung

$$(59) \qquad \mathfrak{A} = UM_2 - VM_1, \quad \mathfrak{B} = -UL_2 + VL_1,$$

woraus noch folgt, daß $\mathfrak{A}$ durch den Jacobischen Divisor der Schar $\langle\mathfrak{M}\rangle$ und $\mathfrak{B}$ durch den der Schar $\langle\mathfrak{L}\rangle$ teilbar sein muß.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so folgt zunächst, daß dI an jeder Stelle die Darstellung (50) hat, wo U und V gewöhnliche Potenzreihen von u, v sind, so daß dI ein Differential erster Gattung ist, wenn die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist. Ferner folgt aus (56), daß

$$(60) \qquad \iint\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right)dx\,dy$$

ein Doppelintegral erster Gattung ist, da es an jeder Stelle die Form $\int\int\mathfrak{G}(u, v)dudv$ hat, wo $\mathfrak{G}$ eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v ist. Nach einem Satze von E. Picard kann

man die Perioden eines Doppelintegrals alle auf folgende Art erhalten. Man wähle in der x- und y-Ebene je eine geschlossene Kurve C_1 und C_2. Dann integriere man erst über C_1 bei konstantem y und dann über C_2 bei konstantem x. Oder umgekehrt erst über C_2 und dann über C_1. Daher sind die Perioden eines Integrals der Form (60) sämtlich null. Man sollte meinen, daß ein derartiges Integral erster Gattung konstant, sein Differential also identisch null ist. Es ist aber bisher nicht gelungen, das zu beweisen. Es würde dann aus den angegebenen notwendigen Bedingungen folgen, daß dI ein vollständiges Differential ist, daß also die Bedingungen auch hinreichend sind. Gibt es Integrale erster Gattung der Form (60), die nicht konstant sind, so ist die Zahl der linear unabhängigen eine neue Invariante des Körpers K, worauf Severi aufmerksam gemacht hat. Severi nennt Differentiale, die den oben angegebenen Bedingungen genügen, halbtotal (semiesatti).

Unentschieden muß ich lassen, ob nicht vielleicht schon aus der Bedingung, daß $\mathfrak{A}$ durch den Jacobischen Divisor von $\langle \mathfrak{M} \rangle$ und $\mathfrak{B}$ durch den von $\langle \mathfrak{L} \rangle$ teilbar ist, folgt, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in der Form (59) darstellbar sind, und zwar mit oder ohne die weitere Bedingung, daß A und B miteinander verbundene Funktionen sind. (II, Nr. 2).

Aus (57) folgt noch: Sind $dI_1 = A_1 dx + B_1 dy$, $dI_2 = A_2 dx + B_2 dy$ zwei Differentiale erster Gattung, von denen das eine nicht eine Funktion des anderen ist, so daß also $A_1 B_2 - A_2 B_1$ nicht identisch null ist, so ist

$$(A_1 B_2 - A_2 B_1)\, dx\, dy$$

ein Doppelintegral erster Gattung.

8. *Über die Berechnung der Differentiale erster Gattung. I.*

Die Integranden zweiter Gattung R des Körpers $K(y)$, (I, Nr. 8; II, Nr. 2), seien so gewählt, daß die ersten q von der ersten Gattung sind. Wir beschäftigen uns zunächst nur mit diesen q Funktionen $R_1, R_2, \ldots R_q$. Sie sind für nicht speziell gewähltes y linear unabhängig, so daß es höchstens eine endliche Zahl von Werten y gibt, für die sie linear abhängig werden. Ebenso kann es nur eine endliche Zahl von Konstanten geben, so daß eine oder mehrere der Funktionen R unendlich wird, wenn man y gleich einer dieser Konstanten setzt. Wir zeigen, daß man durch lineare Transformation aus den R_k neue q Funktionen herleiten kann, die weder unendlich werden, wenn man y gleich einer endlichen Konstanten setzt, noch auch linear abhängig in gleich anzugebendem Sinne.

Zunächst können wir durch Multiplikation mit ganzen rationalen Funktionen von y erreichen, daß keine der Funktionen mehr unendlich wird, wenn man y gleich einer endlichen Konstanten setzt. Ferner sei b eine solche Konstante, daß für $y = b$ die neuen Funktionen R_k linear abhängig werden, was bedeuten soll, daß es Konstante c_k gibt, so daß

$$c_1 R_1 + c_2 R_2 + \cdots + c_q R_q$$

durch $y - b$ teilbar ist. Wir setzen

$$c_1 R_1 + c_2 R_2 + \cdots + c_q R_q = (y - b) R'. \tag{61}$$

Ist etwa c_α von null verschieden, so ersetzen wir R_α durch R'. Aus (61) folgt, daß dadurch für andere Werte von y nichts verdorben wird. Fahren wir in dieser Weise fort, so müssen wir nach einer endlichen Zahl von Schritten zu q Funktionen R kommen, die für $y = b$ in dem oben angegebenen Sinne linear unabhängig sind. Denn da bei jedem Schritt mit $y - b$ dividiert wird, würden wir sonst zu Funktionen kommen, die für unendliches y von beliebig hoher Ordnung null würden, während die Zahl ihrer Unendlichkeitsstellen und die Ordnung ihres Unendlichwerdens beschränkt ist. Wir wollen und können daher annehmen, daß die q Funktionen R für jeden endlichen Wert von y linear unabhängig sind. Ist dann b ein regulärer endlicher Wert von y, d. h. hat der Körper $K(b)$ das Geschlecht q,

so gehen für $y = b$ die Funktionen R in q linear unabhängige Integranden erster Gattung des Körpers $K(b)$ über.

Zur Abkürzung sei gesetzt

$$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{V}'\mathfrak{V}'''\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_3, \quad \mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{V}''\mathfrak{V}'''\mathfrak{W}_2\mathfrak{W}_3. \tag{62}$$

Die R haben jetzt die Form

$$R_k = \frac{\mathfrak{G}_k \mathfrak{L}^2 \mathfrak{M}^{\varrho_k}}{\mathfrak{V}_k \mathfrak{Z}_1}, \tag{63}$$

wo $\mathfrak{G}_k$ und $\mathfrak{V}_k$ ganze Divisoren sind, von denen der letzte nur Punktprimteiler enthält, und wo die ϱ_k ganze positive oder negative Zahlen oder null sind. Außerdem ist die Funktion

$$A = g_1 R_1 + g_2 R_2 + \cdots + g_q R_q \tag{64}$$

dann und nur dann fast ein Vielfaches von $\mathfrak{Z}_1^{-1}\mathfrak{L}^2$, wenn die g ganze rationale Funktionen von y sind.

Wenn $dI = Adx + Bdy$ ein Differential erster Gattung ist, so muß das Differential Adx, in das dI für konstantes y übergeht, ein Differential erster Gattung des Körpers $K(y)$ sein. Daher muß A die Form (64) haben. Und die g müssen ganz sein, da nach (58) A ein Vielfaches von $\mathfrak{Z}^{-1}\mathfrak{L}^2$ sein muß. Aber wegen der Punktprimteiler, die in den Nennern der R außer den in $\mathfrak{Z}_1$ enthaltenen auftreten können, genügt das nicht. Wir führen daher wieder durch eine lineare Transformation neue q Funktionen R ein.

Die Zahl h sei so beschaffen, daß der Zähler $\mathfrak{M}_h$ von $y - h$ durch mindestens einen Punktprimteiler teilbar ist oder einen Beitrag zu dem Jacobischen Divisor $\mathfrak{d}_2$ (I, Nr. 7) der Schar $\langle\mathfrak{M}\rangle$ liefert. Das Produkt der in $\mathfrak{M}_h$ enthaltenen Punktprimteiler sei mit $\mathfrak{V}_h$ und der Beitrag von $\mathfrak{M}_h$ zu $\mathfrak{d}_2$ mit $\mathfrak{d}_h$ bezeichnet. Unter den Funktionen der Form

$$c_1 R_1 + c_2 R_2 + \cdots + c_q R_q$$

mit konstanten Faktoren c seien genau α linear unabhängige, deren Nenner, abgesehen von $\mathfrak{Z}_1$, keinen in $\mathfrak{V}_h$ enthaltenen Punktprimteiler enthält und deren Zähler durch $\mathfrak{d}_h$ teilbar ist. Durch eine lineare Transformation mit konstanten Koeffizienten können wir erreichen, daß die ersten α der Funktionen R derartige Funktionen sind. Soll dann das durch (64) gegebene A nur den Nenner $\mathfrak{Z}_1$ haben und einen durch $\mathfrak{d}_2$ teilbaren Zähler, so ist notwendig, daß $g_{\alpha+1}, g_{\alpha+2}, \ldots, g_q$ durch $y - h$ teilbar sind. Wir multiplizieren daher die letzten $q - \alpha$ Funktionen R, mit $y - h$ und bezeichnen die Produkte wieder mit $R_{\alpha+1}, R_{\alpha+2}, \ldots, R_q$.

Diese $q - \alpha$ Funktionen behandeln wir in derselben Weise wie die q Funktionen R, von denen wir ausgegangen sind. So fahren wir fort, bis wir q Funktionen R haben mit folgender Eigenschaft: Die durch (64) gegebene Funktion A hat dann und nur dann, abgesehen von in $\mathfrak{V}_h$ nicht enthaltenen Punktprimteilern, nur den Nenner $\mathfrak{Z}_1$ und einen durch $\mathfrak{d}_h$ teilbaren Zähler, wenn die Koeffizienten für $y = h$ endlich bleiben.

Derartige Werte von y wie der hier betrachtete h gibt es nur in endlicher Zahl. Berücksichtigen wir sie alle in derselben Weise, so erhalten wir q Funktionen R von folgender Art:

Es ist

$$R_k = \frac{\mathfrak{G}_k \mathfrak{L}^2 \mathfrak{M}^{\varrho_k}}{\mathfrak{Z}_1},$$

wo $\mathfrak{G}_k$ ein ganzer Divisor und ϱ_k eine ganze Zahl ist. Ferner hat die Funktion

$$A = g_1 R_1 + g_2 R_2 + \cdots + g_q R_q \tag{65}$$

dann und nur dann nur den Nenner $\mathfrak{Z}_1$ und einen durch den Jacobischen Divisor der Schar $\langle\mathfrak{M}\rangle$ teilbaren Zähler, wenn die g ganze rationale Funktionen von y sind.

Wir betrachten jetzt die R für unendliches y. Wir hatten angenommen, daß die Werte $x = \infty$, $y = \infty$ keine Besonderheiten aufweisen. Daher lassen sich die R in der Umgebung von $y = \infty$ nach ganzen fallenden Potenzen von y entwickeln. Das Anfangsglied von R_k sei $r_k y^{-\varrho_k}$ und die R seien so geordnet, daß die ϱ_k eine nicht abnehmende Reihe bilden. Sind die r_k linear unabhängig, so sind wir zufrieden. Besteht aber eine Gleichung

$$c_1 r_1 + c_2 r_2 + \cdots + c_q r_q = 0 \tag{66}$$

mit konstanten c, so setzen wir, wenn c_α der erste von null verschiedene Koeffizient ist,

$$R'_\alpha = c_\alpha R_\alpha + y^{\varrho_{\alpha+1}-\varrho_\alpha} c_{\alpha+1} R_{\alpha+1} + \cdots + y^{\varrho_q-\varrho_\alpha} c_q R_q$$

und ersetzen R_α durch R'_α. Wegen (66) wird R'_α für $y = \infty$ von kleinerer Ordnung unendlich als R_α. Dies Verfahren setzen wir fort, bis wir zu q Funktionen R_k gekommen sind, deren Anfangskoeffizienten r_k linear unabhängig sind. Das Verfahren muß zum Ziel führen, da wir sonst zu Funktionen kommen würden, die für unendliches y von beliebig hoher Ordnung null werden, während die Zahl ihrer Unendlichkeitsstellen und die Ordnung ihres Unendlichwerdens an diesen beschränkt ist. Die Koeffizienten r_k sind dann q linear unabhängige Integranden erster Gattung im Körper $K(\infty)$, dessen Geschlecht q ist.

Die q Funktionen R haben jetzt noch die Eigenschaft: Soll die durch (65) gegebene Funktion A die Form (58), (II, Nr. 7), haben, soll also A für unendliches y nicht unendlich werden, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß g_k höchstens vom Grade ϱ_k ist.

9. *Ein Satz über totale Differentiale erster Gattung*[7]).

Wir können jetzt folgenden einfachen, aber später wichtig werdenden Satz beweisen:

Ist $A\,dx + B\,dy$ ein totales Differential erster Gattung, so kann A nicht für $y = h$ identisch null werden, wenn h ein regulärer Wert von y ist. Das gilt auch für $h = \infty$.

Es sei zunächst h endlich. Für $y = h$ möge R_k übergehen in r_k. Die r_k sind dann nach der vorigen Nr. q linear unabhängige Integranden erster Gattung des Körpers $K(h)$. Nun sei, nach Potenzen von $y - h$ entwickelt,

$$A = a(y-h)^\alpha + \cdots.$$

Da A die Form (65) hat, so folgt, daß sich der Anfangskoeffizient a in der Form darstellen läßt

$$a = c_1 r_1 + c_2 r_2 + \cdots + c_q r_q, \tag{67}$$

wo die c konstant sind. Es ist also a ein Integrand erster Gattung des Körpers $K(h)$. Ist b der Anfangskoeffizient in der Entwicklung von B nach Potenzen von $y - h$, so folgt aus der Integrabilitätsbedingung

$$\alpha a = \frac{db}{dx} \tag{68}$$

und es würde, wenn α nicht gleich null ist, das Integral erster Gattung $\int a\,dx$ eine algebraische Funktion von x sein, was nicht möglich ist. Daher ist $\alpha = 0$.

Ist h unendlich, so seien $a y^\alpha$, $b y^{\alpha-1}$, $r_k y^{-\varrho_k}$ in der Umgebung von $y = \infty$ die Anfangsglieder in den Entwicklungen von A, B und R_k. Es sind dann die r_k wieder q linear unabhängige Integranden erster Gattung von $K(h) = K(\infty)$. Ferner besteht wieder eine Darstellung der Form (67) und die Gleichung (68), so daß auch jetzt folgt, daß $\alpha = 0$.

Ist h ein singulärer Wert von y, so kann A für $y = h$ sehr wohl identisch null werden. Ist nämlich $dI = A\,dx + B\,dy$ ein Differential erster Gattung, so wird es an keiner Stelle

unendlich bei unabhängiger Veränderlichkeit von x, y und also auch nicht, wenn man eine Beziehung zwischen x und y herstellt. Ist also $\mathfrak{P}$ ein Primteiler, so geht dI für $\mathfrak{P} = 0$ in ein Differential erster Gattung des Körpers $\mathfrak{P}$ über oder es wird dI identisch null. Für $y = h$ geht dI in Adx über und es ist daher Adx für $y = h$ ein Differential erster Gattung des Körpers $K(h)$, sofern nicht etwa A identisch null wird für $y = h$. Ist im besonderen das Geschlecht von $K(h)$ gleich null, so muß A identisch verschwinden.

10. *Über die Berechnung der Differentiale erster Gattung, II.*

Soll für das Differential $dI = Adx + Bdy$ die Integrabilitätsbedingung erfüllt werden, so hat man, wie wir in II, Nr. 2 gesehen haben, für B die mit A verbundene Funktion zu wählen. Die $2q$ Funktionen R_k seien so gewählt, daß die ersten q die in II, Nr. 8 bestimmten Funktionen sind. Damit dI von der ersten Gattung sein kann, muß A die Form (65) haben. Wir setzen daher

$$A = g_1 R_1 + g_2 R_2 + \cdots + g_q R_q,$$
$$B = g_1 S_1 + g_2 S_2 + \cdots + g_q S_q,$$

so daß A und B miteinander verbundene Funktionen sind. Wir wissen, daß die g ganze rationale Funktionen von y sein müssen und daß der Grad von g_k höchstens gleich ϱ_k sein darf. Außerdem wissen wir, daß A für $y = \infty$ nicht identisch verschwinden darf, sondern daß Adx in ein wirkliches Differential erster Gattung des Körpers $K(\infty)$ übergehen muß. Damit sind die g noch nicht bestimmt. Es müssen aber die g dem Differentialgleichungssystem E', (II, Nr. 3), genügen. Da hier die letzten q Funktionen g null sind, so zerfällt E' in zwei Teilsysteme von je q Gleichungen. Die zweiten q Gleichungen enthalten keinen Differentialquotienten und sind lineare homogene Gleichungen für die g mit rationalen Funktionen von y als Koeffizienten. Die ersten q Gleichungen bilden ein lineares homogenes Differentialgleichungssystem für die g. Da man weiß, daß die g ganze rationale Funktionen von y sind und man außerdem den Grad kennt, den sie höchstens annehmen können, so führt die Bestimmung der g auf lineare Gleichungen für ihre Koeffizienten.

Es seien $g_1, g_2, \ldots, g_q$ ganze rationale Funktionen von y, die den Gleichungen E' genügen und der Grad von g_k sei höchstens ϱ_k. Bestimmen wir dann A und B aus (69), so ist dI ein vollständiges Differential und A hat die Form (58). Es fragt sich, ob auch B die in (58) angegebene Form hat, ob also dI von der ersten Gattung ist. Wir werden später sehen, daß das tatsächlich der Fall ist.

11. *Differentiale zweiter Gattung.*

Um alle linear unabhängigen Differentiale zweiter Gattung $dI = Adx + Bdy$ zu erhalten, genügt es, (II, Nr. 2), wenn wir setzen

$$A = g_1 R_1 + g_2 R_2 + \cdots + g_{2q} R_{2q},$$
$$B = g_1 S_1 + g_2 S_2 + \cdots + g_{2q} S_{2q}, \tag{70}$$

wo die g rationale Funktionen von y sind. Damit dI ein totales Differential wird, ist notwendig und hinreichend, daß die g den Gleichungen E' genügen. Die R sind Integranden zweiter Gattung des Körpers $K(y)$. Sie sind in dem Sinne linear unabhängig, daß keine Gleichung von der Form besteht

$$f_1 R_1 + f_2 R_2 + \cdots + f_{2q} R_{2q} = \frac{\partial T}{\partial x}, \tag{71}$$

wo die f rationale Funktionen von y sind. Durch lineare Transformationen wie in II, Nr. 8 können wir erreichen, daß die R folgende Eigenschaften haben.

1. Es hat R_k die Form

$$R_k = \frac{\mathfrak{G}_k}{\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{L}^{\varrho_k} \mathfrak{M}^{\sigma_k}} \tag{72}$$

wo $\mathfrak{G}_k$ ein durch den Jacobischen Divisor von $\langle \mathfrak{M} \rangle$ teilbarer ganzer Divisor ist und wo ϱ_k und σ_k ganze Zahlen sind.

2. Die R sind für jeden endlichen regulären Wert h von y linear unabhängig im engeren Sinne, d. h. es gibt keine Konstanten c, so daß

$$c_1 R_1 + c_2 R_2 + \cdots + c_{2q} R_{2q}$$

durch $y - h$ teilbar ist.

Dagegen ist es wohl denkbar, daß für einen endlichen regulären Wert h von y die R in weiterem Sinne linear abhängig werden. Das soll bedeuten: Geht R_k für $y = h$ in r_k über, so besteht für konstante c eine Gleichung der Form

$$c_1 r_1 + c_2 r_2 + \cdots + c_{2q} r_{2q} = \frac{\partial t}{\partial x}, \tag{73}$$

wo t eine algebraische Funktion von x ist. Da eine Identiät der Form (71) nicht besteht, so kann eine Gleichung der Form (73) nur für eine endliche Anzahl von Werten von y bestehen. Wir wollen diese Werte zusammen mit den singulären Werten von y die Ausnahmewerte nennen. Es sei jetzt h_0 irgendein Wert von y, der nicht Ausnahmewert ist. Wir bringen dann durch eine lineare Transformation h_0 nach ∞, während der Punkt ∞ etwa nach b übergehe. Wir multiplizieren dann noch die R mit solchen Potenzen von $y - b$, daß sie grade eben nicht mehr unendlich werden für $y = b$ und auch nicht null. Der Vorsicht halber rechnen wir den Wert b auch zu den Ausnahmewerten von y. Die R haben dann folgende weitere Eigenschaft:

3. Ist in der Umgebung von $y = \infty$ der Koeffizient des Anfangsgliedes der Entwicklung von R_k nach fallenden Potenzen von y gleich r_k, oder ist h kein Ausnahmewert von y und geht R_k für $y = h$ in r_k über, so sind die r_k Integranden zweiter Gattung des Körpers $K(y)$ und sie sind linear unabhängig, d. h. es besteht keine Gleichung der Form (73).

Hieraus folgt:

Ist $dI = Adx + Bdy$ ein totales Differential und ist A von der Form (70), so kann A für $y = h$ weder null noch unendlich werden, wenn h kein Ausnahmewert ist. Das gilt auch für $h = \infty$.

Es sei nämlich in der Entwicklung von A nach Potenzen von $y - h$ das Anfangsglied $a(y - h)^\alpha$. Dann ist, wenn die r_k dieselbe Bedeutung haben wie in der Eigenschaft 3. der R,

$$a = c_1 r_1 + c_2 r_2 + \cdots + c_{2q} r_{2q},$$

wo die c konstant sind. Aus der Integrabilitätsbedingung ergibt sich aber eine Gleichung der Form $\alpha a = \partial t / \partial x$ und es würde also eine Gleichung der Form (73) bestehen, wenn α nicht null ist. Daher ist, wie behauptet, $\alpha = 0$.

Daraus ergibt sich, daß die g höchstens für Ausnahmewerte von y unendlich werden können.

Ferner folgt:

Nur die Ausnahmewerte von y können singulär für das Differentialgleichungssystem E' sein.

Es werde z. B. in dem Koeffizientensystem c von E' mindestens ein c_{kl} der ersten Zeile für $y = h$ unendlich und es sei, nach steigenden Potenzen von $y - h$ entwickelt,

$$c_{1k} = c_k(y-h)^{-\alpha} + \cdots$$

wo $\alpha > 0$ und die c_k nicht alle null sind. Multiplizieren wir dann die erste der Gleichungen (43) mit $(y-h)^{\alpha}$ und setzen $y = h$, so ergibt sich eine Gleichung der Form (73), woraus folgt, daß h ein Ausnahmewert ist.

Wir haben also:

Die linear unabhängigen totalen Differentiale zweiter Gattung lassen sich so wählen, daß sie nur unendlich werden für unendliches x und y und für Kurvenprimteiler mit einer Idealnorm $y-h$, wo h ein Ausnahmewert ist, und vielleicht noch für Punktprimteiler.

12. *Ein Hilfssatz.*

1. Es seien

$$w_1(x),\ w_2(x),\ \ldots,\ w_r(x)$$

r ganze rationale Funktionen von x,

$$h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h^r$$

irgendwelche endliche Zahlen und

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_r$$

ganze positive Zahlen, dann kann man eine ganze rationale Funktion $C(x, y)$ von x so bestimmen, daß

$$C(x, y) \equiv w_k(x) \mod (y-h_k)^{\alpha_k}$$

für $k = 1, 2, \ldots, r$.

Wir setzen

$$f(y) = (y-h_1)^{\alpha_1}(y-h_2)^{\alpha_2}\ldots(y-h_r)^{\alpha_r}$$

$$f_k(y) = \frac{f(y)}{(y-h_k)^{\alpha_k}}$$

und bestimmen r ganze rationale Funktionen $f_k'(y)$ von y so, daß

$$f_k(y)f_k'(y) \equiv 1 \mod (y-h_k)^{\alpha_k}.$$

Man kann für f_k' die Summe der ersten α_k Glieder der Entwicklung des reziproken Wertes von f_k nach steigenden Potenzen von $y-h_k$ wählen. Setzen wir dann

$$C(x, y) = \sum_{k=1}^{r} f_k(y)\, f_k'(y)\, w_k(x) + C_0(x, y)\, f(y), \tag{74}$$

wo C_0 irgendein Polynom von x, y ist, so hat C die verlangte Eigenschaft.

2. Es sei weiter $w'(x)$ eine ganze rationale Funktion von x und $w''(y)$ eine solche von y. Außerdem seien α und β zwei ganze positive Zahlen. Dann können wir von $C(x, y)$ weiter noch verlangen, daß in der Umgebung von $x = \infty$

$$C(x, y) \equiv w''(y)\, f(y)\, x^{\lambda} \mod x^{\lambda-\alpha}$$

und in der Umgebung von $y = \infty$

$$C(x, y) \equiv w'(x)\, f(y)\, y^{\mu} \mod y^{\mu-\beta},$$

wobei λ und μ beliebig groß gewählt werden können.

Um dies zu erreichen, brauchen wir in (74) nur zu wählen

$$C_0(x, y) = w''(y)\, x^{\lambda} + w'(x)\, y^{\mu}$$

und λ und μ genügend groß anzunehmen.

13. *Noch ein Hilfssatz.*

Es sei h ein endlicher Wert von y. Zunächst sei $y-h$ nicht Projektion eines Verzweigungsprimteilers, so daß $y-h$ nicht Faktor von $W_2(y)$ (I, Nr. 4), ist. Dann läßt

sich jede Funktion aus K nach ganzen Potenzen von $y - h$ entwickeln. Für eine Funktion R sei diese Entwicklung

$$R = r_0 + r_1(y-h) + r_2(y-h)^2 + \cdots. \tag{75}$$

Die Koeffizienten sind Funktionen des Körpers $\mathfrak{M}_h$. Ersetzen wir sie durch ihre konjugierten, so erhalten wir im ganzen n Reihenentwicklungen, die für R und die dazu konjugierten Funktionen gelten. Wir wollen eine Matrix, die in einer Spalte n konjugierte Funktionen von $\mathfrak{M}_h$ enthält, kurz eine Funktionenmatrix von $\mathfrak{M}_h$ nennen. Ferner wollen wir unter einem Koeffizienten r_k nicht nur die eine Funktion r_k verstehen, sondern die Koeffizientenmatrix, in der r_k das erste Element ist. Wir verstehen noch unter R die Matrix, die in einer Spalte R mit seinen konjugierten enthält. Die Gleichung (75) ist dann als Gleichung zwischen Systemen aufzufassen. In derselben Weise sind hier weitere derartige Gleichungen zu verstehen.

1. Es seien $c_0, c_1, \ldots c_{\alpha-1}$ Funktionenmatrizen von $\mathfrak{M}_h$. Dann gibt es eine ganze rationale Funktion $w(x)$ von x und eine Funktion H aus K, so daß

$$H \equiv c_0 + c_1(y-h) + \cdots + c_{\alpha-1}(y-h)^{\alpha-1}, \text{ mod } (y-h)^{\alpha}, \tag{76}$$

und daß $w(x)\,H$ eine ganze Funktion ist. Dabei soll $y - h$ nicht Idealnorm eines Verzweigungsprimteilers sein.

Es sei ξ eine Basis für die ganzen Funktionen aus K. (I, Nr. 9). Es ist

$$|\xi|^2 = W(x,y) = W_1(x)\,W_2(y)\,W_3(x,y). \tag{77}$$

In der Umgebung von $y = h$ sei

$$\xi = e_0 + e_1(y-h) + e_2(y-h)^2 + \cdots, \tag{78}$$

wo die e_h Funktionenmatrizen von $\mathfrak{M}_h$ mit n Spalten sind. Da $y - h$ nicht Faktor von $W_2(y)$ ist, so folgt aus (77) und (78), daß die Determinante von e_0 nicht identisch null ist, so daß das zu e_0 reziproke System e' existiert. Es ist e' keine Funktionenmatrix, wohl aber das transponierte System $\bar{e}'$ von e'. Es sei g eine Matrix, die in einer Spalte rationale Funktionen von x, y enthält, und zwar seien die Elemente von g in y ganz. In der Umgebung von $y = h$ sei

$$g = g_0 + g_1(y-h) + \cdots + g_{\alpha-1}(y-h)^{\alpha-1}. \tag{79}$$

Wir setzen $H = \xi g$. Soll H die Eigenschaft (76) haben, so ergeben sich in Verbindung mit (78) und (79) die Gleichungen

$$e_0 g_0 = c_0,\ e_0 g_1 + e_1 g_0 = c_1, \ldots e_0 g_{\alpha-1} + e_1 g_{\alpha-2} + \cdots + e_{\alpha-1} g_0 = c_{\alpha-1}.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen findet man durch vordere Multiplikation mit e' die Matrix g_0 und aus den folgenden Gleichungen erhält man der Reihe nach, und zwar auch durch vordere Multiplikationen mit $e', g_1, g_2, \ldots, g_{\alpha-1}$. Da in e' die Zeilen und in c_k und e_k die Spalten zueinander konjugierte Funktionen enthalten, so sind in den Produkten $e'\,c_k$, $e'\,e_k$ die Elemente Summen konjugierter Funktionen und daher rational in x. Es sind daher die Elemente von g rationale Funktionen von x, y und in y ganz. Also wird H eine Funktion aus K und sie genügt der Bedingung (76). Damit auch die zweite Eigenschaft vorhanden ist, brauchen wir unter $w(x)$ nur den Hauptnenner der Elemente von g zu verstehen.

Es sei jetzt $y - h$ die Projektion mindestens eines Verzweigungsprimteilers, etwa, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, der beiden Primteiler $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$. Es habe $\mathfrak{P}_i$ die Verzweigungsordnung $\lambda_i - 1$ und den Grad f_i. Eine der Zahlen λ_i kann auch 1 sein. Weitere Kurvenprimteiler enthalte der Zähler $\mathfrak{M}_h$ von $y - h$ nicht, so daß $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = n$. Eine Funktion aus K hat dann in der Umgebung von $y = h$ eine Ent-

wicklung nach steigenden Potenzen von $(y-h)^{\frac{1}{\lambda_1}}$ und eine zweite nach steigenden Potenzen von $(y-h)^{\frac{1}{\lambda_1}}$ und die aus diesen hervorgehenden konjugierten. Diese Entwicklungen können wir in folgender Weise schreiben. (I, Nr. 4). Sind δ_1, δ_2 passend gewählte algebraische Funktionen von x und zwar δ_i aus $\mathfrak{P}_i$, so setzen wir

$$\delta_1(y-h)=\eta_1, \qquad \delta_2(y-h)=\eta_2$$

und haben dann für eine Funktion R aus K etwa die Entwicklungen

$$R = T_1 + T_2\eta_1^{\frac{1}{\lambda_1}} + \cdots + T_{\lambda_1}\eta_1^{\frac{\lambda_1-1}{\lambda_1}}, \tag{80}$$

$$R = T_1' + T_2'\eta_2^{\frac{1}{\lambda_1}} + \cdots + T_{\lambda_2}'y_2^{\frac{\lambda_2-1}{\lambda_2}}. \tag{81}$$

Hierin sind die T und T' Potenzreihen, die nur ganze Potenzen von $y-h$ enthalten. Aus der ersten dieser Entwicklungen erhalten wir zunächst dadurch λ_1-1 konjugierte, daß wir die λ_1-te Wurzel aus η_1 durch ihre anderen Werte ersetzen. In den Reihen T von $y-h$ sind die Koeffizienten Funktionen des Körpers $\mathfrak{P}_1$, der vom Grade f_1 über dem Körper (x) der rationalen Funktionen von x ist. Ersetzen wir die Koeffizienten durch ihre konjugierten in bezug auf (x), so erhalten wir zu jeder Reihe T noch f_1-1 konjugierte. Auf diese Weise erhalten wir zu jeder der λ_1 bisher aus (80) hervorgegangenen Entwicklungen noch f_1 konjugierte, so daß die Gesamtzahl der durch (80) gegebenen Entwicklungen $\lambda_1 f_1$ ist. Ähnliche Betrachtungen gelten für die Darstellung (81).

Wir bezeichnen die T und T' nebst ihren konjugierten in einer noch zu definierenden Reihenfolge mit $T_1, T_2, \ldots, T_n$ und die Matrix mit der einen aus diesen n Potenzreihen bestehenden Spalte mit T. Wir schreiben

$$T = t_0 + t_1(y-h) + t_2(y-h)^2 + \cdots,$$

wo jedes t eine Matrix mit einer Spalte bedeutet.

Wir definieren jetzt eine quadratische Matrix M von n^2 Elementen in folgender Weise. Es sei M_i eine Matrix, deren erste Zeile

$$1, \eta_i^{\frac{1}{\lambda_i}}, \eta_i^{\frac{2}{\lambda_i}}, \ldots, \eta_i^{\frac{\lambda_i-1}{\lambda_i}}$$

ist, während die anderen Zeilen dadurch aus dieser hervorgehen sollen, daß man die λ_i-te Wurzel aus η_i durch ihre anderen Werte ersetzt. Das System M erhalten wir, indem wir f_1 Matrizen M_1 und f_2 Matrizen M_2 diagonal aneinander reihen. Dann können wir die Darstellungen (80) und (81) und die daraus hervorgehenden in der Form schreiben

$$R = MT,$$

womit dann auch die Reihenfolge der T_k festgelegt ist. Die Koeffizientenmatrizen t_k können jetzt folgendermaßen beschrieben werden. Jede von ihnen enthält zunächst λ_1 Funktionen aus $\mathfrak{P}_1$, dann die zu diesen in bezug auf den Körper (x) konjugierten, was im ganzen $\lambda_1 f_1$ sind. Dann kommen λ_2 Funktionen aus $\mathfrak{P}_2$ und die zu ihnen in bezug auf (x) konjugierten, im ganzen $\lambda_2 f_2$. Die Gesamtzahl der in einem t_k enthaltenen Funktionen ist also $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = n$. Wir wollen hier eine Matrix, die in einer Spalte λ_1 Funktionen aus $\mathfrak{P}_1$ und λ_2 Funktionen aus $\mathfrak{P}_2$ und die zugehörigen konjugierten in bezug auf (x) enthält, und zwar in derselben Anordnung wie in den t_k, eine Funktionenmatrix von $\mathfrak{M}_h$ nennen.

Wir können jetzt den zweiten Teil unseres Hilfssatzes formulieren und beweisen.

2. Es seien $c_0, c_1, \ldots, c_{\alpha-1}$ Funktionenmatrizen von $\mathfrak{M}_h$. Dann gibt es eine ganze rationale Funktion $w(x)$ von x und eine Funktion H aus K, so daß erstens $w(x)H$ eine ganze Funktion ist und daß zweitens, wenn wir setzen $H = MG$,

$$G \equiv c_0 + c_1(y-h) + \cdots + c_{\alpha-1}(y-h)^{\alpha-1} \bmod (y-h)^{\alpha}.$$

Es sei ξ wieder eine Basis für die ganzen Funktionen. Setzen wir

$$\xi = M\xi', \tag{82}$$

so besteht für ξ' eine Entwicklung der Form

$$\xi' = e_0 + e_1(y-h) + e_2(y-h)^2 + \cdots, \tag{83}$$

wo die e_k Funktionenmatrizen von $\mathfrak{M}_h$ sind. Da das Quadrat der Determinante von M genau durch dieselbe Potenz von $y-h$ teilbar ist wie $W_2(y)$, so folgt aus (77), (82) und (83), daß die Determinante von e_0 nicht identisch null ist, daß also das zu e_0 reziproke System e' existiert. Nehmen wir H in der Form ξg an, so folgt $H' = \xi' g$ und der weitere Beweis verläuft wie der Beweis des ersten Teiles des Hilfssatzes.

Wir betrachten noch die Umgebung von $x = \infty$, also die des Körpers $\mathfrak{L}$. Da wir angenommen haben, daß der Wert ∞ für x kein besonderer sein soll, so lassen sich die Funktionen aus K in der Umgebung von $\mathfrak{L}$ nach ganzen Potenzen von x entwickeln. Wir haben für jede Funktion n konjugierte Entwicklungen, in denen die Koeffizienten gleichhoher Potenzen von x Funktionen aus $\mathfrak{L}$ sind, die zueinander konjugiert sind in bezug auf den Körper (y) der rationalen Funktionen von y. Wir nennen eine Matrix, die in einer Spalte n solche Funktionen enthält, eine Funktionenmatrix von $\mathfrak{L}$. Wir können dann den dritten Teil unseres Hilfssatzes aussprechen:

3. Es seien $c_0, c_1, \ldots, c_{\alpha-1}$ Funktionenmatrizen von $\mathfrak{L}$. Dann gibt es eine positive ganze Zahl ν, eine ganze rationale Funktion $w(y)$ von y und eine Funktion H aus K, so daß

$$H \equiv c_0 + c_1 x^{-1} + \cdots + c_{\alpha-1} x^{-(\alpha-1)}, \quad \bmod x^{-\alpha}, \tag{84}$$

und daß $x^{\nu} w(y) H$ eine ganze Funktion ist.

Es sei wieder ξ eine Basis für die ganzen Funktionen aus K. Die Funktion ξ_i und ihre konjugierten, also die Funktionen $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{in}$ mögen für unendliches x von der Ordnung α_i unendlich werden. Das Anfangsglied von ξ_{ik} in der Entwicklung nach fallenden Potenzen von x sei also $e_{ik} x^{\alpha_i}$, wo die Funktionen $e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{in}$ nicht sämtlich null sein sollen. Wenn die Determinante der Anfangskoeffizienten identisch verschwindet, können wir aus ξ durch hintere Multiplikation mit einem System q, dessen Elemente rationale Funktionen von y sind, ein neues System ξ' herleiten, bei dem die in derselben Weise definierten Anfangskoeffizienten eine Determinante haben, die nicht identisch null ist. Denn die Henselsche Methode bei Funktionen einer Veränderlichen ein System ξ in ein System ξ' der gewünschten Eigenschaft überzuführen, läßt sich ohne weiteres übertragen, und zwar so, daß man im Körper K bleibt. Hat ξ selbst schon die gewünschte Eigenschaft, so verstehen wir unter q das Einheitssystem. Werden die Funktionen der k-ten Spalte von ξ' für unendliches x von der Ordnung β_k unendlich, so bedeute N das Diagonalsystem mit der Diagonale $x^{\beta_1}, x^{\beta_2}, \ldots, x^{\beta_n}$. Setzen wir dann

$$\xi q = \xi' = \xi'' N, \tag{85}$$

so haben wir für ξ'' in der Umgebung von $x = \infty$ eine Entwicklung

$$\xi'' = e_0 + e_1 x' + e_2 x'^2 + \cdots,$$

wo x' für x^{-1} geschrieben ist, und es ist die Determinante von e_0 nicht identisch null. Wir haben jetzt dieselben Verhältnisse wie beim ersten Teil unseres Hilfssatzes, nur daß y an die Stelle von x und x' an die Stelle von $y-h$ getreten ist. Wir können also genau wie dort beweisen, daß es eine aus einer Spalte bestehende Matrix g gibt, deren Elemente ganz rational in x' und rational in y sind, und zwar so, daß $H = \xi'' g$ die Bedingung (84) erfüllt. Aus (85) folgt

(86) $$H = \xi'' g = \xi q N^{-1} g = \xi h,$$

wenn wir setzen

(87) $$h = q N^{-1} g.$$

Die Elemente von q sind rationale Funktionen von y . N^{-1} ist ein Diagonalsystem mit den Elementen $x'^{\beta_1}, x'^{\beta_2}, \ldots, x'^{\beta_n}$. Die Exponenten β sind nicht negativ, da eine ganze Funktion nicht für $x = \infty$ null werden kann, ohne identisch zu verschwinden. Nach (87) sind daher die Elemente von h ganze rationale Funktionen von x' und rationale von y. Der Hauptnenner der Elemente von h, wenn wir sie als Funktionen von x, y auffassen, hat daher die Form $x^r w(y)$. Multiplizieren wir hiermit h, so werden die Elemente von h ganze rationale Funktionen von x, y und aus (86) folgt, daß $x^r w(y) H$ eine ganze Funktion aus K ist, womit auch der dritte Teil des Hilfssatzes bewiesen ist.

4. In dem dritten Teile des Hilfssatzes können wir x mit y vertauschen. Den dadurch entstehenden Satz wollen wir nicht besonders formulieren.

14. *Verwandlung eines Integrals zweiter Gattung in ein Integral, das nur längs eines Primteilers unendlich wird*[8])

Wir können jetzt den Satz von Severi beweisen:

Die linear unabhängigen totalen Differentiale zweiter Gattung lassen sich so wählen, daß sie nur längs eines Primteilers unendlich werden.

Wie wir in II, Nr. 11 gesehen haben, können wir die linear unabhängigen Differentiale zweiter Gattung so wählen, daß sie für endliches x, y nur längs solcher Kurvenprimteiler unendlich werden, deren Idealnormen die Form $y - h$ haben, wo h eine Konstante ist. Die Zahl der linear unabhängigen Differentiale sei s und es seien

(88) $$I_1, I_2, \ldots, I_s$$

s linear unabhängige Integrale, deren Differentiale die angegebene Beschaffenheit haben. Wir betrachten eins dieser Integrale, etwa I_k. Wir zeigen zunächst, daß wir durch Subtraktion einer Funktion aus K ein neues Integral erhalten können, das nur längs eines Kurvenprimteilers unendlich wird, aber außerdem vielleicht noch längs eines oder mehrerer Punktprimteiler.

Die Kurvenprimteiler, längs deren die Integrale (88), abgesehen von $x = \infty$ und $y = \infty$, unendlich werden, mögen die Idealnormen

$$y - h_1, y - h_2, \ldots, y - h_r$$

haben. Wir betrachten das Integral I_k in der Umgebung von $y = h_i$. 1. Es sei $y - h_i$ nicht Idealnorm eines Verzweigungsprimteilers.

Nach II, Nr. 4 gilt eine Entwicklung

$$I_k = (y - h_i)^{-\alpha_i} \{c_0 + c_1 (y - h_i) + c_2 (y - h_i)^2 + \cdots\}.$$

Diese Gleichung ist wie in der vorigen Nr. zu verstehen, d. h. sie soll die n konjugierten Entwicklungen darstellen. Es sind dann die Koeffizienten Funktionenmatrizen von $\mathfrak{M}_h$. Nur das absolute Glied macht eine Ausnahme, was aber nicht stört, da nur der Hauptteil der Entwicklung für uns von Bedeutung ist. Wir bestimmen nach der vorigen Nr. eine Funktion H_{ki} aus K und eine ganze rationale Funktion $w_{ki}(x)$ von x so, daß

$$I_k - (y - h_i)^{-\alpha_i} H_{ki} \quad \text{endlich für } y = h_i$$

und daß $w_{ki} H_{ki}$ eine ganze Funktion ist. Wenn $\alpha_i = 0$, so sei $H_{ki} = 0$ und $w_{ki} = 1$. Wir bezeichnen das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der s Funktionen $w_{1i}, w_{2i}, \ldots w_{si}$ mit $w_i(x)$. Es ist dann auch $w_i H_{ki}$ ganz. Wir setzen noch

$$G_{ki} = (y - h_i)^{-\alpha_i} w_i(x) H_{ki}.$$

Es ist dann G_{ki} eine Funktion aus K, die im endlichen nur für $y = h_i$ unendlich werden kann.

2. Es sei $y - h_i$ die Idealnorm mindestens eines Verzweigungsprimteilers. Wir wählen den Fall, den wir in 2, Nr. 13 betrachtet haben und benutzen auch die dort angewandten Bezeichnungen. Wir können annehmen, daß die Entwicklungen von I_k und seinen konjugierten mit derselben ganzzahligen Potenz von $y - h_i$ beginnen, indem wir zulassen, daß einige der ersten Koeffizienten null sind. Schreiben wir dann

$$I_k = (y - h_i)^{-\alpha_i} M I'_k,$$

so haben wir für I'_k die Entwicklung

$$I'_k = c_0 + c_1(y - h_i) + c_2(y - h_i)^2 + \cdots,$$

wo die c, wenigstens soweit sie für uns in betracht kommen, Funktionenmatrizen von $\mathfrak{M}_{h_i}$ sind. Wir bestimmen nach der vorigen Nr. eine Funktion H_{ki} aus K und eine ganze rationale Funktion $w_{ki}(x)$ von x so, daß

$$I_k - (y - h_i)^{-\alpha_i} H_{ki} \quad \text{endlich für } y = h_i$$

und daß $w_{ki} H_{ki}$ eine ganze Funktion aus K ist. Wir definieren w_i und G_{ki} wie in 1. Wenn $\alpha_i = 0$, so sei $G_{ki} = 0$, $w_{ki} = 1$.

3. Die Umgebung von $x = \infty$.

In der Umgebung von $x = \infty$ sei

$$I_k = x^{\alpha}\{c_0 + c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2} + \cdots\}.$$

Es sind dann die c bis auf das absolute Glied Funktionenmatrizen von $\mathfrak{L}$. Wir können daher nach der vorigen Nr. eine Funktion H'_k und eine ganze rationale Funktion $w''_k(y)$ von y so bestimmen, daß

$$I_k - x^{\alpha} H'_k \quad \text{endlich für } x = \infty,$$

und daß $x^{\lambda+\alpha} w''_k H'_k$ für genügend großes λ eine ganze Funktion aus K ist. Wir bezeichnen das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der s Funktionen w''_k mit w'' und setzen

$$G'_k = x^{\lambda+\alpha} w''(y) f(y) H'_k.$$

Wenn $\alpha = 0$, soll $w''_k = 1$ und H'_k und damit auch G'_k gleich 0 sein.

4. Die Umgebung von $y = \infty$.

In der Umgebung von $y = \infty$ sei

$$I_k = y^{\beta}\{c_0 + c_1 y^{-1} + c_2 y^{-2} + \cdots\}.$$

Es sind die c bis auf das absolute Glied Funktionenmatrizen von $\mathfrak{M}$. Nach der vorigen Nr. bestimmen wir eine Funktion H''_k und eine ganze rationale Funktion $w'_k(x)$ von x so, daß

$$I_k - y^{\beta} H''_k \quad \text{endlich für } y = \infty$$

und daß $y^{\mu+\beta} w'_k H''_k$ für genügend großes μ eine ganze Funktion aus K ist. Für $\beta = 0$ sei $w'_k = 1$ und $H''_k = 0$. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der w'_k sei w'. Wir setzen

$$G''_k = y^{\mu+\beta} w'(x) f(y) H''_k.$$

Es sei jetzt $C(x, y)$ eine ganze rationale Funktion von x, y, die die Bedingungen von Nr. 12 erfüllt. Durch diese Bedingungen ist C nicht vollständig bestimmt. Einmal können wir einen Summanden von der Form $g(x, y)f(y)$ hinzufügen, wo g eine ganze rationale Funktion von x, y ist, wenn wir nur die Exponenten λ, μ genügend groß wählen, und dann sind diese Exponenten willkürlich, wenn sie nur hinreichend groß sind. Daher können wir annehmen, daß der Zähler von C die Projektion eines einzigen Kurvenprimteilers $\mathfrak{C}$ ist. Sonst müßte nämlich die rational unzerlegbare Funktion $F(x, y, z)$, durch deren

Nullsetzen wir den Körper K definiert haben, nach dem Modul jeder derartigen Funktion C zerlegbar werden.

Setzen wir

$$Q_{ki} = \frac{G_{ki}}{C}, \quad Q_k' = \frac{G_k'}{C}, \quad Q_k'' = \frac{G_k''}{C},$$

so ist, wenn nur λ und μ genügend groß gewählt werden, Q_{ki} eine Funktion aus K, die, abgesehen von Punktprimteilern, nur unendlich wird längs $\mathfrak{C}$ und für $y = h_i$. Und, abgesehen von Punktprimteilern, und von $\mathfrak{C}$, wird Q_k' nur unendlich für $x = \infty$ und Q_k'' nur für $y = \infty$. Ferner wird $I_k - Q_{ki}$ nicht für $y = h_i$, $I_k - Q_k'$ nicht für $x = \infty$ und $I_k - Q_k''$ nicht für $y = \infty$ unendlich. Setzen wir daher

$$J_k = I_k - \sum_{i=1}^{r} Q_{ki} - Q_k' - Q_k'', \qquad k = 1, 2, \ldots, s,$$

so sind die s Integrale zweiter Gattung J_k linear unabhängig und sie werden, abgesehen von Punktprimteilern nur längs $\mathfrak{C}$ unendlich.

Wir haben die Integrale J_k jetzt noch so abzuändern, daß sie nicht längs Punktprimteilern unendlich werden. Der Zähler C von $C(x, y)$ hat die Form $C = \mathfrak{V}\mathfrak{C}$, wo $\mathfrak{V}$ nur Punktprimteiler enthält. Es ist $\mathfrak{V}$ ganz gewiß nicht gleich 1. Denn die Funktion $C(x, y)$ ist so bestimmt, daß sie gerade an den Stellen, i. a. sogar mehrfach, verschwindet, die Projektionen von Punktprimteilern sind. Die Funktion $C(x, y)$ ist nicht vollständig bestimmt. Vor allem können wir ihren Grad (λ, μ) in x, y beliebig groß wählen, ohne dadurch ihr Verhalten an den Stellen, die Projektionen von Punktprimteilern sind, zu ändern, so daß auch $\mathfrak{V}$ unverändert bleibt. Es ist $C(x, y)J_k$ eine analytische Funktion von x, y, die längs $\mathfrak{C}$ nicht mehr unendlich wird und also auch nicht längs eines der in $\mathfrak{V}$ enthaltenen Primteiler. Denn eine analytische Funktion von x, y kann nicht in der Umgebung einer Stelle nur längs Punktprimteilern unendlich werden.

Es seien $G_1, G_2, \ldots, G_\nu$ linear unabhängige ganze Funktionen aus K, die höchstens von der Ordnung (λ, μ) unendlich werden. Ihre Anzahl kann man so groß wählen, wie man will, indem man λ und μ genügend groß wählt, Wir können daher in

$$H_k = C(x, y)\, J_k - c_{k1} G_1 - c_{k2} G_2 - \cdots - c_{k\nu} G_{k\nu}$$

die Konstanten c_{ki} so bestimmen, daß H_k durch $\mathfrak{V}$ teilbar wird. Denn dazu ist nur nötig, daß H_k für die Wertepaare x, y von genügend hoher Ordnung verschwindet, die Projektionen von Punktprimteilern sind, was auf homogene lineare Gleichungen für die c_{ki} führt. Setzen wir

$$T_k = \frac{H_k}{C(x, y)},$$

so ist T_k ein Integral zweiter Gattung, das nur längs $\mathfrak{C}$ unendlich wird.

Damit ist der Satz von Severi bewiesen.

15. *Integrale zweiter Gattung, die nur längs eines Primteilers unendlich werden*[8]).

Es sei I ein Integral zweiter Gattung, das nur längs eines Primteilers $\mathfrak{C}$ unendlich wird, und zwar von der ersten Ordnung. Wir wollen uns auf den Fall beschränken, daß $\mathfrak{C}$ kein Verzweigungsprimteiler ist.

In der Umgebung einer Stelle S von K ist

$$dI = A\, dx + B\, dy = \frac{U\, du + V\, dv}{\mathfrak{C}^2}, \tag{89}$$

wo U und V gewöhnliche Potenzreihen von u, v sind. Wie in II, Nr. 6, 7 folgt hieraus unter Verwendung der Abkürzung (62)

$$A = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{L}^2}{\mathfrak{Z}_1\mathfrak{C}^2}, \quad B = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{Z}_2\mathfrak{C}^2}, \tag{90}$$

wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ganze Divisoren sind. Es ist $\mathfrak{A}$ durch den Jacobischen Divisor von $\langle\mathfrak{M}\rangle$ und $\mathfrak{B}$ durch den von $\langle\mathfrak{L}\rangle$ teilbar.

Es sei $C(x, y)$ die Idealnorm von $\mathfrak{C}$ und es sei

$$C(x, y) = \mathfrak{C}\mathfrak{G}\mathfrak{L}^{-\lambda}\mathfrak{M}^{-\mu} = \mathfrak{C}\mathfrak{G}\mathfrak{N}^{-1}, \tag{91}$$

wo $\mathfrak{G}$ ein ganzer Divisor ist. Für $\mathfrak{C} = 0$ geht die Klasse $(\mathfrak{C})$ in eine Klasse des Körpers $\mathfrak{C}$ über, die wir mit (c) bezeichnen. Im übrigen bezeichnen wir denjenigen Divisor des Körpers $\mathfrak{C}$, in den ein Divisor von K für $\mathfrak{C} = 0$ übergeht, mit dem entsprechenden kleinen Buchstaben. Es sei ferner durch Hinzufügung des Index 0 an eine Größe ausgedrückt, daß ihr Wert für $\mathfrak{C} = 0$ gemeint ist. Mit diesen Bezeichnungen haben wir

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_0 = \frac{\mathfrak{c}_1\mathfrak{l}^2}{\mathfrak{n}}, \quad \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0 = \frac{\mathfrak{c}_2\mathfrak{m}^2}{\mathfrak{n}}, \tag{92}$$

wo $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ ganze Divisoren sind. Denn $\partial C/\partial x$ z. B. ist in x von einem um 1 kleineren Grade als $C(x, y)$. Außerdem aber ist der Koeffizient der höchsten Potenz von x bis auf den Faktor λ derselbe wie in $C(x, y)$, so daß dieser für $C(x, y) = 0$ in der Umgebung von $x = \infty$ verschwindet.

Da I nur längs $\mathfrak{C}$ und nur von der ersten Ordnung unendlich wird, so ist

$$\mathfrak{C}I = \mathfrak{H} \tag{93}$$

in der Umgebung jeder Stelle ganz. Es ist $\mathfrak{H}$ wegen der Integrationskonstanten und wegen der Perioden von I nicht eindeutig bestimmt. Da aber diese unbestimmten konstanten Summanden in $\mathfrak{H} = \mathfrak{C}I$ mit $\mathfrak{C}$ multipliziert sind, so geht $\mathfrak{H}$ für $\mathfrak{C} = 0$ in einen ganz bestimmten ganzen Divisor $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{C}$ über. Aus (93) folgt in Verbindung mit (89)

$$\mathfrak{C}d(\mathfrak{C}I) = Udu + Vdv + \mathfrak{H}d\mathfrak{C} = \left(U + \mathfrak{H}\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial u}\right)du + \left(V + \mathfrak{H}\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial v}\right)dv. \tag{94}$$

Da hierin die linke Seite durch $\mathfrak{C}$ teilbar ist, so müssen auf der rechten die Faktoren von du und dv durch $\mathfrak{C}$ teilbar sein, so daß sie für $\mathfrak{C} = 0$ verschwinden. Daraus folgt

$$\mathfrak{h} = -\left\{\frac{U}{\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial u}}\right\}_0 = -\left\{\frac{V}{\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial v}}\right\}_0. \tag{95}$$

Da $\mathfrak{h}$ ganz ist, ergeben sich hieraus Bedingungen für das Verhalten von U und V an den mehrfachen Stellen von $\mathfrak{C}$.

Es sei y_1 eine Lösung von $C(x, y) = 0$ und es sei, nach Potenzen von $y - y_1$ entwickelt, in der Umgebung von $\mathfrak{C}$

$$B = b(y - y_1)^{-2} + \cdots, \text{ also } I = -b(y - y_1)^{-1} + \cdots. \tag{96}$$

Hieraus folgt

$$b = \{B(y - y_1)^2\}_0 = \left\{BC^2\left(\frac{y - y_1}{C}\right)^2\right\}_0 = \left\{BC^2\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)^{-2}\right\}_0$$

oder wegen (90), (91), (92)

$$b = \left\{\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{M}^2\mathfrak{C}^2\mathfrak{G}^2}{\mathfrak{Z}_2\mathfrak{C}^2\mathfrak{N}^2}\right\}_0\left\{\frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{c}_2^2\mathfrak{m}^2}\right\}^2 = \frac{\mathfrak{b}\mathfrak{g}^2}{\mathfrak{z}_2\mathfrak{c}_2^2\mathfrak{m}^2}. \tag{97}$$

Weiter ergibt sich aus (96)

$$-b = \{I(y-y_1)\}_0 = \left\{IC\frac{y-y_1}{C}\right\}_0 = \left\{IC\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)^{-1}\right\}_0$$

und wegen (93), (91), (92)

$$-b = \left\{\frac{\mathfrak{H}\mathfrak{G}}{\mathfrak{N}}\right\}_0 \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{c}_2\mathfrak{m}^2} = \frac{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}{\mathfrak{c}_2\mathfrak{m}^2}. \tag{98}$$

Durch Vergleich von (97) mit (98) und nach Analogie ergibt sich

$$\{\mathfrak{A}\}_0 = \mathfrak{a} = -\frac{\mathfrak{z}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{h}}{\mathfrak{g}}, \qquad \{\mathfrak{B}\}_0 = \mathfrak{b} = -\frac{\mathfrak{z}_2\mathfrak{c}_2\mathfrak{h}}{\mathfrak{g}}. \tag{99}$$

Anstatt nach Potenzen von $y - y_1$ können wir I auch nach Potenzen von $C(x, y)$ entwickeln. Der Koeffizient von C^{-1} in dieser Entwicklung sei e. Es ist e eine Funktion des Körpers $\mathfrak{C}$ und es wird

$$e = \{C(x,y)I\}_0 = \left\{(y-y_1)\,I\,\frac{C(x,y)}{y-y_1}\right\}_0 = -b\left\{\frac{\partial C}{\partial y}\right\}_0$$

oder wegen (92) und (98)

$$e = \{C(x,y)I\}_0 = \frac{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}{\mathfrak{n}}. \tag{100}$$

Da e eine Funktion aus $\mathfrak{C}$, so ist $e \sim 1$; ferner ist nach (91) $\mathfrak{n}/\mathfrak{g} \sim \mathfrak{c}$, sodaß

$$\mathfrak{h} = \{I\mathfrak{C}\}_0 \sim \mathfrak{c} \tag{101}$$

oder in Worten:

Ist I ein Integral zweiter Gattung, das nur längs des Primteilers $\mathfrak{C}$, und zwar von der ersten Ordnung, unendlich wird, so wird $\mathfrak{C}I$ für $\mathfrak{C} = 0$ zu einem ganzen Divisor der Klasse (c), in die die Klasse $(\mathfrak{C})$ für $\mathfrak{C} = 0$ übergeht.

16. *Ein Satz von Severi*[8]).

Wir können jetzt den folgenden Satz von Severi beweisen.

Gibt es im Körper K ein einfaches Integral zweiter Gattung, das nicht durch Subtraktion einer Funktion des Körpers in ein Integral erster Gattung verwandelt werden kann, so gibt es einen Primteiler $\mathfrak{C}$, für den $\omega_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{C}) > 0$.

Wie wir in II, Nr. 14 gesehen haben, kann man jedes einfache Integral zweiter Gattung durch Subtraktion einer Funktion aus K in ein Integral verwandeln, das nur längs eines Primteilers $\mathfrak{C}$, und zwar von der ersten Ordnung unendlich wird. Gibt es also in K ein einfaches Integral, das nicht durch Subtraktion einer Funktion aus K in ein Integral erster Gattung verwandelt werden kann, so können wir annehmen, daß es nur längs eines Primteilers $\mathfrak{C}$, und zwar von der ersten Ordnung, unendlich wird. Wir haben dann den Fall der vorigen Nr., deren Bezeichnungen wir benutzen. Es sei also I ein derartiges Integral. Das Anfangsglied in der Entwicklung von I nach Potenzen von $C(x, y)$ sei eC^{-1}. Die Funktion e gehört dem Körper $\mathfrak{C}$ an und hat die Form (100), wo $\mathfrak{h}$ ein ganzer Divisor der Klasse (c) ist. Nun sei $\omega_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{C}) = 0$. Dann gibt es in $(\mathfrak{C})$ einen ganzen Divisor $\mathfrak{Q}$, der für $\mathfrak{C} = 0$ in $\mathfrak{h}$ übergeht. Es ist also $\mathfrak{Q}/\mathfrak{C}$ eine Funktion H aus K, die nur für $\mathfrak{C} = 0$ von der ersten Ordnung unendlich wird. Der Koeffizient von C^{-1} in der Entwicklung von H nach Potenzen von C sei e'. Es ist

$$e' = \{C(x,y)\,H\}_0 = \left\{\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{G}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{N}\mathfrak{C}}\right\}_0 = \frac{\mathfrak{g}\mathfrak{h}}{\mathfrak{n}}.$$

Durch Vergleich mit (100) folgt, daß sich e von e' nur durch einen konstanten Faktor k unterscheiden kann, sodaß $e = ke'$. Daraus aber ergibt sich, daß $I - kH$ für $\mathfrak{C} = 0$

nicht mehr unendlich wird, also ein Integral erster Gattung ist, entgegen der Voraussetzung. Damit ist der Satz von Severi bewiesen.

Es folgt noch:

Die Zahl der linear unabhängigen eigentlichen einfachen Integrale zweiter Gattung ist höchstens $\omega_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{C})$.

Literaturverzeichnis.

1. C. W. M. Black, The parametric representation of the neighbourhood of a singular point of an analytic surface. Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences **37** (1902), Nr. 11.
2. H. W. E. Jung, Algebraische Flächen, Kap. I. Hannover 1925.
3. K. Hensel, Über eine neue Theorie der algebraischen Funktionen zweier Variablen. Acta mathematica **23** (1900).
4. K. Sander, Rationale Herstellung einer Normalbasis für die Vielfachen eines Divisors. Dissertation Halle 1927.
5. E. Picard et G. Simart, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. Paris 1897—1906.
6. F. Severi, Sugl' integrali algebrici semplici e doppi. Nota I—IV. Rendiconti delle sedute della reale accademia nazionale dei lincei. Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (6) **7** (1928).
7. F. Severi, Sugli integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica. Scritti matematici offerti ad Enrico d'Ovidio.
8. F. Severi, Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della 2ª specie. Mathematische Annalen **61** (1905).

Eingegangen 8. Februar 1931.

Elementare Abschätzungen von Fundamentaleinheiten und des Regulators eines algebraischen Zahlkörpers.

Von *Robert Remak* in Berlin.

Einleitung.

Mit der Abschätzung des absoluten Betrages einer Einheit eines algebraischen Zahlkörpers hat sich Herr Landau in einer Arbeit beschäftigt: „Abschätzung von Charaktersummen, Einheiten und Klassenzahlen“ [1]) (zitiert L I). Er gelangt auf S. 95 unter Benutzung idealtheoretischer Hilfsmittel zu der Abschätzung

$$(1) \qquad \left| \log |\eta^{(k)}| \right| \leqq \frac{1}{2^{n-1} \cdot (n-1)!} \sqrt{D} \cdot \log^{n-1} D + b_5 \sqrt{D} \cdot \log^{n-2} D \,,$$

wo b_5 eine nur vom Grade des Körpers abhängige Konstante, D die absolut genommene Körperdiskriminante, $\eta^{(k)}$ irgendeine Konjugierte einer von den Einheitswurzeln verschiedenen Einheit ist. Durch diese Formel ist $|\eta^{(k)}|$ nach oben und unten abgeschätzt. Herr Landau beschränkt sich aber auf den Beweis der Existenz einer einzigen Einheit, die dieser Bedingung genügt.

In einer zweiten Arbeit: „Verallgemeinerung eines Pólyaschen Satzes auf algebraische Zahlkörper“ (L II)[2]) erhält Herr Landau im Zusammenhang mit der Heckeschen Funktionalgleichung der Dedekindschen Zetafunktion, also unter Benutzung tiefliegender funktionentheoretischer Hilfsmittel, für den Regulator eines algebraischen Zahlkörpers die Abschätzung

$$(2) \qquad M < \lambda_{11} \sqrt{D} \cdot \log^{n-1} D \,,$$

wo λ_{11} nur von n abhängt. Übrigens werde ich den Regulator um einen von der Zahl der Paare komplexer Wurzeln s abhängigen Faktor 2^s von M verschieden definieren, worauf es aber hier nicht ankommt. Unter Benutzung dieser Abschätzung zeigt Herr Landau, daß es immer mindestens eine Einheit geben muß, für deren sämtliche Konjugierte

$$(3) \qquad \left| \log |\eta^{(\lambda)}| \right| \leqq \lambda_{12} \sqrt[r]{\sqrt{D} \cdot \log^{n-1} D} \,.$$

Hierin bedeutet r: „Anzahl der reellen Konjugierten plus Anzahl der Paare konjugiert komplexer Konjugierter minus Eins“. Auch hier beschränkt sich Herr Landau auf die Existenz einer einzigen Einheit.

Ich werde mich im folgenden auf die bei Minkowski üblichen elementaren Methoden beschränken, d. h. die Verwendung der reellen Integralrechnung, und keine funktionentheoretischen Hilfsmittel benutzen. Mit diesen Hilfsmitteln werde ich die

[1]) Göttinger Nachrichten 1918, S. 79—97.

[2]) Göttinger Nachrichten 1918, S. 478—488.

Abschätzung (1) des Herrn Landau aus L I mit einer geringfügigen Verbesserung erreichen, die daher rührt, daß ich nicht Minkowskis Linearformensatz, sondern seinen Satz vom konvexen Körper mit Mittelpunkt im Punktgitter benutze. Die Abschätzungen (2) und (3) aus L II kann ich mit diesen elementaren Hilfsmitteln nicht erreichen. Ich werde zum ersten Male eine *elementare* Abschätzung des Regulators geben und überhaupt zum ersten Male *sämtliche* Einheiten eines geeigneten *Fundamentalsystems* von Einheiten abschätzen. Zu gewissen schlechteren Schranken gelange ich bereits ohne Benutzung von Kenntnissen aus der Idealtheorie. Man könnte auch, was ich nicht ausführe, durch Benutzung des Minkowskischen Linearformensatzes, der sich nach Hurwitz [3]) arithmetisch beweisen läßt, unter weiterer Verschlechterung der Schranken auf jedes Hilfsmittel der Infinitesimalrechnung verzichten, abgesehen höchstens von dem bei Hurwitz benutzten Grenzübergang von rationalen zu irrationalen Koeffizienten und der im Regulator steckenden Definition des Logarithmus.

Die Abschätzungen für die Idealklassenzahl, die Herr Landau am Schluß von L I gibt, bin ich nicht in der Lage zu verbessern. Ich möchte nur die folgende Bemerkung machen: Diese Abschätzungen setzen die Grundlagen der Idealtheorie als bekannt voraus. Andererseits leitet Minkowski im fünften Kapitel seiner „Diophantischen Approximationen" die grundlegenden Sätze der Idealtheorie aus der vorweg bewiesenen Endlichkeit der Idealklassenzahl her. Der Leser, der diesen Weg zur Begründung der Idealtheorie wählen will, ist also genötigt, sich zunächst im Anschluß an Minkowski mit einer sehr viel primitiveren Abschätzung der Idealklassenzahl zu begnügen, die ich hier ohne Beweis angeben will:

$$h \leqq \left(\sqrt{D}\left(\frac{4}{\pi}\right)^{s}\frac{n!}{n^n}\right)^{n^2+1}.$$

Hierin bedeutet s die Anzahl der Paare konjugiert komplexer Konjugierter. Erst wenn der Leser mit Hilfe dieser Abschätzung die Grundlagen der Idealtheorie gewonnen hat, kann er im Anschluß an Herrn Landau (L I) S. 95 zu dessen besserer Abschätzung

$$h = O\ (\sqrt{D} \cdot \log^{n-1} D)$$

übergehen.

In § 1 dieser Arbeit werde ich, ähnlich wie ich früher den Dirichletschen Beweis für die Existenz der Lösung der Pellschen Gleichung zu einer Abschätzung der Lösung ausgestaltet habe [4]), den Minkowskischen Existenzbeweis für die Einheiten eines algebraischen Zahlkörpers [5]) ausgestalten. Die gewonnene Abschätzung gilt für ein geeignetes System von solchen Einheiten, für die eine reelle Konjugierte bzw. ein Paar konjugiert komplexer Konjugierter absolut größer als Eins, die übrigen Konjugierten absolut kleiner als Eins sind, wobei jede reelle Konjugierte bzw. jedes Paar konjugiert komplexer Konjugierter ausgezeichnet sein kann. Ein solches System will ich für den Augenblick ein „ausgezeichnetes" System von Einheiten nennen. Ich nenne D die Körperdiskriminante, setze $\Delta = \sqrt{|D|}$,

$$\Delta^* = \frac{\Delta}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{s}},$$

wobei s die Anzahl der Paare konjugiert komplexer Konjugierter ist. Dann gilt für jede Konjugierte jeder Einheit eines in geeigneter Weise ermittelten Systems aus-

[3]) Göttinger Nachrichten 1897, S. 139—145.

[4]) Journ. f. Math. **143** (1913), S. 250—254.

[5]) Minkowski, Diophantische Approximationen, Leipzig 1907, S. 133—148.

gezeichneter Einheiten

$$|\log(|\varepsilon_\nu|^{\psi_\nu})| \leqq [\Delta^*]^{n+1} \cdot \log \Delta^* = P,$$

worin P zur Abkürzung eingeführt ist, $\psi_\nu = 1$ für reelle Konjugierte, $\psi_\nu = 2$ für komplexe Konjugierte. Diese Abschätzung ist wesentlich schlechter als die Abschätzung (1) aus L I, wird aber ohne idealtheoretische Hilfsmittel erhalten.

In § 2 zeige ich unter Verwendung der Hilfssätze des Herrn Landau aus L I, die die Grundlagen der Idealtheorie benutzen, daß für jede Konjugierte jeder Einheit eines in geeigneter Weise ermittelten Sytems ausgezeichneter Einheiten

$$|\log(|\varepsilon_\nu|^{\psi_\nu})| \leqq \frac{1}{(n-1)!}\,\Delta^* \cdot \log^{n-1}\Delta^* + b_2\,\Delta^* \cdot \log^{n-2}\Delta^* = Q.$$

Hierin ist b_2 eine nur von n abhängige Konstante, Q ist zur Abkürzung eingeführt. Für total reelle Körper, für die $s = 0$, $\Delta^* = \Delta$, ist dies gerade die Landausche Abschätzung (1); für $s > 0$ ist $\Delta^* < \Delta$.

In allen folgenden Abschätzungen kann ich immer im Anschluß an § 1 die Abschätzung P ohne Benutzung der Idealtheorie oder im Anschluß an § 2 die bessere Abschätzung Q mit Benutzung der Idealtheorie verwenden.

Von einem Fundamentalsystem von Einheiten verlangen wir, daß sich sämtliche Einheiten des Körpers als Produkte von Potenzen der Fundamentaleinheiten mit ganzzahligen positiven, 0 oder negativen Exponenten und von Einheitswurzeln des Körpers darstellen lassen. Da das gewonnene ausgezeichnete System von Einheiten, in dem eine Einheit fortgelassen wird, möglicherweise kein Fundamentalsystem ist, müssen wir vom ausgezeichneten System zum Fundamentalsystem übergehen.

Bevor ich darauf eingehe, beweise ich in § 3 zwei Hilfssätze, die die Nummer 2 und 3 tragen. Hilfssatz 2 bezieht sich auf solche Determinanten, deren Glieder reell, außerhalb der Hauptdiagonale < 0, in der Hauptdiagonale > 0, derart, daß die Zeilensummen > 0 sind. Von diesen Determinanten zeigt Minkowski[6]), daß sie stets positiv sind. Ich zeige, daß sie größer oder gleich dem Produkte der Zeilensummen und kleiner oder gleich dem Produkte der Hauptdiagonalglieder sind. Hilfssatz 2 folgt unmittelbar aus Hilfssatz 2 a, einem formalen Determinantensatz. Es sei in einer Determinante mit den Gliedern $a_{\varkappa\lambda}$ gesetzt: außerhalb der Hauptdiagonale

$$a_{\varkappa\lambda} = -\,b_{\varkappa\lambda},$$

in der Hauptdiagonale

$$a_{\varkappa\varkappa} = s_\varkappa + \sum_{\lambda=1}^{n} b_{\varkappa\lambda},$$

worin formal $b_{\varkappa\varkappa} = 0$. Dann denke man sich die Determinante nach den $b_{\varkappa\lambda}$ und den $s_\varkappa$ entwickelt. Die ausgerechnete Determinante hat 1) kein von den $s_\varkappa$ freies Glied, 2) enthält sie das Glied $s_1 s_2 \cdots s_n$, 3) entsteht sie aus dem Produkte $\prod_{\varkappa=1}^{n}(s_\varkappa + \sum_{\lambda=1}^{n} b_{\varkappa\lambda})$ durch bloße Streichung von Gliedern, woraus unmittelbar folgt, daß sie nur positive Glieder hat. Setzt man $b_{\varkappa\lambda} > 0$ für $\varkappa \neq \lambda$, ferner $s_\varkappa > 0$, so ist Hilfssatz 2 eine unmittelbare Folge von Hilfssatz 2 a.

Hilfssatz 3 bezieht sich auf die Theorie der Punktgitter. Gegeben sei ein Punktgitter $\mathfrak{G}$. Dieses sei Teilgitter eines engmaschigeren Gitters $\mathfrak{H}$. Aus einem Fundamentalsystem von Vektoren von $\mathfrak{G}$ erhält man ein Fundamentalsystem von $\mathfrak{H}$ durch eine

---

[6]) Göttinger Nachrichten 1900, S. 90—93 wieder abgedruckt, ges. Werke I, S. 316—319.

In letzter Zeit hat sich Herr Rohrbach mit anderen Eigenschaften dieser Determinanten beschäftigt: Jahresber. d. Deutsch. Math. Vereinig. **40** (1931), S. 49—53.

geeignete Substitution, deren Koeffizienten stets rationale Zahlen sind. Es entsteht die Aufgabe, ein solches Fundamentalsystem von $\mathfrak{H}$ zu finden, daß die Koeffizienten der Substitution absolut möglichst klein werden.

Diese Hilfssätze benutze ich in § 4, um den Regulator und ein geeignetes System von Fundamentaleinheiten abzuschätzen. Zur Abkürzung werde gesetzt: für die ausgezeichneten Einheiten

$$\log (|\varepsilon_\nu^{(\mu)}|^{w_\nu}) = l_\nu^{(\mu)},$$

für die Fundamentaleinheiten

$$\log (|\vartheta_\nu^{(\mu)}|^{w_\nu}) = r_\nu^{(\mu)}.$$

Die Determinanten vom Grade $r+s-1$ werden zur Abkürzung bezeichnet:

$$|l_\nu^{(\mu)}| = L, \qquad |r_\nu^{(\mu)}| = R.$$

Dann ist

$$L = CR,$$

wo C als Determinante einer Matrix mit ganzen rationalen Koeffizienten eine ganze rationale Zahl ist. Also ist

$$|R| \leqq |L|.$$

Auf L ist aber Hilfssatz 2 anwendbar, und man erhält

$$|R| \leqq L \leqq P^{r+s-1}.$$

Hilfssatz 3 liefert für ein geeignet bestimmtes Fundamentalsystem:

$$|r_\nu^{(1)}| \leqq P$$
$$|r_\nu^{(\lambda)}| \leqq \frac{\lambda}{2} P \qquad \text{für} \qquad 2 \leqq \lambda \leqq r+s-1.$$

Bei Benutzung von § 2 tritt überall Q an die Stelle von P.

§ 1.

Gegeben sei ein algebraischer Zahlkörper n-ten Grades. ξ_1 sei eine ihn erzeugende Zahl. Die sämtlichen Konjugierten von ξ_1 seien

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n.$$

Und zwar sei ξ_ϱ reell für $1 \leqq \varrho \leqq r$,

$$\bar{\xi}_{r+\sigma} = \xi_{r+\sigma+s} \qquad \text{für} \qquad 1 \leqq \sigma \leqq s, \tag{4}$$

wo $\bar{\alpha}$ die zu α konjugiert komplexe Zahl bedeutet. s bedeute die Anzahl der Paare konjugiert komplexer Konjugierter, so daß

$$r + 2s = n.$$

Wir ordnen ξ_1 die n Koordinaten zu:

$$\eta_\varrho = \xi_\varrho \qquad \text{für} \qquad \varrho \leqq r,$$
$$\eta_{r+\sigma} = \sqrt{2} \cdot \Re \xi_{r+\sigma},$$
$$\eta_{r+\sigma+s} = \sqrt{2} \cdot \Im \xi_{r+\sigma}, \qquad [7])$$

worin, wenn $c = a + bi$ ist, $a = \Re c$, $b = \Im c$ gesetzt ist.

---

[7]) Der Faktor $\sqrt{2}$ läßt sich durch folgende geometrische Überlegung rechtfertigen. Zunächst wird man die n komplexen Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ jede durch 2 Koordinaten darstellen, so daß die ganzen Zahlen des algebraischen Zahlkörpers n-ten Grades ein n-dimensionales Punktgitter im $2n$-dimensionalen Raume erfüllen. Im n-dimensionalen Raume dieses Punktgitters führt man neue rechtwinklige Koordinaten ein. Die Maßstabsvergrößerung im Verhältnis

Es sei $\omega_1^{(1)}, \omega_1^{(2)}, \ldots, \omega_1^{(n)}$ eine Minimalbasis der ganzen Zahlen des Zahlkörpers.

$$\begin{aligned} \eta_\varrho^{(\mu)} &= \omega_\varrho^{(\mu)} , \\ \eta_{r+\sigma}^{(\mu)} &= \sqrt{2} \cdot \Re \omega_{r+\sigma}^{(\mu)} , \\ \eta_{r+\sigma+s}^{(\mu)} &= \sqrt{2} \cdot \Im \omega_{r+\sigma}^{(\mu)} , \end{aligned}$$

definieren das Elementarparallelepiped des Punktgitters der ganzen Zahlen. Dann ist die Körperdiskriminante

$$D = |\omega_\nu^{(\mu)}|^2 .$$

Wir formen die Determinante $|\omega_\nu^{(\mu)}|$ um durch Addition von Zeilen zu Zeilen:

$$\sqrt{D} = |\omega_\nu^{(\mu)}| = \begin{vmatrix} \omega_\varrho^{(\mu)} \\ \omega_{r+\sigma}^{(\mu)} \\ \omega_{r+\sigma+s}^{(\mu)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_\varrho^{(\mu)} \\ 2\Re\omega_{r+\sigma}^{(\mu)} \\ \omega_{r+\sigma+s}^{(\mu)} \end{vmatrix} = 2^s \begin{vmatrix} \omega_\varrho^{(\mu)} \\ \Re\omega_{r+\sigma}^{(\mu)} \\ -i \cdot \Im\omega_{r+\sigma}^{(\mu)} \end{vmatrix} = (-i)^s \begin{vmatrix} \omega_\varrho^{(\mu)} \\ \sqrt{2} \cdot \Re\omega_{r+\sigma}^{(\mu)} \\ \sqrt{2} \cdot \Im\omega_{r+\sigma}^{(\mu)} \end{vmatrix} = (-i)^s |\eta_\nu^{(\mu)}| .$$

Es ist also

$$\Delta = |\sqrt{D}| = |\eta_\nu^{(\mu)}| .$$

Das Volumen des Elementarparallelepipeds ist bei unseren Festsetzungen gleich Δ.

Wir betrachten das Gebiet

$$|\xi_\nu| \leqq d_\nu , \tag{5}$$

worin $d_\nu > 0$ und zunächst $1 \leqq \nu \leqq r+s$. Setzen wir

$$d_{r+\sigma+s} = d_{r+\sigma} ,$$

so ist (5) wegen (4) von selbst für $\nu \leqq n$ erfüllt. Hierbei denken wir uns unter ξ einen Punkt mit irgendwelchen η_ν-Koordinaten, den wir nur der Bequemlichkeit halber durch die (4) genügenden ξ_ν-Koordinaten schreiben. Das Gebiet ist, wie gezeigt werden soll, ein konvexer Körper mit Mittelpunkt. Es ist das Minkowskische Eichmaß

$$S(\xi) = \operatorname*{Max}_{1 \leqq \nu = n} \frac{|\xi_\nu|}{d_\nu} .$$

Es ist

$$S(\xi) = S(-\xi) .$$

Wenn $t > 0$, so ist

$$S(t\xi) = t \cdot S(\xi) .$$

Wenn $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ die komplexen Koordinaten eines zweiten Punktes ζ, so ist

$$S(\xi+\zeta) = \operatorname*{Max}_{1 \leqq \nu \leqq n} \frac{|\xi_\nu + \zeta_\nu|}{d_\nu} = \frac{|\xi_\lambda + \zeta_\lambda|}{d_\lambda} \leqq \frac{|\xi_\lambda|}{d_\lambda} + \frac{|\zeta_\lambda|}{d_\lambda} \leqq \operatorname*{Max}_{1 \leqq \nu \leqq n} \frac{|\xi_\nu|}{d_\nu} + \operatorname*{Max}_{1 \leqq \nu \leqq n} \frac{|\zeta_\nu|}{d_\nu} = S(\xi) + S(\zeta) .$$

Damit ist die Konvexität und die Mittelpunktseigenschaft des durch dieses Eichmaß bestimmten Körpers (5) bewiesen.

In η_ν-Koordinaten lauten die Bedingungen

$$\begin{aligned} |\eta_\varrho| &\leqq d_\varrho && \text{für} \quad 1 \leqq \varrho \leqq r \\ \eta_{r+\sigma}^2 + \eta_{r+\sigma+s}^2 &= 2(\Re^2 \xi_{r+\sigma} + \Im^2 \xi_{r+\sigma}) = 2\,|\xi_{r+\sigma}|^2 \leqq 2 d_{r+\sigma}^2 && \text{für} \quad 1 \leqq \sigma \leqq s. \end{aligned}$$

$1 : \sqrt{2}$ bei den komplexen Konjugierten tritt dadurch auf, daß wir anstatt der 4 Koordinaten von $\xi_{r+\sigma}$ und $\xi_{r+\sigma+s}$ nur noch 2 einführen.

Das Volumen des Körpers ist also

$$V = 2d_1 \cdot 2d_2 \cdots 2d_r \cdot \pi \cdot 2d_{r+1}^2 \cdot \pi \cdot 2d_{r+2}^2 \cdots \pi \cdot 2d_{r+s}^2 = 2^{r+s} \cdot \pi^s \cdot d_1 d_2 \cdots d_n \ .$$

Setzen wir

$$\psi_\varrho = 1 \qquad \text{für} \qquad 1 \leqq \varrho \leqq r,$$
$$\psi_{r+\sigma} = 2 \qquad \text{für} \qquad 1 \leqq \sigma \leqq s,$$

so wird

$$V = 2^n \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^s \cdot d_1^{\psi_1} d_2^{\psi_2} \cdots d_{r+s}^{\psi_{r+s}} \ .$$

Um den Minkowskischen Satz vom konvexen Körper mit Mittelpunkt im Punktgitter [8]) anwenden zu können, müssen wir

$$V = 2^n \cdot \Delta$$

setzen, also

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^s d_1^{\psi_1} d_2^{\psi_2} \cdots d_{r+s}^{\psi_{r+s}} = \Delta \ . \tag{6}$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{\Delta}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^s} = \Delta^*,$$

so lautet (6)

$$d_1^{\psi_1} d_2^{\psi_2} \cdots d_{r+s}^{\psi_{r+s}} = \Delta^* \ . \tag{7}$$

Der Minkowskische Satz liefert also für jedes Wertsystem der $d_1, d_2, \ldots, d_{r+s}$, das der Bedingung (7) genügt, eine von 0 verschiedene ganze algebraische Zahl des Körpers, für die die Bedingungen (5) erfüllt sind. Für diese Zahl ist die absolut genommene Norm

$$|N(\xi_1)| = \prod_{\nu=1}^{n} |\xi_\nu| \leqq \prod_{\nu=1}^{n} d_\nu = \prod_{\nu=1}^{r+s} d_\nu^{\psi_\nu} = \Delta^* \ ,$$

also

$$|N(\xi_1)| \leqq \Delta^* \ .$$

Unser nächstes Ziel ist es, durch wiederholte Anwendung des Minkowskischen Satzes für verschiedene Systeme $d_\nu^{(\lambda)}$ uns ganze algebraische Zahlen $\xi_1^{(\lambda)}$ des Körpers in beliebig großer Anzahl zu verschaffen, die alle untereinander verschieden sind und den Bedingungen $|\xi_\nu^{(\lambda)}| \leqq d_\nu^{(\lambda)}$,

$$\mathsf{N}^{(\lambda)} = |N(\xi_1^{(\lambda)})| \leqq \Delta^* \tag{8}$$

genügen, wo $\mathsf{N}^{(\lambda)}$ zur Abkürzung eingeführt ist. Wir beginnen mit der ganzen algebraischen Zahl 1, setzen, da sämtliche konjugierte Zahlen von 1 wieder 1 sind,

$$\xi_\nu^{(0)} = 1 \ . \tag{9}$$

Es sei $0 < \delta < 1$ eine positive Zahl, die vorläufig festgehalten, später beliebig klein gemacht wird. Wir setzen für $2 \leqq \nu \leqq r + s$

$$d_\nu^{(\lambda+1)} = |\xi_\nu^{(\lambda)}| \cdot (1 - \delta) \ ,$$

also speziell für $2 \leqq \nu \leqq r + s$ mit Rücksicht auf (9)

$$d_\nu^{(1)} = 1 - \delta \ .$$

---

[8]) Minkowski, Diophantische Approximationen, Leipzig 1907, S. 60.

Dann müssen wir setzen, um (7) zu erfüllen:

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} d_1^{(\lambda+1)\psi_1} &= \frac{\Delta^*}{\prod_{\nu=2}^{r+s} d_\nu^{(\lambda+1)\psi_\nu}} = \frac{\Delta^*}{\prod_{\nu=2}^{r+s} (|\xi_\nu^{(\lambda)}|^{\psi_\nu}\cdot(1-\delta)^{\psi_\nu})} \\ &= \frac{\Delta^*\,|\xi_1^{(\lambda)}|^{\psi_1}}{\mathsf{N}^{(\lambda)}\cdot(1-\delta)^{n-\psi_1}} \leqq \frac{\Delta^*\cdot d_1^{(\lambda)\psi_1}}{(1-\delta)^{n-\psi_1}}\ . \end{aligned}\right.$$

Es ist für $2 \leqq \nu \leqq r+s$

$$(11)\qquad |\xi_\nu^{(\lambda+1)}| \leqq d_\nu^{(\lambda+1)} = |\xi_\nu^{(\lambda)}|\cdot(1-\delta) < |\xi_\nu^{(\lambda)}|\ .$$

Für $2 \leqq \nu \leqq r+s$ nehmen also die absoluten Beträge der ν-ten Konjugierten monoton ab. Es können also niemals zwei ganze algebraische Zahlen der Reihe übereinstimmen. Aus (10) folgt speziell für $\lambda = 0$ unter Benutzung des vorletzten Ausdrucks

$$d_1^{(1)\psi_1} = \frac{\Delta^*}{(1-\delta)^{n-\psi_1}}$$

und durch wiederholte Anwendung von (10) unter Berücksichtigung des letzten Ausdrucks

$$(12)\qquad d_1^{(\lambda)\psi_1} \leqq \left(\frac{\Delta^*}{(1-\delta)^{n-\psi_1}}\right)^\lambda\ .$$

Durch wiederholte Anwendung von (11) folgt für $2 \leqq \nu \leqq r+s$

$$(13)\qquad |\xi_\nu^{(\lambda+1)}| < |\xi_\nu^{(\lambda)}| < \cdots < |\xi_\nu^{(0)}| = 1\ .$$

Also ist, da die Norm $\mathsf{N}^{(\lambda)} \geqq 1$,

$$(14)\qquad |\xi_1^{(\lambda)}| > 1\ .$$

Aus (12) folgt

$$(15)\qquad |\xi_1^{(\lambda)}|^{\psi_1} \leqq d_1^{(\lambda)\psi_1} \leqq \left(\frac{\Delta^*}{(1-\delta)^{n-\psi_1}}\right)^\lambda.$$

Hilfssatz 1: *Voraussetzung: Es sei*

$$|N(\xi_1^{(\lambda)})| = |N(\xi_1^{(\mu)})| = \mathsf{N}\,,$$
$$\xi_1^{(\lambda)} - \xi_1^{(\mu)} = \mathsf{N}\omega\,,$$

worin ω eine ganze algebraische Zahl des Körpers.

Behauptung:

$$(16)\qquad \frac{\xi_1^{(\lambda)}}{\xi_1^{(\mu)}} = \varepsilon_1$$

ist eine Einheit des Körpers.

Beweis: Es ist

$$(17)\qquad \frac{\mathsf{N}}{\xi_1^{(\lambda)}} = \pm\,\xi_2^{(\lambda)}\xi_3^{(\lambda)}\cdots\xi_n^{(\lambda)} = \Xi_1^{(\lambda)}$$

mit Rücksicht auf die erste Seite von (17) eine Zahl des Körpers von $\xi_1^{(\lambda)}$ und mit Rücksicht auf die zweite Seite eine ganze algebraische Zahl, ebenso

$$\frac{\mathsf{N}}{\xi_1^{(\mu)}} = \Xi_1^{(\mu)}\,.$$

Es ist

$$\xi_1^{(\lambda)} = \xi_1^{(\mu)} + \mathsf{N}\omega = \xi_1^{(\mu)}(1 + \Xi_1^{(\mu)}\omega) = \xi_1^{(\mu)}\varepsilon_1\ ;$$

also ist

$$\frac{\xi_1^{(\lambda)}}{\xi_1^{(\mu)}} = \varepsilon_1$$

eine ganze algebraische Zahl. Ebenso kann man aber zeigen, daß

$$\frac{\xi_1^{(\mu)}}{\xi_1^{(\lambda)}} = \frac{1}{\varepsilon_1}$$

eine ganze algebraische Zahl. Also ist ε_1 eine Einheit, was zu beweisen war.

In Worten lautet Hilfssatz 1: *Der Quotient zweier ganzer algebraischer Zahlen eines Körpers, die die gleiche absolut genommene Norm* N *haben und nach* N *der gleichen Restklasse angehören, ist eine Einheit.*

Für $\mathsf{N}^{(\lambda)}$ kommen bei dem angegebenen Verfahren nur endlich viele Werte in Betracht, nämlich $1, 2, \ldots, [\Delta^*]$. Die Anzahl aller Restklassen nach diesen $[\Delta^*]$ verschiedenen Moduln ist also

$$1^n + 2^n + \cdots + [\Delta^*]^n < [\Delta^*]^{n+1} .$$

Setzt man das Verfahren fort bis

$$\lambda = \Lambda = [\Delta^*]^{n+1} , \tag{18}$$

so müssen mindestens zwei Zahlen, $\xi_1^{(\lambda)}$ und $\xi_1^{(\mu)}$, mit

$$\lambda < \mu \leqq \Lambda \tag{19}$$

vorkommen, so daß

$$\mathsf{N}^{(\lambda)} = \mathsf{N}^{(\mu)} = \mathsf{N}$$

und

$$\xi_1^{(\lambda)} - \xi_1^{(\mu)} = \mathsf{N}\omega .$$

Dann ist aber

$$\frac{\xi_1^{(\mu)}}{\xi_1^{(\lambda)}} = \varepsilon_1$$

eine Einheit nach Hilfssatz 1. Es ist für $2 \leqq \nu \leqq r + s$

$$|\varepsilon_\nu| = \frac{|\xi_\nu^{(\mu)}|}{|\xi_\nu^{(\lambda)}|} < 1$$

wegen (13). Da

$$|N(\varepsilon_1)| = |\varepsilon_1|^{\psi_1} |\varepsilon_2|^{\psi_2} \cdots |\varepsilon_{r+s}|^{\psi_{r+s}} = 1 ,$$

so muß

$$|\varepsilon_1| > 1$$

sein.

Es ist wegen (14), (15), (19), (18)

$$\left\{ \begin{aligned} |\varepsilon_1|^{\psi_1} &= \frac{|\xi_1^{(\mu)}|^{\psi_1}}{|\xi_1^{(\lambda)}|^{\psi_1}} < |\xi_1^{(\mu)}|^{\psi_1} \leqq d^{(\mu)\psi_1} \leqq \left(\frac{\Delta^*}{(1-\delta)^{n-\psi_1}}\right)^{\mu} \\ &\leqq \left(\frac{\Delta^*}{(1-\delta)^{n-\psi_1}}\right)^{[\Delta^*]^{n+1}} . \end{aligned} \right. \tag{20}$$

Da im Bereiche

$$|\xi_1|^{\psi_1} \leqq \left(\frac{\Delta^*}{(1-\delta_0)^{n-\psi_1}}\right)^{[\Delta^*]^{n+1}}, \qquad |\xi_\nu| < 1$$

für ein festes $\delta_0 < 1$ nur endlich viele ganze algebraische Zahlen liegen, so können, wenn wir (20) nach dem angegebenen Verfahren lösen, für eine unendliche Reihe $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots$, die gegen 0 abnimmt, die Lösungen nicht alle verschieden sein; eine Lösung muß also unendlich oft vorkommen, also für beliebig kleine δ gelten. Für diese Lösung ist also

$$|\varepsilon_1|^{\psi_1} \leqq \Delta^{*[\Delta^*]^{n+1}}$$

$$\log(|\varepsilon_1|^{\psi_1}) \leqq [\Delta^*]^{n+1} \cdot \log \Delta^* = P, \tag{21}$$

wo P zur Abkürzung eingeführt ist;

$$|\varepsilon_\nu| < 1$$

für $2 \leqq \nu \leqq r+s$.

Wir haben also eine Einheit gewonnen, bei der eine reelle Konjugierte bzw. ein Paar konjugiert komplexer Konjugierter absolut größer als 1, alle übrigen Konjugierten absolut kleiner als 1 sind. Anstatt $\xi_1^{(\lambda)}$ hätten wir ebenso gut irgendein $\xi_\varrho^{(\lambda)}$, wo $1 \leqq \varrho \leqq r+s$, bevorzugen können, die betreffende reelle Konjugierte bzw. das betreffende Paar konjugiert komplexer Konjugierter absolut größer als 1, alle übrigen Konjugierten absolut kleiner als 1 machen können. Ein derartiges System von Einheiten möge ein „ausgezeichnetes" System heißen.

§ 2.

Nachdem in § 1 ein System von Einheiten ohne idealtheoretische Hilfsmittel im Anschluß an Minkowski abgeschätzt worden ist, will ich in diesem Paragraphen im Anschluß an die Landausche Arbeit L I [9]) zeigen, wie man unter Benutzung der Grundlagen der Idealtheorie zu besseren Abschätzungen gelangt.

Unter zwei assoziierten Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers versteht man zwei ganze Zahlen des Körpers, deren Quotient eine Einheit ist. Zwei assoziierte Zahlen definieren dasselbe Hauptideal. Wir erhalten in der Reihe der $\xi_1^{(\lambda)}$ des vorigen Paragraphen als Quotienten eine Einheit, sobald zwei assoziierte Zahlen in der Reihe auftreten. Die Anzahl der nicht assoziierten $\xi_1^{(\lambda)}$, die in der Reihe auftreten können, ist höchstens gleich der Anzahl der verschiedenen Hauptideale des Zahlkörpers, deren absolut genommene Norm $\leqq [\Delta^*]$. Diese wieder ist kleiner oder gleich der Anzahl der verschiedenen Ideale des Zahlkörpers, deren Norm $\leqq [\Delta^*]$.

Wir bemerken, daß wir in (10) vorsichtiger rechnen können und zum Schluß die ganze rationale Zahl $\mathsf{N}^{(\lambda)}$ im Nenner stehen lassen; dann erhalten wir

$$d_1^{(\lambda+1)\psi_1} \leqq \frac{\Delta^*}{\mathsf{N}^{(\lambda)} \cdot (1-\delta)^{n-\psi_1}} \cdot d_1^{(\lambda)\psi_1} = B_\lambda \cdot d_1^{(\lambda)\psi_1},$$

wo B_λ zur Abkürzung eingeführt ist. Nach (8) ist $\mathsf{N}^{(\lambda)} \leqq \Delta^*$, also

$$B_\lambda \geqq \frac{1}{(1-\delta)^{n-\psi_1}} > 1 .$$

Anstatt (12) erhalten wir

$$d_1^{(\lambda)\psi_1} \leqq d_1^{(\mu+1)\psi_1} \prod_{\varrho=\mu+1}^{\lambda-1} B_\varrho ,$$

[9]) Siehe l. c. Anm. 1.

und wenn wir (10) noch einmal anwenden, aber unter Benutzung des vorletzten Ausdrucks,

$$d_1^{(\lambda)\psi_1} \leqq |\xi_1^{(\mu)}|^{\psi_1} \cdot \prod_{\varrho=\mu}^{\lambda-1} B_\varrho \ .$$

Wir erhalten zum ersten Male eine Einheit in der Form (16), wenn $\xi_1^{(\lambda)}$ und $\xi_1^{(\mu)}$ assoziiert sind. Die Anzahl $\lambda - \mu$ der auf μ folgenden $\xi_1^{(\sigma)}$ kann höchstens gleich der Anzahl der nicht assoziierten Hauptideale mit Norm $\leqq \Delta^*$ sein; wir vergrößern weiter, wenn wir alle Ideale $\mathfrak{a}$ mit Norm $N(\mathfrak{a}) \leqq \Delta^*$ berücksichtigen. Es ergibt sich

$$|\varepsilon_1|^{\psi_1} = \frac{|\xi_1^{(\lambda)}|^{\psi_1}}{|\xi_1^{(\mu)}|^{\psi_1}} \leqq \frac{d_1^{(\lambda)\psi_1}}{|\xi_1^{(\mu)}|^{\psi_1}} \leqq \prod_{\varrho=\mu}^{\lambda-1} B_\varrho \leqq \prod_{N(\mathfrak{a}) \leqq \Delta^*} \frac{\Delta^*}{N(\mathfrak{a}) \cdot (1-\delta)^{n-\psi_1}} \ ;$$

$$\text{(22)} \qquad \log\left(|\varepsilon_1|^{\psi_1}\right) \leqq \log\left(\frac{1}{1-\delta}\right) \cdot (n-\psi_1) \cdot \sum_{N(\mathfrak{a}) \leqq \Delta^*} 1 + \sum_{N(\mathfrak{a}) \leqq \Delta^*} \log \frac{\Delta^*}{N(\mathfrak{a})} \ .$$

$N(\mathfrak{a}) \leqq \Delta^*$ bedeutet die Summation über alle verschiedenen Ideale des Körpers, deren Norm $\leqq \Delta^*$.

Wir folgen nunmehr der Arbeit L I von Hilfssatz 1 bis 4, S. 89—91. (Die Kenntnis der vorangehenden Teile von L I ist hierzu nicht nötig.)

In Hilfssatz 1 zeigt Herr Landau, daß, wenn $F(m)$ die Anzahl der Darstellungen einer positiven ganzen rationalen Zahl m als Norm eines Ideals in einem algebraischen Zahlkörper n-ten Grades und $T(m)$ die Anzahl der Darstellungen von m als Produkt von n positiven ganzen rationalen Faktoren bedeutet,

$$F(m) \leqq T(m).$$

In Hilfssatz 2 summiert er über alle $m \leqq x$. Wenn $H(x)$ die Anzahl der Ideale mit Norm $\leqq x$ bedeutet, so ist

$$H(x) = \sum_{m=1}^{[x]} F(m) \leqq \sum_{m=1}^{[x]} T(m) = \tau(x) \leqq \frac{1}{(n-1)!} x \log^{n-1} x + b_1 x \log^{n-2} x + 1,$$

worin b_1 eine nur von n abhängige Zahl ist.

In Hilfssatz 4 beweist Herr Landau

$$M(x) = \sum_{N(\mathfrak{a}) \leqq x} \log \frac{x}{N(\mathfrak{a})} \leqq \frac{1}{(n-1)!} x \cdot \log^{n-1} x + b_1 x \cdot \log^{n-2} x + \log x.$$

In diesen Bezeichnungen lautet (22)

$$\log |\varepsilon_1|^{\psi_1} \leqq \log\left(\frac{1}{1-\delta}\right) \cdot (n-\psi_1) \cdot H(\Delta^*) + M(\Delta^*).$$

Da dies für jedes beliebig kleine δ gilt, so ist auch

$$\text{(23)} \quad \begin{cases} \log\left(|\varepsilon_1|^{\psi_1}\right) \leqq M(\Delta^*) \leqq \dfrac{1}{(n-1)!} \Delta^* \cdot \log^{n-1} \Delta^* + b_1 \Delta^* \cdot \log^{n-2} \Delta^* + \log \Delta^* \\ \qquad\qquad \leqq \dfrac{1}{(n-1)!} \Delta^* \cdot \log^{n-1} \Delta^* + b_5 \Delta^* \cdot \log^{n-2} \Delta^* = Q, \end{cases}$$

wo b_5 nur von n abhängt und Q zur Abkürzung eingeführt ist. Es stimmt dies im wesentlichen überein mit dem Ergebnis (1) (L I S. 95). Es war $\Delta^* = \dfrac{|\sqrt{D}|}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^s}$. Für total reelle Körper ist $s = 0$, also $\Delta^* = \sqrt{D}$; die Ergebnisse stimmen genau überein. Für nicht total reelle Körper ist $\Delta^* < |\sqrt{D}|$.

Außerdem haben wir ein System von $r + s$ Einheiten gewonnen, bei dem jedesmal eine andere reelle Konjugierte bzw. ein anderes Paar konjugiert komplexer Konjugierter

ausgezeichnet ist, derart, daß die ausgezeichneten Konjugierten absolut > 1, die übrigen Konjugierten < 1 sind. Sie mögen mit

$$\varepsilon_1^{(1)}, \quad \varepsilon_1^{(2)}, \ldots, \varepsilon_1^{(r+s)}$$

bezeichnet werden.

Es soll im übernächsten Paragraphen gezeigt werden, daß, wenn man aus diesem System eine Einheit fortläßt, ein System von *unabhängigen* Einheiten entsteht, d. h. von solchen, zwischen denen keine Beziehung

$$\sum_{\mu=1}^{r+s-1} \xi_\mu \log |\varepsilon_\nu^{(\mu)}| = 0$$

mit reellen ξ_μ, die nicht sämtlich $= 0$, für alle $r + s$ Konjugierten besteht.

Genau wie am Schluß des vorigen Paragraphen schließen wir, da das ε_1, das (23) genügt, schon für ein endliches δ erreicht wird,

$$|\varepsilon_\nu| < 1 \qquad \text{für} \qquad 2 \leqq \nu \leqq r + s.$$

§ 3.

Wir beweisen zunächst einen Hilfssatz aus der Determinantentheorie über eine spezielle Klasse von Determinanten, die auch Minkowski betrachtet hat [10]).

Es sei

$$a_{\varkappa\lambda} \leqq 0 \quad \text{für} \quad \varkappa \neq \lambda, \qquad s_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\varkappa\lambda} \geqq 0.$$

Wenn die Determinante $D = |a_{\varkappa\lambda}|$, so ist

$$\prod_{\varkappa=1}^{n} s_\varkappa \leqq D \leqq \prod_{\varkappa=1}^{n} a_{\varkappa\varkappa}.$$

In Worten lautet

Hilfssatz 2: *In einer Determinante seien außerhalb der Hauptdiagonale alle Glieder negativ oder* 0, *die Hauptdiagonalglieder positiv oder* 0, *und zwar überwiegend, so daß die Zeilensummen noch positiv oder* 0 *sind; dann ist die Determinante größer oder gleich* 0, *und zwar größer oder gleich dem Produkte der Zeilensummen und kleiner oder gleich dem Produkte der Hauptdiagonalglieder.*

Wir werden diesen Satz als spezielle Folgerung aus folgendem formalen Determinantensatz erhalten.

Hilfssatz 2 a: *Es werde formal* $b_{\varkappa\varkappa} = 0$ *gesetzt und eine Determinante gebildet, in der*

$$a_{\varkappa\lambda} = -b_{\varkappa\lambda} \quad \text{für} \quad \varkappa \neq \lambda, \qquad a_{\varkappa\varkappa} = s_\varkappa + \sum_{\lambda=1}^{n} b_{\varkappa\lambda}.$$

Denkt man sich diese Ausdrücke in die Determinante eingesetzt und diese nach den $s_\varkappa$ *und den* $b_{\varkappa\lambda}$ *entwickelt, wobei die* $b_{\varkappa\varkappa}$ *nicht vorkommen, so entsteht ein Ausdruck für D mit folgenden Eigenschaften:*

1. *D enthält kein von den* $s_\varkappa$ *freies Glied.*
2. *D enthält das Glied* $s_1 s_2 \cdots s_n$.
3. *Bezeichnet*

$$\Pi = \prod_{\varkappa=1}^{n} \left(s_\varkappa + \sum_{\lambda=1}^{n} b_{\varkappa\lambda}\right)$$

das formal gebildete Produkt der Hauptdiagonalglieder, so kann man D durch Streichung geeigneter Glieder aus Π *erhalten, woraus unmittelbar folgt, daß D nur positive Glieder enthält.*

---

[10]) Siehe l. c. Anm. 6.

Beweis: Es bezeichne D_0 den von den $s_\varkappa$ freien Teil der Entwicklung von D, den man erhält, wenn man sämtliche $s_\varkappa = 0$ setzt. In D_0 sind aber sämtliche Zeilensummen gleich 0, also ist $D_0 = 0$, d. h. sämtliche von den $s_\varkappa$ freien Glieder heben sich bei der Ausrechnung von D fort. Das ist Behauptung 1. Um die Behauptung 2 zu beweisen, setzen wir sämtliche $b_{\varkappa\lambda} = 0$. Man erhält die Determinante einer Diagonalmatrix, die gleich $s_1 s_2 \cdots s_n$ ist. Dies Produkt kommt also in der Entwicklung von D vor.

Die Behauptung 3 soll durch Induktion bewiesen werden. Man ordne D nach den Produkten der $s_\varkappa$, ebenso Π. Behauptung 3 wird also bewiesen sein, wenn gezeigt ist, daß der nur von den $b_{\varkappa\lambda}$ abhängige Faktor irgendeines Produktes $s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \cdots s_{\alpha_p}$, worin $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p$, in D durch Streichung von Gliedern aus dem entsprechenden Faktor in Π entsteht. $s_1 s_2 \cdots s_n$ kommt sowohl in D wie in Π vor. Die von den $s_\varkappa$ freien Glieder in Π sind sämtlich zu streichen, da sie in D nicht vorkommen. Es bleibt der nur von den $b_{\varkappa\lambda}$ abhängige Faktor von $s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \cdots s_{\alpha_p}$ für $1 \leqq p \leqq n-1$ in D zu vergleichen mit dem entsprechenden Faktor in Π. Der Faktor in D ist gleich der Hauptunterdeterminante von D mit den Zeilen und Spalten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$, die von den $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ verschieden sind, mit $p + q = n$, in der die $s_{\beta_\varrho} = 0$ gesetzt sind. Von dieser Unterdeterminante, die $D_{0,q}$ heißen möge, wollen wir zeigen, daß sie von gleichem Typus wie die gegebene Determinante ist. Es ist

$$a_{\beta_\varrho, \beta_\varrho} = \sum_{\lambda=1}^{n} b_{\beta_\varrho, \lambda} = \sum_{\pi=1}^{p} b_{\beta_\varrho, \alpha_\pi} + \sum_{\sigma=1}^{q} b_{\beta_\varrho, \beta_\sigma} = s'_{\beta_\varrho} + \sum_{\sigma=1}^{q} b_{\beta_\varrho, \beta_\sigma} .$$

Es ist die Zeilensumme in $D_{0,q}$

$$\sum_{\sigma=1}^{q} a_{\beta_\varrho, \beta_\sigma} = a_{\beta_\varrho, \beta_\varrho} - \sum_{\sigma=1}^{q} b_{\beta_\varrho, \beta_\sigma} = s_{\beta_\varrho} .$$

Die Summen s'_{β_ϱ} treten hier an die Stelle der Zeilensummen. Wenden wir nun die für kleinere Grade als n bereits bewiesene Behauptung 3 an, so ergibt sich, daß $D_{0,q}$ aus dem entsprechenden Teilprodukte von Π, daß wir $\Pi_{0,q}$ nennen wollen, durch Streichung von Gliedern entsteht. In $\Pi_{0,q}$ sind die alten s_{β_ϱ} gleich 0 gesetzt. Ihre Rolle übernehmen jetzt die Summen s'_{β_ϱ}, die also zunächst in $D_{0,q}$ und in $\Pi_{0,q}$ wie ein Buchstabe zu behandeln sind. Die Aussage, daß $D_{0,q}$ aus $\Pi_{0,q}$ durch Streichung von Gliedern entsteht, bleibt aber richtig, wenn man die s'_{β_ϱ} wieder in ihre einzelnen Summanden auflöst. Es ist

$$\Pi_{0,q} = \prod_{\varrho=1}^{q} (s'_{\beta_\varrho} + \sum_{\sigma=1}^{q} b_{\beta_\varrho, \beta_\sigma}) = \prod_{\varrho=}^{q} (\sum_{\lambda=1}^{n} b_{\beta_\varrho, \lambda}) .$$

Das ist aber der von den $s_\varkappa$ unabhängige Faktor genau des Produktes $s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \cdots s_{\alpha_p}$ in Π. Da der Satz für $n = 1$ richtig ist, so ist damit für den ganzen Ausdruck D bewiesen, daß er aus dem Ausdruck Π durch Streichung von Gliedern entsteht. Hieraus folgt insbesondere, daß D nur positive Glieder enthält.

In Hilfssatz 2 werden solche Determinanten betrachtet, für die $s_\varkappa \geqq 0$, $b_{\varkappa\lambda} \geqq 0$; dann ergibt sich aus Hilfssatz 2a unmittelbar:

$$0 \leqq s_1 s_2 \cdots s_n \leqq D \leqq a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} .$$

Hilfssatz 3: Wir wollen nunmehr folgende Aufgabe behandeln: In einem Raume mit n Cartesischen Koordinaten seien m Punkte

$$\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \ldots, \mathfrak{u}_m$$

gegeben, wobei $m \leqq n$, deren Koordinaten als Vektoren vom Nullpunkte aus geschrieben seien. Es bestehe zwischen ihnen keine Relation

$$\alpha_1 \mathfrak{u}_1 + \alpha_2 \mathfrak{u}_2 + \cdots + \alpha_m \mathfrak{u}_m = 0$$

mit reellen α_μ, die nicht sämtlich $= 0$, d. h. die von den m Vektoren bestimmte, durch den Nullpunkt gehende Hyperebene hat nicht weniger als m Dimensionen. Die ganzzahligen Verbindungen

$$\mathfrak{y} = x_1 \mathfrak{u}_1 + x_2 \mathfrak{u}_2 + \cdots + x_m \mathfrak{u}_m ,$$

wo die x_μ ganze rationale Zahlen, definieren ein Punktgitter $\mathfrak{G}$. Dieses Punktgitter sei eine Teilmenge einer Punktmenge $\mathfrak{H}$, die im gleichen m-dimensionalen Raum liegt, d. h. in der Form

$$\mathfrak{z} = \xi_1 \mathfrak{u}_1 + \xi_2 \mathfrak{u}_2 + \cdots + \xi_m \mathfrak{u}_m$$

mit reellen ξ_μ darstellbar ist, sich durch Addition und Subtraktion reproduziert, d. h. wenn

$$\mathfrak{z}_1 < \mathfrak{H} , \qquad \mathfrak{z}_2 < \mathfrak{H} ,$$

so ist auch

$$\mathfrak{z}_1 \pm \mathfrak{z}_2 < \mathfrak{H} ,$$

die außerdem keinen Häufungspunkt im Endlichen besitzt. Dann soll der an sich bekannte Satz noch einmal bewiesen werden, daß die Punktmenge $\mathfrak{H}$ ebenfalls ein Punktgitter ist, für das sich eine Basis aufstellen läßt, so daß sämtliche $\mathfrak{z} < \mathfrak{H}$ sich darstellen lassen in der Form

$$\mathfrak{z} = t_1 \mathfrak{v}_1 + t_2 \mathfrak{v}_2 + \cdots + t_m \mathfrak{v}_m .$$

Hierin sind die $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \ldots, \mathfrak{v}_m$ die Basisvektoren von $\mathfrak{H}$, die $t_1, t_2, \ldots, t_m$ sind ganze rationale Zahlen. Dann ist

$$\mathfrak{v}_\varrho = \sum_{\mu=1}^{m} \beta_{\varrho\mu} \mathfrak{u}_\mu . \tag{24}$$

Wir stellen uns die Aufgabe, eine solche spezielle Basis $\mathfrak{w}_\lambda$ zu finden, daß, wenn

$$\mathfrak{w}_\lambda = \sum_{\sigma=1}^{\lambda} \delta_{\lambda\sigma} \mathfrak{u}_\sigma ,$$

die $\delta_{\lambda\sigma}$ absolut möglichst kleine Zahlen werden.

Unter allen Punkten $\mathfrak{z} < \mathfrak{H}$, die die Form haben

$$\mathfrak{z} = \xi_1 \mathfrak{u}_1 \tag{25}$$

wo $\xi_1 > 0$ eine reelle Zahl, muß es einen mit kleinstem ξ_1 geben. Wäre das nicht der Fall, so würden sich die Punkte von $\mathfrak{H}$ gegen den Nullpunkt häufen. Es sei also $\mathfrak{v}_1 < \mathfrak{H}$,

$$\mathfrak{v}_1 = \beta_{11} \mathfrak{u}_1 ,$$

wo $\beta_{11} > 0$ der kleinstmögliche Wert. Ich behaupte, alle $\mathfrak{z} < \mathfrak{H}$ von der Form (25) sind von der Form

$$\mathfrak{z} = t_1 \mathfrak{v}_1 \tag{26}$$

mit ganzzahligem t_1. Angenommen, das sei nicht der Fall; es sei

$$\mathfrak{z} = \tau_1 \mathfrak{v}_1 < \mathfrak{H} ,$$

wo τ_1 nicht ganzzahlig. Dann sei

$$t_1 < \tau_1 < t_1 + 1 ,$$

also

$$0 < \tau_1 - t_1 < 1 . \tag{27}$$

Dann ist

$$\mathfrak{z} - t_1 \mathfrak{v}_1 < \mathfrak{H} ;$$
$$\mathfrak{z} - t_1 \mathfrak{v}_1 = \tau_1 \mathfrak{v}_1 - t_1 \mathfrak{v}_1 = (\tau_1 - t_1) \mathfrak{v}_1 = (\tau_1 - t_1) \beta_{11} \mathfrak{u}_1 .$$

Wegen (27) ist aber

$$0 < (\tau_1 - t_1)\beta_{11} < \beta_{11} ,$$

was der Definition von β_{11} widerspricht. Es sind also alle $\mathfrak{z} < \mathfrak{H}$ von der Form (26) mit ganzzahligem t_1. Speziell ist also auch

$$\mathfrak{u}_1 = \frac{\mathfrak{v}_1}{\beta_{11}} = c_{11}\mathfrak{v}_1 ,$$

wo c_{11} eine positive ganze Zahl. Es ist also

$$\beta_{11} = \frac{1}{c_{11}}$$

die Reziproke einer positiven ganzen Zahl.

Es sei bereits bewiesen, daß sämtliche Vektoren $\mathfrak{z} < \mathfrak{H}$, die sich in der Form

$$\mathfrak{z} = \xi_1\mathfrak{u}_1 + \xi_2\mathfrak{u}_2 + \cdots + \xi_\mu\mathfrak{u}_\mu$$

mit reellen ξ_ϱ darstellen lassen, sich auch darstellen lassen in der Form

$$\mathfrak{z} = t_1\mathfrak{v}_1 + t_2\mathfrak{v}_2 + \cdots + t_\mu\mathfrak{v}_\mu$$

mit ganzem rationalen t_ϱ, so daß

$$\mathfrak{v}_\varrho = \sum_{\sigma=1}^{\varrho} \beta_{\varrho\sigma}\mathfrak{u}_\sigma ,$$

und $\beta_{\varrho\varrho} > 0$ die Reziproke einer ganzen rationalen Zahl. Dasselbe soll für $\mu + 1$ bewiesen werden. Es sei

(28) $$\mathfrak{z} = \xi_1\mathfrak{u}_1 + \xi_2\mathfrak{u}_2 + \cdots + \xi_\mu\mathfrak{u}_\mu + \xi_{\mu+1}\mathfrak{u}_{\mu+1} .$$

Es sei x_ϱ eine ganze rationale Zahl, so daß

(29) $$x_\varrho \leqq \xi_\varrho < x_\varrho + 1 \quad \text{für} \quad \varrho = 1, 2, \ldots, \mu + 1;$$

also

(30) $$0 \leqq \xi_\varrho - x_\varrho = \eta_\varrho < 1 ,$$

wo η_ϱ zur Abkürzung eingeführt ist. Dann ist

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{z} - x_1\mathfrak{u}_1 - x_2\mathfrak{u}_2 - \cdots - x_\mu\mathfrak{u}_\mu - x_{\mu+1}\mathfrak{u}_{\mu+1} < \mathfrak{H}$$

wo $\mathfrak{r}$ zur Abkürzung eingeführt ist. Also ist wegen (28)

$$\mathfrak{r} = \eta_1\mathfrak{u}_1 + \eta_2\mathfrak{u}_2 + \cdots + \eta_\mu\mathfrak{u}_\mu + \eta_{\mu+1}\mathfrak{u}_{\mu+1} .$$

Wegen (30) gehören sämtliche $\mathfrak{r}$ einem beschränkten Gebiete des Raumes an. Es kann also nach der Voraussetzung die Punktmenge $\mathfrak{H}$ nur endlich viele $\mathfrak{r}$ enthalten. Es sei unter diesen endlich vielen $\mathfrak{r}$ ein solches ausgewählt, für das $\eta_{\mu+1} > 0$ einen kleinstmöglichen Wert hat. Dieses heiße

$$\mathfrak{v}_{\mu+1} = \beta_{\mu+1,1}\mathfrak{u}_1 + \beta_{\mu+1,2}\mathfrak{u}_2 + \cdots + \beta_{\mu+1,\mu}\mathfrak{u}_\mu + \beta_{\mu+1,\mu+1}\mathfrak{u}_{\mu+1} .$$

Es soll gezeigt werden, daß für alle $\mathfrak{z}$ von der Form (28) $\xi_{\mu+1}$ ein ganzzahliges Vielfaches von $\beta_{\mu+1,\mu+1}$ ist. Angenommen, das sei nicht der Fall, so sei

$$t_{\mu+1}\beta_{\mu+1,\mu+1} < \xi_{\mu+1} < (t_{\mu+1} + 1)\beta_{\mu+1,\mu+1}$$

mit ganzzahligem $t_{\mu+1}$, also

(31) $$0 < \xi_{\mu+1} - t_{\mu+1}\beta_{\mu+1,\mu+1} < \beta_{\mu+1,\mu+1} .$$

Dann wäre

(32) $$\mathfrak{z} - t_{\mu+1}\mathfrak{v}_{\mu+1} = \xi'_1\mathfrak{u}_1 + \xi'_2\mathfrak{u}_2 + \cdots + \xi'_{\mu+1}\mathfrak{u}_{\mu+1} ,$$

worin

(33) $$\xi'_{\mu+1} = \xi_{\mu+1} - t_{\mu+1}\beta_{\mu+1,\mu+1} ,$$

also nach (31)

$$0 < \xi'_{\mu+1} < \beta_{\mu+1,\mu+1} \quad (34)$$

Definiert man für $\varrho = 1, 2, \ldots, \mu$ zu ξ'_ϱ die ganze Zahl x'_ϱ und den Rest η'_ϱ analog (29), (30), so wäre

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{z} - t_{\mu+1}\mathfrak{v}_{\mu+1} - x'_1\mathfrak{u}_1 - x'_2\mathfrak{u}_2 - \cdots - x'_\mu\mathfrak{u}_\mu < \mathfrak{H}$$
$$\mathfrak{r}' = \eta'_1\mathfrak{u}_1 + \eta'_2\mathfrak{u}_2 + \cdots + \eta'_\mu\mathfrak{u}_\mu + \xi'_{\mu+1}\mathfrak{u}_{\mu+1} .$$

Die Existenz eines derartigen $\mathfrak{r}'$ würde wegen (34) der Definition von $\beta_{\mu+1,\mu+1}$ widersprechen. Es ist also

$$\xi_{\mu+1} = t_{\mu+1}\beta_{\mu+1,\mu+1} , \quad (35)$$

wo $t_{\mu+1}$ eine ganze rationale Zahl. Dann wird in (33) $\xi'_{\mu+1} = 0$, also in (32)

$$\mathfrak{z} - t_{\mu+1}\mathfrak{v}_{\mu+1} = \xi'_1\mathfrak{u}_1 + \xi'_2\mathfrak{u}_2 + \cdots + \xi'_\mu\mathfrak{u}_\mu = \mathfrak{z}' ,$$

wo $\mathfrak{z}'$ zur Abkürzung eingeführt ist. Nach dem für μ bereits bewiesenen Satze ist aber

$$\mathfrak{z}' = t_1\mathfrak{v}_1 + t_2\mathfrak{v}_2 + \cdots t_\mu\mathfrak{v}_\mu$$

mit ganzzahligen t_ϱ, mithin

$$\mathfrak{z} = t_{\mu+1}\mathfrak{v}_{\mu+1} + \mathfrak{z}' = t_1\mathfrak{v}_1 + t_2\mathfrak{v}_2 + \cdots + t_\mu\mathfrak{v}_\mu + t_{\mu+1}\mathfrak{v}_{\mu+1} .$$

Setzt man speziell $\mathfrak{z} = \mathfrak{u}_{\mu+1}$, so wird in (28) $\xi_{\mu+1} = 1$, also nach (35)

$$1 = c_{\mu+1,\mu+1} \cdot \beta_{\mu+1,\mu+1} ,$$

wo $c_{\mu+1,\mu+1}$ eine ganze rationale Zahl. Mithin ist $\beta_{\mu+1,\mu+1}$ die Reziproke einer ganzen rationalen Zahl. Damit ist der Satz für $\mu + 1$ bewiesen. Da er für $\mu = 1$ bewiesen ist, gilt er allgemein für $\mu = 1, 2, \ldots, m$.

Wenn speziell $\beta_{\varrho\varrho} = 1$, so können wir $\mathfrak{v}_\varrho = \mathfrak{u}_\varrho$ wählen, d. h. $\beta_{\varrho\sigma} = 0$ setzen für $\sigma < \varrho$.

Wir können an Stelle der $\mathfrak{v}_\varrho$ neue Basisvektoren $\mathfrak{w}_\lambda$ einführen durch die ganzzahlige unimodulare Staffelsubstitution

$$\mathfrak{w}_\lambda = \sum_{\varrho=1}^{\lambda} \gamma_{\lambda\varrho}\mathfrak{v}_\varrho$$

wobei

$$\gamma_{\lambda\lambda} = 1 .$$

Es sei formal $\beta_{\lambda\varrho} = 0, \gamma_{\lambda\varrho} = 0$, später $\delta_{\lambda\varrho} = 0$ für $\varrho > \lambda$. Diese Größen werden tatsächlich nicht gebraucht. Es ist

$$\mathfrak{w}_\lambda = \sum_{\varrho=1}^{\lambda}\sum_{\sigma=1}^{\varrho} \gamma_{\lambda\varrho}\beta_{\varrho\sigma}\mathfrak{u}_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{\lambda} \delta_{\lambda\sigma}\mathfrak{u}_\sigma , \quad (36)$$

worin

$$\delta_{\lambda\sigma} = \sum_{\varrho=\sigma}^{\lambda} \gamma_{\lambda\varrho}\beta_{\varrho\sigma} . \quad (37)$$

Man erhält also die $\mathfrak{w}_\lambda$ auch aus den $\mathfrak{u}_\sigma$ durch eine Staffelsubstitution. Speziell ist

$$\delta_{\lambda\lambda} = \gamma_{\lambda\lambda}\beta_{\lambda\lambda} = \beta_{\lambda\lambda} .$$

Die Koeffizienten der Hauptdiagonale bleiben also ungeändert.

Wir wollen nunmehr über die $\gamma_{\lambda\varrho}$ für $\varrho < \lambda$ so verfügen, daß die $\delta_{\lambda\sigma}$ absolut möglichst klein werden. Es sei zunächst $\sigma = \lambda - 1$; dann ist

$$\delta_{\lambda,\lambda-1} = \gamma_{\lambda,\lambda-1}\beta_{\lambda-1,\lambda-1} + \gamma_{\lambda\lambda}\beta_{\lambda,\lambda-1} .$$

Hierin können wir über die ganze Zahl $\gamma_{\lambda,\lambda-1}$ so verfügen, daß

$$|\delta_{\lambda,\lambda-1}| \leqq \frac{1}{2}\beta_{\lambda-1,\lambda-1} .$$

Es seien für $\lambda - 1 \geqq \varrho \geqq \sigma$ bereits die $\gamma_{\lambda\varrho}$ ganzzahlig so bestimmt, daß

$$|\delta_{\lambda\sigma}| \leqq \frac{1}{2}\beta_{\sigma\sigma} .$$

Dann soll $\gamma_{\lambda,\sigma-1}$ ganzzahlig so bestimmt werden, daß

$$|\delta_{\lambda,\sigma-1}| \leqq \frac{1}{2}\beta_{\sigma-1,\sigma-1} . \tag{38}$$

Es ist nach (37)

$$\delta_{\lambda,\sigma-1} = \sum_{\varrho=\sigma}^{\lambda} \gamma_{\lambda\varrho}\beta_{\varrho,\sigma-1} + \gamma_{\lambda,\sigma-1}\beta_{\sigma-1,\sigma-1} .$$

Die Glieder der Summe rechts liegen bereits fest; über $\gamma_{\lambda,\sigma-1}$ kann man ganzzahlig so verfügen, daß (38) erfüllt ist. Wenn $\delta_{\varrho\varrho} = \beta_{\varrho\varrho} = 1$, so lassen wir

$$\mathfrak{w}_\varrho = \mathfrak{v}_\varrho = \mathfrak{u}_\varrho ,$$

also

$$\delta_{\varrho\sigma} = 0 \qquad \text{für} \quad \sigma < \varrho .$$

Wir haben mithin erreicht:

$$\delta_{\varrho\sigma} = 0 \qquad \text{für} \quad \sigma > \varrho ; \tag{39}$$

$$\delta_{\varrho\varrho} = \frac{1}{c_{\varrho\varrho}} > 0 , \tag{40}$$

wo $c_{\varrho\varrho}$ eine positive ganze Zahl.

Wenn $\delta_{\varrho\varrho} = 1$, so ist

$$\delta_{\varrho\sigma} = 0 \qquad \text{für} \quad \sigma < \varrho; \tag{41}$$

wenn $\delta_{\varrho\varrho} \neq 1$, so ist $\delta_{\varrho\varrho} \leqq \frac{1}{2}$,

$$|\delta_{\varrho\sigma}| \leqq \frac{1}{2}\delta_{\sigma\sigma} \qquad \text{für } \sigma < \varrho . \tag{42}$$

Es ist

$$\mathfrak{u}_\sigma = \sum_{\lambda=1}^{n} c_{\sigma\lambda}\,\mathfrak{w}_\lambda ; \tag{43}$$

hierin sind die $c_{\sigma\lambda}$ ganze rationale Zahlen, weil $\mathfrak{G} < \mathfrak{H}$, d. h. die $\mathfrak{u}_\sigma$ durch die $\mathfrak{w}_\lambda$ ganzzahlig ausdrückbar. Geht man zu den Determinanten U und W der Vektorensysteme $\mathfrak{u}_\sigma$ und $\mathfrak{w}_\lambda$ über, und setzt man die Determinante der

$$|c_{\sigma\lambda}| = C ,$$

so folgt aus (43)

$$U = CW .$$

Daß (43) durch Auflösung der Gleichungen (36) entsteht, daß die $c_{\lambda\sigma}$ ebenfalls eine Staffelmatrix bilden, daß $c_{\lambda\lambda} = \frac{1}{\delta_{\lambda\lambda}}$, werden wir im folgenden nicht benutzen.

§ 4.

Die Hilfssätze des vorigen Paragraphen sollen dazu benutzt werden, die Existenz eines Fundamentalsystems von Einheiten zu beweisen, d. h. eines Systems von $r + s - 1$

Einheiten, als deren Potenzprodukte mit ganzen rationalen Exponenten, die positiv, 0 oder negativ sein dürfen, sich jede Einheit des Körpers auf eine und nur eine Weise darstellen läßt, bis auf einen Faktor, der gleich einer Einheitswurzel des Körpers ist. Hilfssatz 3 gestattet, die absoluten Beträge sämtlicher Konjugierter sämtlicher Einheiten eines geeignet ermittelten Fundamentalsystems nach oben und unten abzuschätzen. Hilfssatz 2 liefert eine Abschätzung für den sogleich zu definierenden Regulator. Bei diesen Abschätzungen können wir uns entweder, wenn wir *keine* idealtheoretischen Hilfsmittel benutzen wollen, nur auf § 1 berufen oder *mit* idealtheoretischen Hilfsmitteln auf § 2.

Wir setzen

$$\log\left(|\varepsilon_\nu^{(\mu)}|^{\mathfrak{p}_\nu}\right) = l_\nu^{(\mu)} ;$$

dann ist

$$l_1^{(\mu)} + l_2^{(\mu)} + \cdots + l_{r+s}^{(\mu)} = 0 . \tag{44}$$

Hierbei seien $\varepsilon_\nu^{(\mu)}$ solche Einheiten, bei denen

$$|\varepsilon_\nu^{(\mu)}| < 1 \qquad \text{für} \quad \nu \neq \mu ,$$
$$|\varepsilon_\nu^{(\mu)}| > 1 \qquad \text{für} \quad \nu = \mu ,$$

die wir früher ausgezeichnete Einheiten nannten, so daß also

$$\begin{cases} l_\nu^{(\mu)} < 0 & \text{für} \quad \mu \neq \nu , \\ l_\nu^{(\mu)} > 0 & \text{für} \quad \mu = \nu . \end{cases} \tag{45}$$

Wir bilden jetzt die Determinante

$$L = |l_\nu^{(\mu)}| \qquad \mu, \nu = 1, 2, \cdots, r+s-1.$$

(Anstatt $r+s$ könnte auch irgendein anderer bestimmter Index $\leqq r+s$ fehlen.) Und zwar seien die Logarithmen sämtlicher untereinander Konjugierten in eine Zeile gesetzt. Es sind wegen (45) die Hauptdiagonalglieder > 0, die übrigen Glieder < 0, die Zeilensummen sind wegen (44), (45) für $r+s \neq \nu$

$$s^{(\mu)} = -\, l_{r+s}^{(\mu)} > 0 .$$

Die Determinante L erfüllt also sämtliche Voraussetzungen des Hilfssatzes 2. Es ist mithin

$$0 < \prod_{\mu=1}^{r+s-1} (-\, l_{r+s}^{(\mu)}) \leqq L \leqq \prod_{\mu=1}^{r+s-1} l_\mu^{(\mu)} .$$

Es ist also $0 < L$. Es war nach (45) $\quad 0 < l_\mu^{(\mu)}$.

$$l_\mu^{(\mu)} \leqq P$$

nach (21) in § 1,

$$l_\mu^{(\mu)} < Q$$

nach (23) in § 2. Wir erhalten also

$$L \leqq P^{r+s-1} \tag{46}$$

nach § 1,

$$L \leqq Q^{r+s-1} \tag{47}$$

nach § 2.

Es sei ζ_1 irgendeine Einheit des Körpers, die keine Einheitswurzel sei, $\zeta_2, \ldots, \zeta_n$ ihre Konjugierten. Wir setzen

$$\log(|\zeta_\nu|^{w_\nu}) = m_\nu ; \tag{48}$$

dann ist

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_{r+s} = 0 . \tag{48 a}$$

Die Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{r+s-1} l_\nu^{(\mu)} \xi^{(\mu)} = m_\nu \tag{49}$$

sind für $\nu = 1, 2, \ldots, r+s-1$ wegen $L > 0$ eindeutig auflösbar. Es ist dann von selbst

$$\left\{ \begin{aligned} m_{r+s} &= -\sum_{\nu=1}^{r+s-1} m_\nu = -\sum_{\nu=1}^{r+s-1} \sum_{\mu=1}^{r+s-1} l_\nu^{(\mu)} \xi^{(\mu)} = -\sum_{\mu=1}^{r+s-1} \Big(\sum_{\nu=1}^{r+s-1} l_\nu^{(\mu)} \xi^{(\mu)} \Big) \\ &= -\sum_{\mu=1}^{r+s-1} \Big(\xi^{(\mu)} \sum_{\nu=1}^{r+s-1} l_\nu^{(\mu)} \Big) = \sum_{\mu=1}^{r+s-1} \xi^{(\mu)} l_{r+s}^{(\mu)} . \end{aligned} \right. \tag{49 a}$$

(49) ist also für den fehlenden Index von selbst erfüllt. Gehören die $\overline{m}_\nu$ zur Einheit $\bar{\zeta}_1$, so gehört wegen (48) $m_\nu \pm \overline{m}_\nu$ zu $\zeta_1 \cdot \bar{\zeta}_1^{\pm 1}$. Betrachten wir das endliche Gebiet, das wir erhalten, wenn wir in (49) die $\xi^{(\mu)}$ der Beschränkung

$$0 \leqq \xi^{(\mu)} \leqq 1$$

unterwerfen, so sind die m_ν in diesem Gebiete beschränkt, also die sämtlichen Konjugierten, also ihre elementaren symmetrischen Funktionen, die ganze rationale Zahlen sein müssen. Es kommen also nur endlich viele algebraische Gleichungen in Betracht, von denen nur endlich viele Gleichungen Einheiten unseres Körpers liefern. Wenn wir durch die m_ν Punkte in einem $r+s$-dimensionalen Raume definieren, so definieren die $l_\nu^{(\mu)}$ ein System $\mathfrak{G}$ von Vektoren $\mathfrak{l}^{(\mu)}$ des Hilfssatzes 3 mit $r+s-1$ unabhängigen Vektoren. Die m_ν, die zu *sämtlichen* Einheiten gehören, definieren ein System $\mathfrak{H}$ von Vektoren $\mathfrak{m}$, das $\mathfrak{G}$ enthält, sich mit reellen Koeffizienten $\xi^{(\mu)}$ durch die $\mathfrak{l}^{(\mu)}$ ausdrücken läßt, sich durch Addition und Subtraktion reproduziert und in jedem endlichen Teilgebiet des Raumes nur endlich viele Punkte enthält. Auf das System $\mathfrak{H}$, das zu sämtlichen Einheiten gehört, läßt sich also Hilfssatz 3 anwenden. Wir erhalten also ein System von Fundamentaleinheiten

$$\vartheta_1^{(1)}, \vartheta_1^{(2)}, \ldots, \vartheta_1^{(r+s-1)} .$$

Wir setzen

$$\log(|\vartheta_\nu^{(\mu)}|^{w_\nu}) = r_\nu^{(\mu)} \tag{50}$$

derart daß für sämtliche Einheiten ζ_1, wenn die m_ν durch (48) definiert sind,

$$m_\nu = x^{(1)} r_\nu^{(1)} + x^{(2)} r_\nu^{(2)} + \cdots + x^{(r+s-1)} r_\nu^{(r+s-1)} \tag{51}$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, r+s-1$, wo die $x^{(\mu)}$ ganze rationale Zahlen sind. (51) gilt auch für den fehlenden Index $r+s$, wie analog (49 a) bewiesen wird. Nennen wir die durch die $r_\nu^{(\mu)}$ bestimmten Vektoren $\mathfrak{r}^{(\mu)}$, so können diese in Hilfssatz 3 an die Stelle der $\mathfrak{w}_\lambda$ treten, während an die Stelle der $\mathfrak{u}_\lambda$ hier die $\mathfrak{l}^{(\mu)}$ treten. Wir können also die $\mathfrak{r}^{(\mu)}$ durch Gleichungen analog (36) bestimmen

$$\mathfrak{r}^{(\lambda)} = \sum_{\sigma=1}^{\lambda} \delta_{\lambda\sigma} \mathfrak{l}^{(\sigma)} , \tag{52}$$

wobei die $\delta_{\lambda\sigma}$ den Bedingungen (39), (40), (41), (42) genügen. Aus (52) folgt

$$r_\nu^{(\lambda)} = \sum_{\sigma=1}^{\lambda} \delta_{\lambda\sigma} l_\nu^{(\sigma)} . \tag{53}$$

Mit Rücksicht auf (45) kann man (44) schreiben

$$l_\mu^{(\mu)} = \sum_\nu{}' \, |l_\nu^{(\mu)}| \,,$$

wo Σ' nur über die $l_\nu^{(\mu)}$ mit $\nu \neq \mu$ läuft. Hieraus folgt

$$|l_\nu^{(\mu)}| \leqq l_\mu^{(\mu)} \leqq P \tag{54}$$

für $\nu \neq \mu$ und trivialer Weise für $\nu = \mu$. Wenn $\delta_{\lambda\lambda} = 1$, so ist wegen (41)

$$r_\nu^{(\lambda)} = l_\nu^{(\lambda)},$$

also wegen (54)

$$|r_\nu^{(\lambda)}| = |l_\nu^{(\lambda)}| \leqq P \,. \tag{55}$$

Wenn $\delta_{\lambda\lambda} \neq 1$, so ist in (40) $c_{\lambda\lambda} \neq 1$, also

$$c_{\lambda\lambda} \geqq 2 \,, \qquad \delta_{\lambda\lambda} \leqq \frac{1}{2} \,. \tag{56}$$

Aus (42) folgt

$$|\delta_{\lambda\sigma}| \leqq \frac{1}{2} \delta_{\sigma\sigma} \leqq \frac{1}{2} \qquad \text{für} \quad \sigma < \lambda \,. \tag{57}$$

Wegen (56) gilt (57) auch für $\sigma = \lambda$. Also ergibt sich aus (53)

$$|r_\nu^{(\lambda)}| \leqq \sum_{\sigma=1}^{\lambda} |\delta_{\lambda\sigma}| \cdot |l_\nu^{(\sigma)}| \leqq \sum_{\sigma=1}^{\lambda} \frac{1}{2} P = \frac{\lambda}{2} P \,.$$

Wenn $\lambda \geqq 2$, so ist im Falle $\delta_{\lambda\lambda} = 1$ wegen (55)

$$|r_\nu^{(\lambda)}| \leqq P \leqq \frac{\lambda}{2} P \,.$$

Wir können also ein solches Fundamentalsystem finden, daß

$$|r_\nu^{(1)}| \leqq P \tag{58}$$

und

$$|r_\nu^{(\lambda)}| \leqq \frac{\lambda}{2} P \qquad \text{für} \quad 2 \leqq \lambda \leqq r + s + 1 \,. \tag{59}$$

Wenn $r + s - 1 = 1$, gibt es nur eine Fundamentaleinheit, für die (58) gilt. Anstatt P kann unter Benutzung von § 2 überall Q geschrieben werden. Für ein geeignetes Fundamentalsystem sind also durch (58) und (59) die absoluten Beträge sämtlicher Konjugierter sämtlicher Einheiten nach oben und unten abgeschätzt.

Die Determinante $r + s - 1$-ten Grades

$$R = |r_\nu^{(\lambda)}|$$

heißt der *Regulator* [11]) des Körpers. Wenn wir anstatt der $r + s$-ten Konjugierten eine andere, z. B. die σ-te weglassen wollen, so haben wir in R sämtliche übrigen Spalten zur σ-ten Spalte zu addieren und erhalten in der σ-ten Spalte die Zeilensummen, die wegen (48a) gleich den negativ genommenen $r + s$-ten Konjugierten sind. Der Regulator kann also durch Fortlassung einer anderen Konjugierten höchstens das Vorzeichen ändern. Ebenso wechselt bei Übergang zu einem anderen Fundamentalsystem die Determinante R höchstens das Vorzeichen. Nach der Schlußbemerkung in Hilfssatz 3 ist

$$L = CR$$

mit ganzem rationalem C. Mithin ist nach (46)

$$|R| \leqq L \leqq P^{r+s-1} = [\Delta^*]^{(n+1)(r+s-1)} \cdot \log^{r+s-1} \Delta^*$$

[11]) Siehe z. B. Hecke, Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig 1923, S. 131.

oder nach (47)

$$|R| \leqq L \leqq Q^{r+s-1} = \Big(\frac{1}{(n-1)!}\, \Delta^* \cdot \log^{n-1}\Delta^* + b_2 \Delta^* \cdot \log^{n-2}\Delta^*\Big)^{r+s+1} ,$$

worin $\Delta^* = \dfrac{|\sqrt{D}|}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^s}$ war. Damit ist der absolute Betrag des Regulators nach oben abgeschätzt.

Es soll nunmehr gezeigt werden, daß mit Hilfe des Fundamentalsystems

$$\vartheta_1^{(1)}, \vartheta_1^{(2)}, \ldots, \vartheta_1^{(r+s-1)}$$

und der im Körper vorhandenen Einheitswurzeln sich jede Einheit ζ_1 des Körpers eindeutig darstellen läßt. Es seien die $r_\nu^{(\mu)}$ durch (50), die m_ν durch (48) definiert. Setzt man

$$\vartheta_1^{(1)\,x^{(1)}} \cdot \vartheta_1^{(2)\,x^{(2)}} \cdots \vartheta_1^{(r+s-1)\,x^{(r+s-1)}} = \zeta_1' , \tag{60}$$

wo die $x^{(\mu)}$ durch (51) definiert seien; setzt man ferner

$$\zeta_1 \zeta_1'^{-1} = \varrho_1 ,$$

so ist wegen (51)

$$\log|\varrho_\nu| = 0 \quad \text{oder} \quad |\varrho_\nu| = 1 \quad \text{für } \nu = 1, 2, \ldots, r+s . \tag{61}$$

Es soll gezeigt werden, daß eine ganze algebraische Zahl des Körpers, deren sämtliche Konjugierte den absoluten Betrag 1 haben, eine Einheitswurzel ist. Es ist z. B.

$$|\varrho_1\varrho_2 + \varrho_1\varrho_3 + \cdots + \varrho_{n-1}\varrho_n| \leqq |\varrho_1||\varrho_2| + |\varrho_1||\varrho_3| + \cdots + |\varrho_{n-1}||\varrho_n| = \binom{n}{2} .$$

Da die elementaren symmetrischen Funktionen der ϱ_ν ganze Zahlen sind, so kommen für sie nur endlich viele Möglichkeiten in Betracht; für die λ-te elementare symmetrische Funktion $2\binom{n}{\lambda}+1$ Möglichkeiten, nämlich $\binom{n}{\lambda}$ positive, $\binom{n}{\lambda}$ negative Zahlen und die 0. Die Zahl der Möglichkeiten ist also $\leqq N$, wo

$$N = \prod_{\lambda=1}^{n}\left[2\binom{n}{\lambda}+1\right] < \prod_{\lambda=1}^{n} 4\binom{n}{\lambda} < \prod_{\lambda=1}^{n} 2^{n+2} = 2^{n(n+2)} .$$

Sämtliche Potenzen von ϱ_1 müssen ebenfalls den Bedingungen (61) genügen, also unter den Wurzeln der endlich vielen Gleichungen vorkommen, sich also bei fortgesetztem Potenzieren wiederholen. Also ist

$$\varrho_1^a = \varrho_1^{a+m} ,$$
$$\varrho_1^m = 1 ,$$

also

$$m \leqq a + m \leqq N .$$

Diese sehr ungünstige Schranke für den Grad der in einem Körper n-ten Grades vorkommenden Einheitswurzeln erhält man *ohne* Benutzung der Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung. Wenn man diese benutzt [12]), so muß, wenn ϱ_1 eine primitive m-te Einheitswurzel ist, ϱ_1 einer irreduziblen Gleichung $\varphi(m)$-ten Grades genügen, also

[12]) Siehe z. B. die Arbeiten sämtlich in der Math. Zeitschr. **26** (1927), S. 442—444 von Späth, **29** (1929), S. 462 von Landau, S. 463 von J. Schur.

$\varphi(m)$ in n aufgehen. Es sei $\varrho_1 = e^{i\lambda}$, hierin sei λ der kleinste positive Wert, der eine im Körper vorkommende Einheitswurzel liefert. Es sei $\varrho_1' = e^{i\lambda'}$ irgendeine Einheitswurzel im Körper; dann behaupte ich, daß $\lambda' = y\lambda$, wo y eine ganze rationale Zahl. Angenommen, das sei nicht der Fall, so wäre

$$y\lambda < \lambda' < (y+1)\,\lambda \ ,$$

$$0 < \lambda' - y\lambda < \lambda \ . \tag{62}$$

Dann wäre

$$\varrho_1' \varrho_1^{-y} = e^{i(\lambda' - y\lambda)}$$

im Körper enthalten, was wegen (62) der Definition von λ widerspräche. Es ist also

$$\varrho_1' = \varrho_1^y \ .$$

Das gilt speziell für $\lambda' = 2\pi$, da $1 = e^{2\pi i}$ im Körper enthalten. Es ist also

$$2\pi i = m\lambda i \ , \qquad \lambda = \frac{2\pi}{m} \ , \qquad \varrho^m = e^{i\lambda m} = e^{2\pi i} = 1 \ .$$

Es läßt sich also jede Einheit ζ_1 des Körpers darstellen in der Form

$$\zeta_1 = \zeta_1' \cdot \varrho_1^y \ ,$$

wo ζ_1 durch (60) definiert ist. Die Darstellung ist eindeutig, da die Darstellung durch (51) eindeutig ist.

Eingegangen 15. Februar 1931.

Ein dem Vitalischen analoger Satz für analytische Funktionen von mehreren Veränderlichen.

Von *C. Carathéodory* in München.

1. Der *Vitalische Satz* besagt bekanntlich, daß eine Folge von Funktionen $f_n(z)$, die in einem Gebiete G einer normalen Familie angehören, in diesem Gebiete gegen eine analytische Funktion $f(z)$ *stetig konvergieren*, sobald die Konvergenzpunkte der $f_n(z)$ einen Häufungspunkt im Inneren von G besitzen. Die Quelle dieses Satzes ist die Tatsache, daß die Nullstellen einer nicht identisch verschwindenden analytischen Funktion isoliert liegen. Dies trifft aber für analytische Funktionen, die von mehreren Veränderlichen abhängen, nicht mehr zu, und so scheint das Unternehmen, den Vitalischen Satz auf diese Funktionen zu übertragen, zunächst aussichtslos zu sein [1]).

Wir werden aber sehen, daß es möglich ist, *abzählbare*, gegen einen Punkt O konvergierende Punktfolgen im $2n$-dimensionalen Raume der komplexen Zahlen $(z_1, \ldots, z_n)$ zu konstruieren, die so irregulär sind, daß jede Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$, die in O analytisch ist und in allen diesen Punkten verschwindet, identisch gleich Null sein muß.

Für Funktionsfolgen $\{f_k\}$, die in jedem Punkt einer derartigen Punktmenge $\{P_m\}$ konvergieren und in einer Umgebung G von O normal sind, kann natürlich der Vitalische Satz ohne weiteres übertragen werden.

Um nämlich zu beweisen, daß in jedem Punkte von G stetige Konvergenz der Folge stattfindet, braucht man nur zu beachten, daß, wenn dies nicht der Fall sein sollte, aus $\{f_k\}$ zwei Teilfolgen ausgesondert werden können, die gegen zwei nicht identische Grenzfunktionen $\varphi(z_1, \ldots, z_n)$ und $\psi(z_1, \ldots, z_n)$ konvergieren. Dies führt aber zu einem Widerspruch, weil die Differenz $\varphi - \psi$ in G analytisch ist und in jedem Punkte der Folge $\{P_m\}$ verschwinden muß.

2. Die Konstruktion unserer Folgen $\{P_m\}$ soll nun schrittweise erfolgen. Wir werden annehmen, daß wir im Raume der $(z_1, \ldots, z_n)$ eine Folge $\{P_m\}$ von Punkten schon konstruiert haben, die folgende Eigenschaften besitzt:

a) Sie konvergiert gegen den Anfangspunkt O der Koordinaten.

b) Jede in O reguläre analytische Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ ist identisch gleich Null, sobald sie in allen Punkten

$$P_N, P_{N+1}, \ldots$$

unserer Folge verschwindet, wobei N eine beliebige hinreichend große natürliche Zahl bedeutet.

Hierauf werden wir im $(2n+2)$-dimensionalen Raume der $(x, z_1, \ldots, z_n)$ eine Folge von Punkten $\{Q_j\}$ konstruieren, die genau dieselben Eigenschaften für diesen

[1]) In der grundlegenden Abhandlung von G. Julia, Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables, Acta Mathem. **47** (1926), S. 53—115 wird auf S. 57 unten ohne Beweis das Gegenteil behauptet, was offenbar nur durch eine Unachtsamkeit zu erklären ist. Gegenbeispiel: $f_n(x, y) = (x - a_n)y$, wobei die a_n alle rationalen Punkte der Strecke $0 < x < 1$ durchlaufen.

Raum besitzt. Da nun für $n = 1$ jede beliebige Folge von Punkten $\{P_m\}$, die aus Punkten besteht, die alle von O verschieden sind und gegen O konvergieren, die obigen Bedingungen befriedigt, ist das Gelingen unserer Konstruktion für jedes n gewährleistet.

3. Es sei also im Raume der $(z_1, \ldots, z_n)$ eine Folge $\{P_k\}$ gegeben, die die oben geschilderten Eigenschaften besitzt. Wir nehmen ferner an, daß alle Punkte P_{N+1}, $P_{N+2}, \ldots$ der Folge $\{P_k\}$ im Polyzylinder

$$|z_j| < R \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

enthalten sind. Bei gegebenem R ist dies stets der Fall, wenn man die natürliche Zahl N hinreichend groß wählt.

Nun bezeichnen wir mit $\{f\}$ die Familie aller in (3.1) regulären analytischen Funktionen $f(z_1, \ldots, z_n)$, die außerdem in diesem Gebiete der Bedingung

$$|f| \leqq 1 \tag{3.2}$$

genügen und in den q aufeinanderfolgenden Punkten

$$P_{N+1}, P_{N+2}, \ldots, P_{N+q} \qquad (q \geqq 1) \tag{3.3}$$

verschwinden.

Wir bezeichnen mit $\mu_N(R, q)$ die obere Grenze der absoluten Beträge aller Funktionen von $\{f\}$ auf der Punktmenge

$$|z_j| = \frac{R}{2}. \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{3.4}$$

Die Familie $\{f\}$ ist normal und abgeschlossen; es gibt also eine Funktion $f_q(z_i)$ unserer Familie sowie einen Punkt $\zeta_1^{(q)}, \ldots, \zeta_n^{(q)}$ auf der Punktmenge (3.4), für welche

$$|f_q(\zeta_1^{(q)}, \ldots, \zeta_n^{(q)})| = \mu_N(R, q) \tag{3.5}$$

ist.

Nun ist nach unserer Konstruktion

$$\mu_N(R, q+1) \leqq \mu_N(R, q)\,, \tag{3.6}$$

so daß die $\mu_N(R, q)$ mit wachsendem q gegen einen Grenzwert ω konvergieren.

Die Folge der Funktionen $f_q(z_i)$ ist ihrerseits normal in (3.1); sie enthält daher eine Teilfolge $f_{q_1}, f_{q_2}, \ldots$, für welche immer $q_{m+1} > q_m$ ist und die gegen eine Grenzfunktion $f_0(z_1, \ldots, z_n)$ in jedem Punkt von (3.1) stetig konvergiert. Bezeichnet man also mit $(\zeta_1^*, \ldots, \zeta_n^*)$ die Koordinaten irgendeines Häufungspunktes der Punktfolge $(\zeta_1^{(q_i)}, \ldots, \zeta_n^{(q_i)})$, so muß

$$|f_0(\zeta_1^*, \ldots, \zeta_n^*)| = \omega \tag{3.7}$$

sein. Andererseits zeigt unsere Konstruktion, daß die Funktion $f_0(z_i)$ in allen Punkten der Folge $P_{N+1}, P_{N+2}, \ldots$ verschwinden muß. Nach Voraussetzung ist also $f_0(z_i)$ identisch Null, so daß auch ω verschwinden muß. Wir haben daher das Resultat

$$\lim_{q=\infty} \mu_N(R, q) = 0\,. \tag{3.8}$$

4. Wir wollen mit Hilfe der Überlegungen des letzten Paragraphen im Raume der $(x, z_1, \ldots, z_n)$ die Punktmenge $\{Q_j\}$ bilden, deren Existenz zu beweisen ist.

Hierzu nehmen wir eine beliebige Folge $x_0, x_1, \ldots$ von komplexen Zahlen, die den Relationen

$$0 < |x_p| < \frac{1}{2^p} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.1}$$

genügen. Ferner bestimmen mir eine monoton wachsende Folge von natürlichen Zahlen $\overline{N}_p$ derart, daß für alle

$$k > \overline{N}_p$$

sämtliche Punkte P_k der Punktmenge $\{P_k\}$, die wir im § 3 betrachtet haben, im Inneren des Polyzylinders

$$|z_j| < \frac{1}{2^p} \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{4.2}$$

liegen.

Endlich bestimmen wir eine Folge von natürlichen Zahlen N_p, die folgenden drei Bedingungen genügen: Erstens soll

$$1 < N_1 < N_2 < \ldots \tag{4.3}$$

sein; zweitens ist für jedes positive p

$$N_p \geqq \overline{N}_p; \tag{4.4}$$

drittens sollen mit den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen die Ungleichheiten

$$\mu_{N_p}(\varrho, N_{p+1} - N_p) < |x_p|^p \tag{4.5}$$

für jedes p erfüllt sein, falls man der Reihe nach

$$\varrho = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^p} \tag{4.6}$$

setzt.

Nun behaupte ich, daß die Folge $\{Q_j\}$ die behauptete Eigenschaft besitzt, falls wir die Koordinaten der Punkte Q_j wie folgt bestimmen:

$$\begin{cases} Q_j = (x_0, P_j) & \text{für } 1 \leqq j \leqq N_1, \\ Q_j = (x_p, P_j) & \text{für } N_p + 1 \leqq j \leqq N_{p+1} \\ & (p = 1, 2, \ldots). \end{cases} \tag{4.7}$$

5. Es sei nämlich die Funktion $f(x, z_1, \ldots, z_n)$ regulär im Anfangspunkt der Koordinaten und daher auch regulär in einem Polyzylinder

$$|x| < \varrho, \quad |z_i| < \varrho \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{5.1}$$

Es sei p_0 irgendeine natürliche Zahl, die der Bedingung

$$\frac{1}{2^{p_0}} < \varrho \tag{5.2}$$

genügt. Wir nehmen an, $f(x, z_j)$ verschwinde in allen Punkten Q_j, für welche $j > N_{p_0}$ ist. Es ist zu beweisen, daß diese Funktion identisch Null ist.

Wir bezeichnen mit M das Maximum von $|f(x, z_j)|$ auf der Punktmenge

$$|x| = \frac{1}{2^{p_0}}, \quad |z_j| = \frac{1}{2^{p_0}} \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{5.3}$$

und wählen ein beliebiges System von n komplexen Zahlen $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, die nur der einen Bedingung

$$|\zeta_j| = \frac{1}{2^{p_0+1}} \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{5.4}$$

unterworfen sind.

Für jedes $p > p_0$ ist die Funktion

$$\varphi_p(z_1, \ldots, z_n) = \frac{f(x_p, z_1, \ldots, z_n)}{M + 1} \tag{5.5}$$

regulär im Polyzylinder

$$|z_i| < \frac{1}{2^{p_0}} \qquad (i = 1, \ldots, n); \tag{5.6}$$

außerdem ist dort $|\varphi_p| < 1$, und nach (4.7) verschwindet φ_p in allen Punkten P_j, für welche $N_p + 1 \leqq j \leqq N_{p+1}$ ist.

Nach unserer Konstruktion ist daher wegen (4.5)

$$|\varphi_p(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)| < |x_p|^p$$

und also auch

$$|f(x_p, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)| < (M + 1)\,|x_p|^p. \tag{5.7}$$

Nun kann man im Polyzylinder (5.1) die Funktion $f(x, z_i)$ folgendermaßen darstellen:

$$f(x, z_1, \ldots, z_n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_1, \ldots, z_n)\, x^k. \tag{5.8}$$

Falls nun nicht alle Zahlen $a_k(\zeta_i)$ verschwinden sollten, so sei $a_m(\zeta_i)$ diejenige mit kleinstem Index, die nicht Null ist. Es gibt dann eine positive Zahl σ von der Eigenschaft, daß für $|x| < \sigma$ stets

$$|a_m(\zeta_i)| \cdot |x^m| < 2\,|f(x, \zeta_i)|.$$

Für sämtliche hinreichend großen p hat man hiernach, wenn man (5.7) berücksichtigt,

$$|a_m(\zeta_i)| < 2\,(M + 1)\,|x_p|^{p-m},$$

und dies ist eine Ungleichheit, die sich mit $|a_m(\zeta_i)| \neq 0$ nicht verträgt.

Für alle Zahlenkomplexe $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, die der Bedingung (5.4) genügen, und für alle natürlichen Zahlen m ist also immer $a_m(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = 0$, und dies ist nur dann möglich, wenn alle $a_m(z_1, \ldots, z_n)$ identisch verschwinden und daher, wie wir beweisen wollten,

$$f(x, z_1, \ldots, z_n) \equiv 0$$

ist.

München, den 28. Februar 1931.

Eingegangen 2. März 1931.

Über einige Abschätzungen von Erwartungswerten.

Von *R. v. Mises* in Berlin.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat man es oft mit der Aufgabe zu tun, den sog. *Erwartungswert* einer Funktion bei beliebiger oder nur wenigen Bedingungen unterworfener Verteilung abzuschätzen oder Beziehungen zwischen solchen Erwartungswerten aufzusuchen. Im folgenden sollen teils einige bekannte Formeln neu abgeleitet und erweitert, teils auch bisher unbekannte, die bei verschiedenen Anwendungen von Nutzen sein können, aufgezeigt werden.

Das allgemeine Problem läßt sich wie folgt fassen. Es sei $W(x, y, z, \ldots)$ eine reelle, nicht-negative, total monotone, nie abnehmende Funktion der reellen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$, so daß für jedes durch zwei Punkte $x_2 > x_1$, $y_2 > y_1$, $z_2 > z_1, \ldots$ bestimmte Intervall das Stieltjes-Integral $\int dW$ definiert ist und einen nicht-negativen Wert besitzt. Über den ganzen Raum erstreckt sei

$$\int dW = 1\,, \tag{1}$$

demnach

$$W(-\infty, -\infty, -\infty, \ldots) = 0, \quad W(\infty, \infty, \infty, \ldots) = 1 \tag{2}$$

Ist nun $f(x, y, z, \ldots)$ eine stetige, entweder beschränkte oder (je nach dem betreffenden W) nicht zu stark unendlich werdende Funktion, so existiert das Stieltjes-Integral

$$\mathfrak{E}(f) = \int f dW, \tag{3}$$

erstreckt über den ganzen unendlichen Raum, und wir nennen es den „*Erwartungswert von f bezüglich der Verteilung W*".

Alle Integralzeichen ohne Hinzufügung von Grenzbezeichnungen sollen in Hinkunft Integration über den gesamten unendlichen Raum bedeuten.

Unsere Aufgabe ist es, für gegebene f und durch irgendwelche Vorschriften eingeschränkte W obere und untere Schranken für $\mathfrak{E}(f)$ zu finden. Z. B. kommt als Bedingung vor, daß W nur Wachstumstellen im Gebiet $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0, \ldots$ besitzen darf, daß also W verschwindet, wenn auch nur eine der Variablen negativ ist. Häufig sind von W die „*Mittelwert*komponenten"

$$a = \int x dW, \quad b = \int y dW, \quad c = \int z dW, \ldots \tag{4}$$

und die Matrix der „*Streuungs*komponenten"

$$s^2 = \int (x-a)^2 dW, \quad R = \int (x-a)(y-b) dW, \quad t^2 = \int (y-b)^2 dW, \ldots \tag{5}$$

gegeben.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann man $W(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ deuten als die *Wahrscheinlichkeit* dafür, daß für das erste Merkmal x des Kollektivs die Ungleichheit $x \leqq x_1$, für das zweite die Bedingung $y \leqq y_1$, für das dritte $z \leqq z_1, \ldots$ erfüllt ist. Dabei muß man W so definieren, daß es an Sprungstellen gleich dem *oberen* Limes der Werte seiner Umgebung ist. — Für die Anschauung ist es auch bequem, sich W unter dem Bilde einer *Massenverteilung* vorzustellen: die Gesamtmasse 1 ist irgendwie, punktförmig, längs Kurven, auf Flächen, oder mit räumlicher Dichte über den unendlichen Raum oder einen Teil des Raumes ausgebreitet.

§ 1. Folgerungen aus der Schwarzschen Ungleichheit. Momenten-Relation.

Die folgenden Überlegungen sind bekannt und müssen nur des Zusammenhangs wegen wiederholt werden. Für reelle f und g besagt die Schwarzsche Ungleichheit

$$[\int f g\, dW]^2 \leqq \int f^2 dW \cdot \int g^2 dW \tag{6}$$

oder in unserer Schreibweise (3)

$$[\mathfrak{E}(fg)]^2 \leqq \mathfrak{E}(f^2) \cdot \mathfrak{E}(g^2)\,. \tag{6'}$$

Wir wenden dies zunächst auf die *absoluten Momente einer eindimensionalen Verteilung*

$$M_\nu = \int |x|^\nu dW = \mathfrak{E}(|x|^\nu) \tag{7}$$

an. Es kommt auf dasselbe hinaus, wenn wir x statt $|x|$ schreiben und dafür festsetzen, daß $W(x) = 0$ für $x < 0$, d. h. die Wachstumstellen der Verteilung auf die positive Seite der x-Achse beschränkt sind. Jedenfalls sind alle M_ν nicht-negativ. Aus (6') folgt daher, mit $f^2 = x^\mu$, $g^2 = x^\nu$

$$M_{\frac{\nu+\mu}{2}} \leqq \sqrt{M_\nu \,.\, M_\mu}, \quad \ln M_{\frac{\nu+\mu}{2}} \leqq \frac{1}{2}(\ln M_\nu + \ln M_\mu). \tag{8}$$

Setzen wir $\ln M_x = F(x)$, so sieht man, daß $F(x)$ im Innern des Bereichs, in dem es definiert ist, mindestens zweimal stetig differenzierbar ist. Nach der Taylorschen Formel hat man daher

$$\frac{1}{2}[F(x+\alpha) + F(x-\alpha)] - F(x) = \frac{\alpha^2}{4}[F''(x+\vartheta_1\alpha) + F''(x-\vartheta_2\alpha)]$$

mit $0 \leqq \vartheta \leqq 1$. Da nach (8) die linke Seite für kein noch so kleines α negativ sein kann, so folgt, daß auch $F''(x)$ nicht-negativ ist: *Die Linie, die* $\ln M_\nu$ *als Funktion von* ν *darstellt, ist nach unten konvex.*

Aus der Konvexität ergibt sich sofort die oft abgeleitete Beziehung (die aber den Inhalt von (8) nicht erschöpft):

$$\frac{\ln M_\nu}{\nu} \geqq \frac{\ln M_\mu}{\mu} \qquad \text{für } \nu > \mu;\ \nu, \mu \neq 0, \tag{9}$$

da die Kurve $F(x)$ nach unsern Festsetzungen über $W(x)$ durch den Nullpunkt geht. Die Kurve kann sich nach beiden x-Seiten ins Unendliche erstrecken oder auf einer Seite oder auf beiden Seiten vertikale Asymptoten bzw. Grenztangenten besitzen.

Die Überlegung ist auf *mehrdimensionale Verteilungen* unmittelbar zu übertragen. Setzen wir — unter der Voraussetzung, daß W nur im Gebiet nicht-negativer $x, y, z, \ldots$ Wachstumstellen besitzt —

$$M_{\alpha\beta\gamma\ldots} = \int x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots dW = \mathfrak{E}(x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots)\,, \tag{10}$$

so ergibt (6')

$$M_{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}, \frac{\beta_1+\beta_2}{2}, \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\ldots} \leqq \sqrt{M_{\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots} \, M_{\alpha_2\beta_2\gamma_2\ldots}} \tag{11}$$

Denkt man sich $\ln M_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ als Funktion von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ aufgetragen, so besagt (11), daß jeder „Vertikalschnitt" durch die Fläche eine nach unten konvexe Kurve liefert. *Die Hyperfläche, die* $\ln M_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ *als Funktion von* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *darstellt, ist nach unten konvex.* Hieraus kann man verschiedene Formeln ableiten, die (9) analog sind.

Weitere Beziehungen zwischen den Momenten erhält man, wenn man in (6) für f und g irgendwelche Polynome, statt einfacher Potenzen, setzt.

Zwei einfache Folgerungen aus (6) sollen hier noch besonders angemerkt werden. Sind von zwei Funktionen f, g *ihre* Mittelwerte und Streuungen bekannt, nämlich

(12) $\int f dW = a_1, \quad \int g dW = a_2; \quad \int (f - a_1)^2 dW = s_1^2, \quad \int (g - a_2)^2 dW = s_2^2$

so hat man

(12′) $$\int (f - a_1)(g - a_2) dW = \int fg\, dW - a_1 a_2,$$

daher, wenn $f - a_1$ für f und $g - a_2$ für g in (6′) eingeführt wird:

(13) $$|\mathfrak{E}(fg) - \mathfrak{E}(f)\,\mathfrak{E}(g)| \leqq s_1 s_2.$$

Der Erwartungswert eines Produktes unterscheidet sich von dem Produkt der Erwartungswerte höchstens um das geometrische Mittel der Streuungen. Handelt es sich um einen Quotienten $f : g$, so setzen wir voraus, daß der Erwartungswert a_2 des Nenners von 0 verschieden ist, und der Betrag von $f : g$ den Höchstwert K besitzt. Dann ergibt die Identität

$$\frac{f}{g} - \frac{f}{a_2} = \frac{f}{g}\,\frac{(g - a_2)^2}{a_2^2} - \frac{fg - fa_2}{a_2^2}$$

durch Integration

$$\mathfrak{E}\left(\frac{f}{g}\right) - \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{a_2^2}\int \frac{f}{g}(g - a_2)^2 dW - \frac{1}{a_2^2}\left[\int fg\, dW - a_1 a_2\right],$$

daher nach (13):

(14) $$\left|\mathfrak{E}\left(\frac{f}{g}\right) - \frac{\mathfrak{E}(f)}{\mathfrak{E}(g)}\right| \leqq \frac{K s_2^2 + s_1 s_2}{a_2^2}.$$

Diese Ungleichheit werden wir später (§ 4) für den Fall $f = 1$ noch verbessern.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf den Fall, daß von der eindimensionalen Verteilung $W(x)$, die nur bei $x \geqq 0$ Wachstumstellen besitzt, ihr Mittelwert und ihre Streuung von vornherein gegeben sind:

(15) $$\int x dW = a, \quad \int (x - a)^2 dW = s^2.$$

Da jetzt mit $M_0 = 1$, $M_1 = a$, $M_2 = a^2 + s^2$ drei Momente bekannt sind, ergibt die Konvexität von $\ln M_\nu$ obere und untere Schranken für M_ν im Bereich $\nu = 0$ bis 2, u. zwar

(16)
$$a^\nu \left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right)^{\nu - 1} \leqq M_\nu \leqq a^\nu \qquad \text{für } 0 < \nu < 1$$
$$a^\nu \leqq M_\nu \leqq a^\nu \left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right)^{\nu - 1} \qquad \text{für } 1 < \nu < 2$$

Z. B. gilt für $\nu = \frac{1}{2}$

(17) $$\sqrt{a}\,\frac{a}{\sqrt{a^2 + s^2}} \leqq \mathfrak{E}(\sqrt{x}) \leqq \sqrt{a},$$

also bei kleinem $s^2 : a^2$

(17′) $$\sqrt{a}\left(1 - \frac{s^2}{2a^2}\right) \leqq \mathfrak{E}(\sqrt{x}) \leqq \sqrt{a},$$

während die oft anzutreffende Behauptung $\mathfrak{E}(\sqrt{x})$ sei bei kleinem s^2 „annähernd“ $\sqrt{a}\left(1 - \frac{s^2}{8a^2}\right)$ jeder Begründung entbehrt, solange $W(x)$ nicht spezialisiert wird. Besitzt z. B. W je einen Sprung von der Höhe p in $x = 0$ und $x = 2a$ und einen Sprung $1 - 2p$ in $x = a$, so wird $s^2 = 2pa^2$ und der genaue Wert

$$\mathfrak{E}(\sqrt{x}) = \sqrt{a}\left(1 - \frac{s^2}{a^2}\,\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)$$

ist verschieden von dem angeblichen Näherungswert, wie klein auch p und damit s^2 wird. Hierzu vgl. a. § 5.

§ 2. Verschärfung der Momenten-Relation durch Gauß.

Es ist klar, daß man die aus der Schwarzschen Ungleichheit fließende Momenten-Relation *im allgemeinen* nicht verschärfen kann. Denn das Gleichheitszeichen gilt in (6) immer (dann und nur dann), wenn W eine einzige Wachstumstelle besitzt.

Gauß [1]) hat eine vom Standpunkt der Fehlertheorie interessante Spezialisierung von W in Betracht gezogen; und zwar soll — im eindimensionalen Fall — $W(x)$ eine mit wachsendem x *nicht zunehmende Ableitung* $w(x)$ besitzen. Hierbei ist wieder $x \geqq 0$, vorausgesetzt, doch kann W an der Stelle $x = 0$ einen Sprung besitzen, so daß $\int w dx < 1$ wird (Fehler von größerem absoluten Betrag haben geringere Wahrscheinlichkeit). Für diesen Fall gibt Gauß ohne Beweis die Ungleichheit $5M_4 \geqq 9M_2^2$, die mehr besagt als (9). Einen Beweis hierfür lieferte Krüger 1896 und G. Faber [2]) bemerkt hierzu: „Es ist erstaunlich, daß dieser einfache und merkwürdige Gaußsche Satz erst mehr als ein halbes Jahrhundert nach seiner Veröffentlichung mit einem Beweis versehen wurde." Er selbst gibt für die schon von Winckler 1866 aufgestellte Verallgemeinerung

$$[(\nu+1)\,M_\nu]^{\frac{1}{\nu}} \geqq [(\mu+1)\,M_\mu]^{\frac{1}{\mu}} \qquad \text{für} \quad \nu > \mu > 0 \tag{18}$$

einen Beweis, der sich auf eine Reihe von — an sich recht interessanten — Hilfssätzen über die Nullstellen von „Polynomen" mit nicht-ganzzahligen Exponenten stützt.

Tatsächlich läßt sich mehr als (18) fast ohne Rechnung als ein einfaches Korrollar zu den Sätzen von § 1 gewinnen. Denn mit $dW = w dx$ folgt durch Produkt-Integration ($\nu > -1$):

$$M_\nu = \int x^\nu w dx = \left| \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\, w(x) \right|_0^\infty - \frac{1}{\nu+1} \int x^{\nu+1} dw\,. \tag{19}$$

Das Integral rechts ist definiert, da w nach Voraussetzung monoton ist. Der erste Teil der rechten Seite von (19) verschwindet, wenn M_ν existiert, weil dann w mit $x \to \infty$ stärker gegen 0 gehen muß als $x^{-\nu-1}$ und mit $x \to 0$ entweder endlich bleibt oder schwächer wächst als $x^{-\nu-1}$. Ist $w(0)$ endlich, so setzen wir

$$-\frac{dw}{w(0)} = dW_1, \quad W_1(0) = 0, \quad \text{also} \quad \int dW_1 = 1, \tag{20}$$

so daß

$$(\nu+1)\,M_\nu = w(0) \int x^{\nu+1} dW_1. \tag{21}$$

Diese Gleichung besagt, daß $(\nu+1)\,M_\nu$ bis auf einen positiven, von ν unabhängigen Faktor gleich dem $(\nu+1)$-ten Moment einer anderen Verteilung ist. Nach § 1 ist also $\ln [(\nu+1)\,M_\nu]$ eine nach unten konvexe Funktion von $(\nu+1)$, demnach auch von ν. Spricht man die Konvexitäts-Eigenschaft für die drei Punkte mit den Koordinaten $0, M_0 = 1$; $\mu, (\mu+1)\,M_\mu$; $\nu, (\nu+1)\,M_\nu$ aus, so erhält man (18) analog (9), und zwar für alle $\nu > \mu > -1$ (nicht nur > 0).

Ist $w(0)$ nicht endlich, so muß es doch einen positiven Exponenten α (höchstens $\nu+1$) geben, für den $\int x^\alpha dw$ endlich ist. Wir setzen dann an Stelle der ersten Gl. (20)

$$\frac{x^\alpha dw}{\int x^\alpha dw} = dW_1\,, \tag{20'}$$

erhalten statt (21)

$$(\nu+1)\,M_\nu = \text{konst.} \int x^{\nu+1-\alpha} dW_1 \tag{21'}$$

wobei konst. > 0, und können hieraus die gleichen Schlüsse ziehen wie aus (21).

---

[1]) Gauss, Theoria combinationis observationum, Art. 4.

[2]) G. Faber, Stzber. d. Bayr. Akd. d. Wiss. Math. phys. Kl., München 1922, S. 7—21. Hier auch die Zitate von Krüger u. Winckler.

Damit ist (18) für alle $\nu > \mu > -1$ bewiesen. Man sieht aber leicht ein, daß M_ν für $\nu < -1$ nicht in Betracht kommt. Denn damit ein solches M_ν existiert, müßte $w(0) = 0$, also, da w nicht zunimmt, w identisch 0 sein. Es ist somit gezeigt: *Für eindimensionale Verteilungen, deren Dichte nach außen nicht zunimmt, bildet* $\ln[(\nu+1)\,M_\nu]$ *als Funktion von* ν *im ganzen Definitionsbereich eine nach unten konvexe Linie.*

Der Gaußsche Satz gestattet auch eine Ausdehnung auf mehrdimensionale Verteilungen, wenn man entsprechende Annahmen über deren Dichte macht. Z. B. ergibt sich für 2 Dimensionen durch Produkt-Integration

$$M_{\alpha\beta} = \int\int x^\alpha y^\beta w\,dx\,dy = -\frac{1}{\alpha+1}\int\int x^{\alpha+1} y^\beta \frac{\partial w}{\partial x}\,dx\,dy$$
$$= \frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}\int\int x^{\alpha+1} y^{\beta+1} \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy, \tag{22}$$

sobald $w(x, y)$ mit seinen Ableitungen im Unendlichen hinreichend stark verschwindet. Ist also $\frac{\partial w}{\partial x}$ ständig nicht-positiv, so verhält sich $(\alpha+1)\,M_{\alpha\beta}$ wie ein Moment, ist $\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$ stets nicht-negativ, so gilt dasselbe von dem Produkt $(\alpha+1)(\beta+1)\,M_{\alpha\beta}$ u. s. f.

§ 3. Anwendung des Schwerpunktsatzes.

Sind $f(u)$, $g(u)$ monotone Funktionen und so beschaffen, daß in einem Cartesischen Koordinatensystem die Linie $x = f(u)$, $y = g(u)$ konvex nach unten ist, so kann man vom Schwerpunkt einer positiven Belegung auf der Linie aussagen, daß er *nicht unterhalb der Kurve* liegt. Ist also $\varphi(u) \geqq 0$ und $\int \varphi\,dW > 0$, so gilt für die Schwerpunkt-Koordinaten der Belegung $\varphi\,dW$

$$\xi = \frac{\int x\,\varphi\,dW}{\int \varphi\,dW} = \frac{\mathfrak{E}(f\varphi)}{\mathfrak{E}(\varphi)}, \quad \eta = \frac{\int y\,\varphi\,dW}{\int \varphi\,dW} = \frac{\mathfrak{E}(g\varphi)}{\mathfrak{E}(\varphi)},$$

daß $\eta \geqq g(u^*)$, wenn $\xi = f(u^*)$, mithin

$$\mathfrak{E}(g\varphi) \geqq \mathfrak{E}(\varphi)\cdot g(u^*) \quad \text{bei} \quad \mathfrak{E}(f\varphi) = \mathfrak{E}(\varphi)\cdot f(u^*). \tag{23}$$

Die Voraussetzung der Konvexität und die für φ lauten:

$$g'' - \frac{g'}{f'} f'' \geqq 0, \quad \varphi \geqq 0. \tag{23'}$$

Wendet man dies — unter der Annahme $u \geqq 0$ — auf die Momente an, indem man setzt

$$\varphi(u) = u^\alpha, \quad f(u) = u^\mu, \quad g(u) = u^\nu,$$

so erhält man

$$M_{\alpha+\nu} \geqq M_\alpha \left(\frac{M_{\alpha+\mu}}{M_\alpha}\right)^{\frac{\nu}{\mu}} \quad \text{bei} \quad \nu(\nu-\mu) > 0. \tag{24}$$

Dies ist wieder die in § 1 abgeleitete Konvexität der (logarithmierten) Momentenkurve. Andere Beispiele, Ausdehnung auf mehrdimensionale Verteilungen usf. können hier übergangen werden.

§ 4. Ein weiteres Verfahren.

Es scheint, daß die in § 1 und § 3 angedeuteten Methoden nicht ausreichen, um die für die Anwendungen wichtigsten Abschätzungen zu liefern. Jedenfalls hat sich zur genauen Eingrenzung der *Momente mit negativen Exponenten* der folgende Gedankengang bewährt.

Um — zunächst im Eindimensionalen — eine obere Schranke für $\mathfrak{E}(f)$ zu finden, wähle man ein $g(x) > 0$, für das der Quotient $f : g$ nach oben konvex ist. Es gibt dann

zu jedem ξ ein $\varkappa$ derart, daß

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leqq \frac{f(\xi)}{g(\xi)} + \varkappa(x - \xi). \tag{25}$$

Verfügt man über ξ derart, daß

$$\int (x - \xi)\, g\, dW = 0, \quad \xi = \frac{\int x g\, dW}{\int g\, dW}, \tag{26}$$

so folgt aus (25)

$$\mathfrak{E}(f) \leqq \frac{f(\xi)}{g(\xi)}\, \mathfrak{E}(g). \tag{27}$$

Sind z. B. die Wachstumstellen von W auf den Bereich $x \geqq c > 0$ beschränkt, so kann man bei geeignetem f

$$g = x - c$$

wählen, so daß mit den Bezeichnungen (15)

$$\xi = \frac{M_2 - c\, M_1}{M_1 - c} = \frac{a^2 + s^2 - ac}{a - c} = a + \frac{s^2}{a - c}, \tag{28}$$

durch Mittelwert a und Streuung s^2 der Verteilung bestimmt wird. Ist zudem $f(c) = 0$, so wird in der Ungleichheit (27), die jetzt lautet

$$\mathfrak{E}(f) \leqq \frac{f(\xi)}{\xi - c}(a - c) = f(\xi)\, \frac{(a - c)^2}{(a - c)^2 + s^2} \tag{29}$$

das Gleichheitszeichen erreicht, wenn die Verteilung W nur zwei Wachstumstellen aufweist, nämlich die Sprünge

$$\frac{s^2}{(a - c)^2 + s^2} \text{ bei } x = c \text{ und } \frac{(a - c)^2}{(a - c)^2 + s^2} \text{ bei } x = \xi.$$

Eine hinreichende Bedingung für die Anwendbarkeit von (29) besteht darin, daß außer $f(c) = 0$, $f'(c)$, $f''(c)$ endlich, auch $f'''(x) \leqq 0$ für $x > 0$ gilt. Denn es folgt dann aus der Identität

$$\frac{d}{dx}\left[(x - c)^3 \frac{d^2}{dx^2} \frac{f(x)}{x - c}\right] \equiv (x - c)^2 f'''(x),$$

daß der Ausdruck in der eckigen Klammer, der für $x = c$ verschwindet, mit wachsendem x nur abnehmen kann, daß also die zweite Ableitung des Quotienten $f : (x - c)$ niemals bei $x > 0$ positiv wird; somit ist hier $f : g$ konvex nach oben. Aus (28) folgt $\xi > 0$, weil notwendig $a \geqq c$.

Alle Voraussetzungen treffen zu für

$$f(x) = \frac{1}{x^\nu} - \frac{1}{c^\nu} \text{ bei } \nu > 0 \text{ oder } -2 < \nu < -1 \tag{30}$$

und hierfür liefert (29) und (28)

$$\mathfrak{E}\left(\frac{1}{x^\nu}\right) \leqq \frac{1}{(a - c)^2 + s^2}\left[\frac{s^2}{c^\nu} + \frac{(a - c)^{\nu+2}}{(a^2 + s^2 - ac)^\nu}\right]. \tag{31}$$

Die genau gleiche Überlegung zeigt, daß wenn die Wachstumstellen von W zwischen zwei positive Zahlen $c_1 < c_2$ liegen, der Erwartungswert beiderseits durch analoge Ausdrücke eingegrenzt wird:

Für positive ν, wie für alle zwischen -1 und -2 gelegenen ν bleibt das $(-\nu)$-te Moment einer Verteilung, die nur im positiven Intervall c_1, c_2 Wachstumstellen besitzt, in den Grenzen

$$(32)\qquad \frac{1}{(a-c_2)^2+s^2}\left[\frac{s^2}{c_2^\nu}+\frac{(a-c_2)^{\nu+2}}{(a^2+s^2-ac_2)^\nu}\right] \leqq \mathfrak{E}\left(\frac{1}{x^\nu}\right) \leqq \frac{1}{(a-c_1)^2+s^2}\left[\frac{s^2}{c_1^\nu}+\frac{(a-c_1)^{\nu+2}}{(a^2+s^2-ac_1)^\nu}\right].$$

Beide Grenzen können erreicht werden, wenn die Zahl der Wachstumstellen von W sich auf 2 reduziert. Geht c_2 gegen ∞, so geht bei $\nu > 0$ das linke Außenglied der Ungleichheit in $a^{-\nu}$ über, den Wert, der aus der allgemeinen Momenten-Relation (Konvexität des Dreiecks M_ν, M_0, M_1) folgt.

Ist ν eine *ganze Zahl*, so hat es auch einen Sinn, nach den Schranken von $\mathfrak{E}\left(\frac{1}{x^\nu}\right)$ unter der Bedingung zu fragen, daß die Wachstumstellen von $W(x)$ nur der Forderung $|x| \geqq c$ unterworfen sind. Man sieht leicht, daß für das $f(x)$ aus (30) die aus (25) mit $g = x - c$ für $x \geqq c$ folgende Ungleichheit

$$(33)\qquad f(x) \leqq \frac{f(\xi)}{g(\xi)}(x-c) + \varkappa(x-\xi)(x-c) \equiv F(x)$$

bei positivem ξ auch für $x \leqq -c$ gilt. Denn $F(x)$ stellt die Parabel dar, die die Linie $f(x)$ in $x = c$ schneidet und in $x = \xi$ berührt. Da $f(x)$ monoton abnimmt, hat $F(x)$ für $x < c$ nach links wachsende Werte, ist also für $x \leqq -c$ sicher größer als $f(x)$, das hier immer < 0 ist. Bei ungeradem ν besteht (33) auch für negative ξ, da dann die Parabel $F(x)$ bei $x > c$ nach rechts wachsende Werte aufweist; somit gilt (32) für ungerade ν auch unter der erweiterten Voraussetzung $|x| \leqq c$ mit $c_1 = c$, $c_2 = -c$.

Besitzt $W(x)$ Wachstumstellen nur für $|x| \geqq c$, so gilt für positiv-ganze ungerade ν

$$(34)\qquad \frac{1}{(a+c)^2+s^2}\left[\frac{s^2}{(-c)^\nu}+\frac{(a-c)^{\nu+2}}{(a^2+s^2+ac)^\nu}\right] \leqq M_{-\nu} \leqq \frac{1}{(a-c)^2+s^2}\left[\frac{s^2}{c^\nu}+\frac{(a-c)^{\nu+2}}{(a^2+s^2-ac)^\nu}\right]$$

Für $\nu = 1$ erhält man aus (34)

$$(35)\qquad \frac{s^2-ac-c^2}{-c(a^2+s^2+ac)} \leqq \mathfrak{E}\left(\frac{1}{x}\right) \leqq \frac{s^2+ac-c^2}{c(a^2+s^2-ac)},$$

was offenbar mehr besagt als die aus (14) mit $f = 1$, $g = x$, $K = 1 : c$ folgende Ungleichheit

$$\left|\mathfrak{E}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{a}\right| < \frac{s^2}{ca^2}.$$

Aus (34) und (35) kann man leicht Sätze über die Koeffizienten von *Polynomen mit lauter reellen Nullstellen* gewinnen. Denn stellt man sich unter W die Verteilung vor, die an den Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Sprünge von der Größe $1 : n$ besitzt, so gilt für die — reell vorausgesetzten — n Nullstellen von

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots a_{n-1} x + a_n = 0$$

nach bekannten Formeln der Algebra:

$$a_1 = -\Sigma x_\nu = -n\,\mathfrak{E}(x) = -na$$

$$a_2 = \Sigma x_\iota x_\varkappa = \frac{1}{2}(\Sigma x_\nu)^2 - \frac{1}{2}\Sigma x_\nu^2 = \frac{1}{2}n^2a^2 - \frac{n}{2}(a^2+s^2)$$

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\Sigma\frac{1}{x_\nu} = -n\,\mathfrak{E}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Demnach liefert (35), sobald bekannt ist, daß alle $|x_\nu| \geqq c$:

$$(36)\qquad -\frac{1}{c}\left[n-\frac{(a_1+nc)^2}{a_1^2-2a_2+a_1c}\right] \leqq \frac{a_{n-1}}{a_n} \leqq \frac{1}{c}\left[n-\frac{(a_1-nc)^2}{a_1^2-2a_2-a_1c}\right].$$

Die Grenzen sind unter gewissen Ganzzahligkeits-Bedingungen erreichbar.

Auch auf mehrdimensionale Aufgaben ist die Methode anwendbar, etwa indem man Funktionen $f(x, y)$ betrachtet, für die

$$\frac{f(x, y)}{\alpha + \beta x + \gamma y}$$

konvex ist, so daß man den Ansatz (25) darauf sinngemäß übertragen kann.

§ 5. Verteilungsfolgen mit Verdichtung.

Gewisse in der Praxis gelegentlich schon verwendete Formeln (von denen ein Spezialfall am Schluß von § 1 erwähnt wurde), lassen sich in der folgenden Weise begründen:

Man betrachtet eine unbegrenzte Folge von Verteilungen $V_1(x)$, $V_2(x)$, $V_3(x)$, ..., die in noch näher zu bestimmender Weise gegen eine Verteilung, die nur an *einer* Stelle $x = a$ eine Stufe von der Höhe 1 besitzt, konvergieren. Wollte man annehmen, daß die $V_n(x)$ differenzierbar sind, so würden die „Dichten" $dV_n(x) : dx$ als Funktion von x betrachtet die „Verdichtungserscheinung" anschaulich zeigen: sie würden überall außer bei $x = a$ gegen 0, hier aber gegen ∞ gehen derart, daß der von der Kurve und der x-Achse eingeschlossene Flächenraum den Wert 1 dauernd behält.

Wir wollen jedoch nicht die Differenzierbarkeit von $V_n(x)$ voraussetzen, dafür aber eine bestimmte — später noch etwas zu erweiternde — Art des Grenzüberganges. Es sei einerseits eine Verteilung $W(x)$ gegeben, die den Mittelwert a und die Streuung s^2 besitzt andrerseits je eine Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \ldots$; $s_1^2, s_2^2, s_3^2, \ldots$, von denen die erstere gegen a, die zweite gegen 0 konvergiert:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \to a; \qquad s_1^2, s_2^2, s_3^2, \ldots \to 0. \tag{37}$$

Die Folge der $V_n(x)$ sei nun definiert durch

$$V_n(x_n) = W(x) \quad \text{mit} \quad \frac{x_n - a_n}{s_n} = \frac{x - a}{s}. \tag{38}$$

Es entsteht also die Linie $V_n(x)$ aus $W(x)$ durch Verschiebung in der x-Richtung um $a_n - a$ und *Zusammendrängung der Abszissen* im Verhältnis $s_n : s$. Man erkennt sofort, daß a_n und s_n^2 Mittelwert und Streuung von $V_n(x)$ sind.

Um den Erwartungswert $\mathfrak{E}_n(f)$ einer Funktion f bezüglich der Verteilung $V_n(x)$ abzuschätzen, nehmen wir an, $f(x)$ sei wenigstens dreimal stetig differenzierbar und setzen an

$$f(x_n) = f(a_n) + (x_n - a_n) f'(a_n) + \frac{1}{2}(x_n - a_n)^2 f''(a_n) + \frac{1}{6}(x_n - a_n)^3 f'''(x'), \tag{39}$$

wo x', wie bekannt, ein zwischen a_n und x_n gelegener Abszissenwert ist. Durch Integration über $dV_n(x_n)$ erhalten wir

$$\mathfrak{E}_n(f) = f(a_n) + 0 + \frac{1}{2} f''(a_n) s_n^2 + \frac{1}{6}\int (x_n - a_n)^3 f'''(x')\, dV_n(x_n). \tag{40}$$

Für das letzte Integral rechts kann zufolge (38) auch geschrieben werden

$$\int (x_n - a_n)^3 f'''(x')\, dW(x) = \frac{s_n^3}{s^3}\int (x - a)^3 f'''(x')\, dW(x). \tag{40'}$$

Alle weitere Überlegung beruht auf der Annahme, daß das Integral

$$\int |x - a|^3 f'''(x')\, dW(x) \tag{40''}$$

eine *von n unabhängige obere Schranke* besitzt. Unter dieser Voraussetzung liefert (40) zufolge (40') die Limes-Aussage

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2}\left[\mathfrak{E}_n(f) - f(a_n) - \frac{1}{2} s_n^2 f''(a_n)\right] = 0 \tag{41}$$

die man kürzer als „asymptotische" Formel schreibt:

$$\mathfrak{E}_n(f) \sim f(a_n) + \frac{1}{2} s_n^2 f''(a_n). \tag{41'}$$

Um diese Formeln, also im wesentlichen die Beschränktheit von (40″), sicherzustellen, muß man noch zusätzliche Annahmen über das Verhältnis von $W(x)$ und $f'''(x)$ machen. Ist z. B. $|f'''(x)|$ beschränkt, so genügt etwa die Forderung, daß $W(x)$ ein endliches absolutes drittes Moment $\int |x-a|^3\, dW(x)$ aufweist. Ist andererseits der Bereich der Wachstumstellen von W beiderseits im Endlichen begrenzt, so genügt es, daß $f'''(x)$ bei $x = a$ endlich und stetig ist. Ein allgemeinerer Fall ist der, daß $f'''(x)$ eine Majorante $\varphi(x)$ besitzt

$$|f'''(x)| \leqq \varphi(x),$$

für die $\int |x-a|^3\, \varphi(x)\, dW(x)$ existiert wobei $\varphi(x)$ mit wachsendem $|x-a|$ niemals abnimmt. Die Bedingungen können auch kombiniert werden.

Will man z. B. (41′) auf $f = \sqrt{x}$ anwenden, so kann man etwa annehmen, daß $W(x)$ nur für $x \geqq 0$ Wachstumstellen besitzt. Dies reicht aus, da $f'''(x)$ für $x \geqq a$ beschränkt, für $x \leqq a$ die Verteilung begrenzt ist. Die am Schlusse von § 1 erwähnte Behauptung ist damit als *asymptotische Formel*

$$\mathfrak{E}_n(\sqrt{x}) \sim \sqrt{a_n} - \frac{1}{8} \frac{s_n^2}{a_n^2} \sqrt{a_n} \tag{42}$$

für große n, also kleine s_n^2 sichergestellt; aber dabei bleibt das Wesentliche, daß der Übergang zu kleinen s_n^2 durch *affine Transformation* (Zusammenziehen der Abszissen) aus einer regulären Verteilung erfolgt, nicht wie im Beispiel am Schluß von § 1 durch einen beliebigen andern Prozeß.

Der hier angedeutete Gedanke ist verschiedener Erweiterungen und Modifikationen fähig. Man kann z. B. die Entwicklung (39) schon beim zweiten Glied abbrechen und erhält

$$[f(x_n) - f(a_n)]^2 = f'^2(a_n)\,(x_n - a_n)^2 + f'(a_n) \cdot f''(x')\,(x_n - a_n)^3 + \cdots.$$

Unter analogen Voraussetzungen wie früher ergibt Integration über $dW_n(x_n)$ asymptotisch, d. h. bis auf Glieder höherer Ordnung in s_n^2

$$\mathfrak{E}_n\{[f(x_n) - f(a_n)]^2\} \sim f'^2(a_n) \cdot s_n^2. \tag{43}$$

Die linke Seite unterscheidet sich von dem Erwartungswert der Größe $[f(x_n) - \mathfrak{E}_n(f)]^2$, den man als $\mathfrak{Str}_n(f)$ „Streuung von f", in bezug auf W_n zu bezeichnen pflegt, nur um $[\mathfrak{E}_n(f) - f(a_n)]^2$ und dies Quadrat ist nach (40) von der Größenordnung s_n^4, so daß für (43) auch

$$\mathfrak{Str}_n(f) \sim f'^2(a_n) \cdot s_n^2 \tag{43'}$$

geschrieben werden kann:

In einer Folge von Verteilungen, die durch unbegrenztes Zusammenziehen der Abszissen aus einer festen Verteilung hervorgehen, gilt — unter gewissen Einschränkungen für f und W — für Erwartungswert und Streuung von f die Gleichung (41′) *und* (43′) *asymptotisch für kleine s_n^2.*

Weiter kann man sehen, daß das Erfülltsein von (38) nicht für *alle* n notwendig ist; es genügt, daß die $V_n(x_n)$ gegen Verteilungen *konvergieren*, die aus $W(x)$ durch sukzessive Zusammenziehung der Abszissen hervorgehen. Man kann statt (38)

$$V_n(x_n) = W_n(x) \text{ mit } \frac{x_n - a_n}{s_n} = \frac{x - a}{s} \tag{44}$$

setzen, wobei $W_1(x)$, $W_2(x)$, ... gegen die feste Verteilung $W(x)$ mit dem Mittelwert a und der Streuung s^2 gleichmäßig konvergieren. Es gelten dann immer noch die asymptotischen Formeln (41′) und (43′), wenn a_n und s_n^2 Mittelwert und Streuung von $V_n(x)$ bedeuten und verlangt wird, daß an Stelle von (40″) das Integral

$$\int |x - a|^3 f'''(x')\, dW_n(x) \tag{45}$$

eine von n unabhängige obere Schranke besitzt. Diese Verhältnisse liegen vor bei den Limes-Verteilungen, zu denen die beiden *Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*[1]) führen; hier ist $W'(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ und für $f(x)$ kann beispielsweise jedes Polynom gesetzt werden.

Schließlich kann der Gedankengang auf *mehrdimensionale Verteilungen* ausgedehnt werden. Man erhält unter analogen Voraussetzungen für die Verteilungen $V_n(x_n, y_n)$ und die Funktion $f(x_n, y_n)$, wenn die Mittelwert- und Streuungskomponenten von $V_n(x_n, y_n)$ analog (4) und (5) mit a_n, b_n; s_n^2, R_n, t_n^2 bezeichnet werden, die Ableitungen von f mit f_{xx}, f_{xy} usf:

$$\mathfrak{E}_n(f) \sim f(a_n, b_n) + \frac{1}{2}\left[s_n^2 f_{xx}(a_n, b_n) + 2R_n f_{xy}(a_n, b_n) + t_n^2 f_{yy}(a_n, b_n)\right] \tag{46}$$

und mit der gleichen Annäherung

$$\mathfrak{Str}_n(f) \sim s_n^2 f_x^2(a_n, b_n) + 2R_n f_x(a_n, b_n) f_y(a_n, b_n) + t_n^2 f_y^2(a_n, b_n). \tag{47}$$

Beide asymptotische Formeln gelten nur, wenn die Verteilungen $V_1, V_2, V_3, \ldots$ durch affine Transformation, nämlich durch Zusammenziehen der Abszissen in der x- und in der y-Richtung, entweder aus einer festen Verteilung $W(x, y)$ oder einer Folge gegen $W(x, y)$ gleichmäßig konvergierender Verteilungen hervorgehen.

Beispielsweise ergibt (46) und (47) für $f = x : y$, wenn die Wachstumstellen von $V_n(x_n, y)$ auf $x > 0$, $y > 0$ beschränkt sind und $b_n > 0$:

$$\mathfrak{E}_n\left(\frac{x}{y}\right) \sim \frac{a_n}{b_n} + \frac{1}{b_n^2}\left[\frac{a_n}{b_n} t_n^2 - R_n\right] \tag{48}$$

und

$$\mathfrak{Str}_n\left(\frac{x}{y}\right) \sim \frac{1}{b_n^2}\left[s_n^2 - \frac{2a_n}{b_n} R_n + \frac{a_n^2}{b_n^2} t_n^2\right]. \tag{49}$$

Setzt man $f = x^\nu y^\mu$, so erhält man aus (46) in

$$\mathfrak{E}_n(x^\nu y^\mu) \sim a_n^\nu b_n^\mu \left[1 + \frac{\nu(\nu-1)}{2}\frac{s_n^2}{a_n^2} + \nu\mu\frac{R_n}{a_n b_n} + \frac{\mu(\mu-1)}{2}\frac{t_n^2}{b_n^2}\right] \tag{50}$$

ein weit über die Ergebnisse von § 1 hinausgehendes Resultat. Es gilt aber nur asymptotisch für Folgen von Verteilungen ganz bestimmter Art. Auch im mehrdimensionalen Fall gilt, daß die Grenzübergänge, zu denen die „Fundamentalsätze" führen, gerade die Voraussetzungen erfüllen, die hier für das Verhalten der $V_n(x, y)$ in (44) gemacht werden.

Mit dem Problemkreis dieses Paragraphen hat sich am ausführlichsten G. Bohlmann beschäftigt [2]); doch scheint es, daß er nicht zu den entscheidenden Ergebnissen gelangt ist.

---

[1]) Vgl. R. v. Mises, Math. Zeitschr. **4** (1919), S. 1—97.

[2]) G. Bohlmann, Math. Ann. **74** (1913), 341—409.

Eingegangen 10. März 1931.

Zur Variationsrechnung.

Zweite Mitteilung [1]).

Das isoperimetrische Problem.

Von *Leon Lichtenstein* in Leipzig.

Variationsprobleme sind besonders geartete Randwertaufgaben. Bei vorgeschriebenen Grenz- oder Randbedingungen sind hier Funktionen zu bestimmen, die vorgegebenen Integralen extremale Werte erteilen. Es liegt darum nahe, sich bei Behandlung der Variationsprobleme derjenigen Methoden zu bedienen, die in der Theorie der Randwertaufgaben ausgebildet worden sind. Dieser Weg führt bei dem einfachsten Problem der ein- oder mehrdimensionalen Variationsrechnung von selbst auf diejenige Form der Jacobischen notwendigen Bedingung, die in dem besonderen Falle der Minimalflächen zuerst von H. A. Schwarz in einer berühmten Abhandlung angegeben worden ist [2]): Der kleinste positive Eigenwert der durch einen Parameter erweiterten Jacobischen Differentialgleichung muß $\geqq 1$ sein [3]).

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem isoperimetrischen Problem bei einfachen Integralen in der vor-Weierstraßschen Fassung. Für die erweiterte Jacobische Differentialgleichung tritt jetzt eine mit einem Parameter behaftete Integro-Differentialgleichung ein. Die der Untersuchung der zweiten Variation entspringende für das Eintreten eines Extremums notwendige Bedingung lautet jetzt: Der kleinste positive „nicht triviale“ Eigenwert λ_1 der vorerwähnten Integro-Differentialgleichung muß $\geqq 1$ sein. Gilt hier das Zeichen $>$, so liegt ein schwaches Extremum vor. Ist aber $\lambda_1 = 1$, so müssen Glieder höherer Ordnung herangezogen werden. Es gelingt wie in der ersten Mitteilung eine unbegrenzte Folge einerseits notwendiger, anderseits hinreichender Kriterien aufzustellen.

Das Verfahren läßt sich ohne Schwierigkeiten auf das isoperimetrische Problem in Parameterdarstellung sowie bei freier Begrenzung und, was wichtiger ist, auf zwei- und mehrdimensionale Variationsprobleme übertragen. Ich gedenke auf diesen Gegenstand an einer anderen Stelle zurückzukommen.

---

[1]) Man vergleiche hierzu L. Lichtenstein, Zur Variationsrechnung. Erste Mitteilung, Göttinger Nachrichten 1919, S. 161—192. Zum Verständnis der folgenden Ausführungen ist die Kenntnis der ersten Mitteilung nicht erforderlich.

[2]) Vgl. H. A. Schwarz, Über ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung, Acta societatis scientiarum Fennicae **15** (1885), S. 315—362; Gesammelte mathematische Abhandlungen, Band I, S. 223—269.

[3]) Vgl. die erste Mitteilung, S. 169, und, was Doppelintegrale betrifft, die Arbeiten: L. Lichtenstein, Untersuchungen über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme. I. Das einfachste Problem bei fester Begrenzung. Jacobische Bedingung und die Existenz des Feldes. Verzweigung der Extremalflächen, Monatshefte für Math. u. Physik **28** (1917), S. 3—51; zweite Abhandlung. Das einfachste Problem bei fester und bei freier Begrenzung, Math. Zeitschrift **5** (1919), S. 26—51.

§ 1.

Es sei $\mathring{y}(x)$ eine in dem abgeschlossenen Intervalle $\langle a, b\rangle$ nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktion, und es möge $\mathfrak{R}$ ein Gebiet in der Ebene x-y bezeichnen, welches das Linienstück $y = \mathring{y}(x)$ ganz in seinem Innern enthält. Es seien weiter $f(x, y, y')$, $g(x, y, y')$ zwei für alle (x, y) in $\mathfrak{R}$ und alle y' erklärte analytische und reguläre Funktionen ihrer drei Argumente. Indem wir unter $y = y(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ ein Stück einer Kurve mit stetiger Tangente in einer Umgebung erster Ordnung von $\mathring{y}(x)$ verstehen, und überdies annehmen, daß

$$y(a) = y_0(a), \qquad y(b) = y_0(b)$$

gilt, mithin, daß $y = y(x)$ die Punkte $(a, y_0(a))$, $(b, y_0(b))$ miteinander verbindet, setzen wir

$$(1) \qquad I\{y\} = \int_a^b f(x, y, y')\, dx, \qquad K\{y\} = \int_a^b g(x, y, y')\, dx$$

und fragen nach den Bedingungen dafür, daß *die Funktion* $\mathring{y}(x)$ *dem Integralausdruck, in der Sprache des Funktionalkalküls, dem Funktional* $I\{y\}$ *einen Extremalwert erteilt, wenn zur Konkurrenz Funktionen* $y(x)$ *der soeben betrachteten Klasse zugelassen werden, die dem Funktional* $K\{y\}$ *einen festen Wert erteilen,*

$$(2) \qquad K\{y\} = \int g(x, y, y')\, dx = \int g(x, \mathring{y}, \mathring{y}')\, dx = K\{\mathring{y}\}.$$

Es sei $\eta(x)$ eine beliebige, nebst ihrer Ableitung stetige, für $x = a$ und $x = b$ verschwindende Funktion in $\langle a, b\rangle$. Wir schreiben, unter ε einen dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Wert verstanden,

$$(3) \quad \Delta I\{\eta\} = I\{\mathring{y} + \varepsilon\eta\} - I\{\mathring{y}\} = \varepsilon\, I_1\{\eta\} + \varepsilon^2\, I_2\{\eta\} + \varepsilon^3\, I_3\{\eta\} + \cdots$$

mit

$$I_1\{\eta\} = \int (\mathring{f}_y\, \eta + \mathring{f}_{y'}\, \eta')\, dx = \int (\mathring{f}_y - \frac{d}{dx}\, \mathring{f}_{y'})\, \eta\, dx,$$

$$(4) \qquad I_2\{\eta\} = \frac{1}{2} \int (\mathring{f}_{yy}\, \eta^2 + 2\, \mathring{f}_{yy'}\, \eta\eta' + \mathring{f}_{y'y'}\, \eta'^2)\, dx,$$

$$\mathring{f}_y = f_y(x, \mathring{y}, \mathring{y}'), \qquad \mathring{f}_{yy} = f_{yy}(x, \mathring{y}, \mathring{y}'), \ldots$$

und analog hierzu

$$(5) \quad \Delta K\{\eta\} = K\{\mathring{y} + \varepsilon\eta\} - K\{\mathring{y}\} = \varepsilon K_1\{\eta\} + \varepsilon^2\, K_2\{\eta\} + \varepsilon^3\, K_3\{\eta\} + \cdots.$$

Es möge auch $\bar{\eta}(x)$ eine beliebige nebst ihrer Ableitung in $\langle a, b\rangle$ erklärte stetige, für $x = a$ und $x = b$ verschwindende Funktion bezeichnen. Wir setzen zur Abkürzung

$$(6) \qquad \begin{aligned} I_2\{\eta, \bar{\eta}\} &= \tfrac{1}{2} \int (\mathring{f}_{yy}\, \eta\bar{\eta} + \mathring{f}_{yy'}(\eta\bar{\eta}' + \eta'\bar{\eta}) + \mathring{f}_{y'y'}\, \eta'\bar{\eta}')\, dx, \\ K_2\{\eta, \bar{\eta}\} &= \tfrac{1}{2} \int (\mathring{g}_{yy}\, \eta\bar{\eta} + \mathring{g}_{yy'}(\eta\bar{\eta}' + \eta'\bar{\eta}) + \mathring{g}_{y'y'}\, \eta'\bar{\eta}')\, dx. \end{aligned}$$

Augenscheinlich ist

$$(7) \qquad \begin{aligned} I_2\{\eta, \eta\} &= I_2\{\eta\}, \quad K_2\{\eta, \eta\} = K_2\{\eta\}, \\ I_2\{\eta + \bar{\eta}\} &= I_2\{\eta\} + 2\, I_2\{\eta, \bar{\eta}\} + I_2\{\bar{\eta}\}. \end{aligned}$$

Es wird keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeuten, wenn wir annehmen, daß $\mathring{y}(x)$ dem Funktional I ein relatives Minimum erteilt,

$$(8) \qquad I\{\mathring{y}\} = \int f(x, \mathring{y}, \mathring{y}')\, dx \leqq \int f(x, y, y')\, dx = I\{y\}.$$

Es sei $\eta_1(x)$ eine bestimmte, nebst ihren Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetige, in a und b verschwindende Funktion in $\langle a, b\rangle$, so daß

$$K_1\{\eta\} \neq 0$$

ist. Funktionen $\eta_1(x)$ mit den verlangten Eigenschaften existieren gewiß, falls, wie wir es annehmen wollen, $\mathring{y}(x)$ keine Extremalkurve von $K\{y\}$ ist, mithin $K_1\{\eta\}$ nicht für alle η verschwindet. Es sei weiter η, wie vorhin, eine beliebige in a und b verschwindende stetige Funktion in $\langle a, b\rangle$, die daselbst stetige Ableitung hat. Wir setzen

$$\zeta = \eta + \psi\eta_1, \quad y = \mathring{y} + \varepsilon\zeta = \mathring{y} + \varepsilon\eta + \varepsilon\psi\eta_1, \tag{9}$$

$$\psi = \psi\{\eta, \eta_1, \varepsilon\} = \psi_0 + \psi_1\varepsilon + \psi_2\varepsilon^2 + \cdots, \tag{10}$$

unter ψ, ψ_0, ψ_1, ψ_2, ... geeignete Funktionale von η und $\frac{d\eta}{dx}$ verstanden, und suchen ψ so zu bestimmen, daß für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen ε und alle unterhalb einer festen Schranke gelegenen $|\eta|$, $\left|\frac{d\eta}{dx}\right|$ die Beziehung

$$\Delta K = \varepsilon K_1\{\eta + \psi\eta_1\} + \varepsilon^2 K_2\{\eta + \psi\eta_1\} + \varepsilon^3 K_3\{\eta + \psi\eta_1\} + \cdots = 0 \tag{11}$$

oder, was dasselbe bedeutet,

$$-K_1\{\eta_1\}\psi = K_1\{\eta\} + \varepsilon K_2\{\eta + \psi\eta_1\} + \varepsilon^2 K_3\{\eta + \psi\eta_1\} + \cdots \tag{12}$$

statt hat [4]). Aus der allgemeinen Theorie nichtlinearer Integralgleichungen folgt die Existenz des Funktionals ψ von den verlangten Eigenschaften. Sie kann auf die einfachste Weise bsp. durch sukzessive Approximationen bewiesen werden.

Es macht keine Schwierigkeiten, die Funktionale ψ_0, ψ_1, ψ_2 usw. explizite zu bestimmen. Durch Nullsetzen der Koeffizienten der einzelnen Potenzen von ε in (12) finden wir nacheinander

$$K_1\{\eta\} + \psi_0 K_1\{\eta_1\} = 0,$$

mithin

$$\psi_0 = -\frac{K_1\{\eta\}}{K_1\{\eta_1\}} = -\frac{1}{\omega} K_1\{\eta\}, \qquad \omega = K_1\{\eta_1\} \tag{13}$$

und

$$\psi_1 K_1\{\eta_1\} + K_2\{\eta + \psi_0\eta_1\} = 0,$$

darum

$$\psi_1 = -\frac{1}{\omega} K_2\{\eta + \psi_0\eta_1\}, \tag{14}$$

schließlich

$$\psi_2\omega + 2K_2\{\eta, \eta_1\}\psi_1 + 2K_2\{\eta_1\}\psi_0\psi_1 + K_3\{\eta + \psi_0\eta_1\} = 0,$$

d. h.

$$\psi_2\omega + 2K_2\{\eta + \psi_0\eta_1, \eta_1\}\psi_1 + K_3\{\eta + \psi_0\eta_1\} = 0,$$

demnach

$$\psi_2 = \frac{2}{\omega^2} K_2\{\eta + \psi_0\eta_1\} K_2\{\eta + \psi_0\eta_1, \eta_1\} - \frac{1}{\omega} K_3\{\eta + \psi_0\eta_1\}. \tag{15}$$

---

[4]) Der Ausdruck $\frac{1}{\varepsilon}\Delta K$ stellt in der Bezeichnungsweise von Herrn Schmidt eine Integralpotenzreihe in η, $\frac{d\eta}{dx}$, η_1, $\frac{d\eta_1}{dx}$, ε dar. Vgl. E. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III. Teil, Math. Annalen **65** (1908), S. 370—399. Herr Schmidt bedient sich zur Auflösung der von ihm betrachteten nichtlinearen Integralgleichungen einer Majorantenmethode. Man vergleiche auch meine soeben erschienene Schrift, „Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integral- und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen", wo die Konvergenzbeweise von einem einheitlichen Gesichtspunkte aus durchgeführt sind. Den Existenzbeweisen liegt dort das Verfahren der sukzessiven Approximationen zugrunde.

Es sei, unter M eine feste Zahl verstanden,

$$\left|\frac{d\eta}{dx}\right| \leqq M\,. \tag{16}$$

Aus $\eta(x) = \int_a^x \left|\frac{d\eta}{dx}\right| dx$ folgt augenscheinlich

$$|\eta| < \int_a^b \left|\frac{d\eta}{dx}\right| dx \text{ und } |\eta| < M(b-a), \tag{17}$$

ferner

$$\eta^2 = \Big(\int_a^x \frac{d\eta}{dx}\,dx\Big)^2 < \int_a^x \Big(\frac{d\eta}{dx}\Big)^2 dx \int_a^x dx \leqq (b-a)\int_a^b \Big(\frac{d\eta}{dx}\Big)^2 dx\,. \tag{18}$$

Wir schreiben jetzt (12) in der Form

$$\begin{aligned} -K_1\{\eta_1\}\,\psi &= \Delta K\{\eta\} + \varepsilon\,[K_2\{\eta+\psi\eta_1\} - K_2\{\eta\}] + \varepsilon^2[K_3\{\eta+\psi\eta_1\} - K_3\{\eta\}] + \cdots \\ &= \Delta K\{\eta\} + \Lambda\{\psi,\eta\}\,\varepsilon\psi \end{aligned} \tag{19}$$

und bemerken, daß sich aus der allgemeinen Theorie wegen (19) leicht folgern läßt, daß für alle $|\varepsilon| \leqq \varepsilon_0$ und alle (16) und (17) genügenden η

$$|\psi| \leqq \beta_1\,|\Delta K\{\eta\}| \qquad (\beta_1 \text{ konstant}) \tag{20}$$

gilt. Beachtet man, daß

$$|\Delta K\{\eta\}| = \Big|\int_a^b (\tilde{g}_y\,\eta + \tilde{g}_{y'}\,\eta')\,dx\Big|, \quad \tilde{g}_y = g_y(x, \mathring{y} + \vartheta\varepsilon\eta,\ \mathring{y}' + \vartheta\varepsilon\eta'), \ldots, \qquad 0 < \vartheta < 1$$

ist, so findet man jetzt unmittelbar wegen (17) und (20)

$$|\psi| \leqq \beta_2 \int_a^b \left|\frac{d\eta}{dx}\right| dx, \tag{21}$$

unter β_2 eine Konstante verstanden, wie auch später unter $\beta_3, \beta_4, \ldots$

Wegen (9), (17), (21) ist also gewiß

$$|\zeta| < \beta_3 \int_a^b \left|\frac{d\eta}{dx}\right| dx, \quad \zeta^2 < \beta_4 \int_a^b \Big(\frac{d\eta}{dx}\Big)^2 dx\,. \tag{22}$$

Ferner gelten wegen

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{d\eta}{dx} + \psi\,\frac{d\eta_1}{dx}$$

die weiteren Ungleichheiten

$$\left|\frac{d\zeta}{dx}\right| < \left|\frac{d\eta}{dx}\right| + \beta_2 \left|\frac{d\eta_1}{dx}\right| \int_a^b \left|\frac{d\eta}{dx}\right| dx\,, \tag{22'}$$

somit auch

$$\int_a^b \left|\frac{d\zeta}{dx}\right| dx < \beta_5 \int_a^b \left|\frac{d\eta}{dx}\right| dx\,, \quad \int_a^b \Big(\frac{d\zeta}{dx}\Big)^2 dx < \beta_6 \int_a^b \Big(\frac{d\eta}{dx}\Big)^2 dx \tag{23}$$

und wegen (16), (22) und (22′)

$$|\zeta| < M_1, \quad \left|\frac{d\zeta}{dx}\right| < M_2 \qquad (M_1, M_2 \text{ konstant}). \tag{23'}$$

Es sei weiter (vgl. (9) und (10))

$$\zeta = \eta + \psi_0 \eta_1 + \varepsilon \Psi \eta_1, \qquad \Psi = \psi_1 + \varepsilon \psi_2 + \cdots \tag{24}$$

gesetzt. Die Gleichung

$$\Delta K = \varepsilon K_1\{\eta + \psi_0 \eta_1 + \varepsilon \Psi \eta_1\} + \varepsilon^2 K_2\{\eta + \psi_0 \eta_1 + \varepsilon \Psi \eta_1\} + \cdots = 0$$

kann jetzt wegen $K_1\{\eta + \psi_0 \eta_1\} = 0$ (vgl. (13)) nach Division mit ε^2 auf die Form

$$-K_1\{\eta_1\}\Psi = R_1, \qquad R_1 = \tfrac{1}{2}\int_a^b (\tilde{g}_{yy}\zeta^2 + 2\tilde{g}_{yy'}\zeta\zeta' + \tilde{g}_{y'y'}\zeta'^2)\,dx,$$

$$\tilde{g}_{yy} = g_{yy}(x, \mathring{y} + \varepsilon\theta\zeta, \quad \mathring{y}' + \varepsilon\theta\zeta'), \cdots, \qquad 0 < \theta < 1$$

gebracht werden. Wegen (23′) ist nunmehr, da $|\tilde{g}_{yy}|$, $|\tilde{g}_{yy'}|$, $|\tilde{g}_{y'y'}|$ unterhalb einer festen Schranke liegen,

$$|\Psi| < \beta_7 \int_a^b |\zeta^2|\,dx + \beta_8 \int_a^b |\zeta\zeta'|\,dx + \beta_9 \int_a^b \zeta'^2\,dx,$$

mithin nach (22) und (23) einfacher

$$|\Psi| < \beta_{10} \int_a^b \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 dx. \tag{25}$$

Wir gehen einen Schritt weiter und setzen

$$\zeta = \eta + \psi_0 \eta_1 + \varepsilon \psi_1 \eta_1 + \varepsilon^2 \Psi_1 \eta_1, \qquad \Psi_1 = \psi_2 + \varepsilon \psi_3 + \cdots. \tag{26}$$

Die Gleichung

$$\Delta K = \varepsilon K_1\{\eta + \psi_0\eta_1 + \varepsilon\psi_1\eta_1 + \varepsilon^2\Psi_1\eta_1\} + \varepsilon^2 K_2\{\eta + \psi_0\eta_1 + \varepsilon\Psi\eta_1\} + \varepsilon^3 K_3\{\zeta\} + \cdots = 0$$

kann wegen (13) und (14) nach Division mit ε^3 leicht auf die Form

$$-K_1\{\eta_1\}\Psi_1 = 2K_2\{\eta + \psi_0\eta_1,\ \Psi\eta_1\} + \varepsilon K_2\{\Psi\eta_1\} + R_2$$

mit

$$R_2 = \frac{1}{3!}\int_a^b (\zeta^3 \hat{g}_{yyy} + 3\zeta^2\zeta'\hat{g}_{yyy'} + 3\zeta\zeta'^2\hat{g}_{yy'y'} + \zeta'^3\hat{g}_{y'y'y'})\,dx,$$

$$\hat{g}_{yyy} = g_{yyy}(x, \mathring{y} + \varepsilon\theta_1\zeta,\ \mathring{y}' + \varepsilon\theta_1\zeta'), \cdots, \qquad 0 < \theta_1 < 1$$

gebracht werden. Man leitet hieraus ohne Mühe die Ungleichheitsbeziehung

$$|\Psi_1| < \beta_{11} \int_a^b \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 dx \tag{27}$$

ab. Ebenso ließe sich zeigen, daß

$$|\Psi_2| < \beta_{12} \int_a^b \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 dx, \qquad \Psi_2 = \psi_3 + \varepsilon\psi_4 + \cdots$$

$$|\Psi_3| < \beta'_{12} \int_a^b \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 dx, \qquad \Psi_3 = \psi_4 + \varepsilon\psi_5 + \cdots \tag{28}$$

gilt, usw.

Wir setzen zur Vereinfachung

$$\hat{\zeta} = \eta + \psi_0\eta_1 = \eta - \frac{1}{\omega} K_1\{\eta\}\,\eta_1, \tag{29}$$

darum

$$\zeta = \hat{\zeta} - \frac{\varepsilon}{\omega} K_2\{\hat{\zeta}\}\eta_1 + \varepsilon^2\psi_2\eta_1 + \cdots. \tag{29′}$$

Wegen (13) und (17) ist augenscheinlich

$$(30)\quad |\hat{\zeta}| < \beta_{13}\int_a^b \left|\frac{d\eta}{dx}\right| dx, \qquad \int_a^b \left(\frac{d\hat{\zeta}}{dx}\right)^2 dx = \int_a^b \left(\frac{d\eta}{dx} + \psi_0 \frac{d\eta_1}{dx}\right)^2 dx < \beta_{14}\int_a^b \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 dx\,.$$

Es sei noch einmal daran erinnert, daß ΔK für alle durch (29′) gegebenen ζ verschwindet.

Wir bestimmen nunmehr für eben diese ζ die Gesamtzunahme des Integralausdruckes I

$$(31)\qquad \Delta I\{\zeta\} = \varepsilon I_1\{\zeta\} + \varepsilon^2 I_2\{\zeta\} + \varepsilon^3 I_3\{\zeta\} + \cdots.$$

Es gilt

$$I_1\{\zeta\} = I_1\{\hat{\zeta}\} - \frac{\varepsilon}{\omega} K_2\{\hat{\zeta}\} I_1\{\eta_1\} + ((\varepsilon^2))$$

$$(32)\qquad = I_1\{\eta\} - \frac{1}{\omega} K_1\{\eta\} I_1\{\eta_1\} - \frac{\varepsilon}{\omega} K_2\{\hat{\zeta}\} I_1\{\eta_1\} + ((\varepsilon^2))\,,$$

unter $((\varepsilon^2))$ die Gesamtheit der Glieder zweiten und höheren Grades in ε verstanden,

$$(33)\qquad I_2\{\zeta\} = I_2\{\hat{\zeta}\} + ((\varepsilon))\,,$$

und, mit

$$\frac{1}{\omega} I_1\{\eta_1\} = \mu\,,$$

$$(34)\quad \Delta I\{\zeta\} = \varepsilon(I_1\{\eta\} - \mu K_1\{\eta\}) + \varepsilon^2 (I_2\{\hat{\zeta}\} - \mu K_2\{\hat{\zeta}\}) + ((\varepsilon^3))\,.$$

Wir schreiben zur Vereinfachung

$$(35)\qquad l(x, y, y') = f(x, y, y') - \mu g(x, y, y')\,,$$
$$L\{y\} = \int l(x, y, y')\, dx$$

und erhalten endgültig

$$(36)\qquad \Delta I\{\zeta\} = \varepsilon L_1\{\eta\} + \varepsilon^2 L_2\{\hat{\zeta}\} + ((\varepsilon^3))\,.$$

Als *die erste für das Eintreten eines Extremums notwendige Bedingung* ergibt sich

$$L_1\{\eta\} = \int (\mathring{l}_y \eta + \mathring{l}_{y'} \eta')\, dx = 0$$

für alle in $\langle a, b\rangle$ nebst ihrer Ableitung stetigen, in a und b verschwindenden $\eta(x)$ (die Eulersche Regel). Durch teilweise Integration ergibt sich jetzt in bekannter Weise die Eulersche Gleichung

$$(37)\qquad \mathring{l}_y - \frac{d}{dx}\mathring{l}_{y'} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathring{l}_{y'y'}\mathring{y}'' + \mathring{l}_{y'y}\mathring{y}' + \mathring{l}_{y'x} - \mathring{l}_y = 0\,^{5}).$$

Aus

$$L_1\{\eta\} = I_1\{\eta\} - \mu K_1\{\eta\} = 0$$

folgt, sofern $K_1\{\eta\} \neq 0$ ist,

$$\frac{I_1\{\eta\}}{K_1\{\eta\}} = \mu\,.$$

Demnach hängt μ nicht von η_1 ab.

Als *eine zweite für das Eintreten eines* (schwachen relativen) *Minimums notwendige Bedingung* finden wir

$$(38)\qquad L_2\{\hat{\zeta}\} = I_2\{\hat{\zeta}\} - \mu K_2\{\hat{\zeta}\} \geqq 0\,.$$

---

[5]) Vgl. O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig und Berlin 1909, S. 462—463. Dort liegt der Betrachtung die Weierstraßsche Parameterdarstellung zugrunde.

Wegen (29) und (13) ist augenscheinlich $K_1\{\hat{\zeta}\} = 0$. Andererseits läßt sich jede in $\langle a, b\rangle$ nebst ihrer Ableitung stetige, in a und b verschwindende Funktion $\hat{\zeta}$ mit $K_1\{\hat{\zeta}\} = 0$ gewiß in der Form (29) mit $\eta = \hat{\zeta}$ darstellen. *Also besagt* (38), *daß die zweite Variation des Integralausdruckes* $L\{y\}$ *für kein* $\hat{\zeta}$, *das nebst* $\frac{d\hat{\zeta}}{dx}$ *in* $\langle a, b\rangle$ *stetig ist und die Beziehungen*

$$\hat{\zeta}(a) = \hat{\zeta}(b) = 0, \quad K_1\{\hat{\zeta}\} = 0$$

erfüllt, einen negativen Wert annehmen darf (Weierstraßsche Bedingung)[6].

In bekannter Weise folgt hieraus vor allem, daß entlang der Extremalen $\mathring{y}$ jedenfalls $\mathring{l}_{y'y'} \geqq 0$ sein muß[7]. Wir nehmen im folgenden $\mathring{l}_{y'y'} > 0$ an.

Aus (37) folgt in bekannter Weise, daß die Extremale $\mathring{y}$ in $\langle a, b\rangle$ analytisch und regulär ist.

§ 2.

Wir wenden uns nunmehr einer Transformation des Ausdruckes $L_2\{\hat{\zeta}\}$, die uns eine neue Fassung der Weierstraßschen Bedingung liefern wird, zu.

Vor allem gibt eine teilweise Integration in bekannter Weise

$$L_2\{\hat{\zeta}\} = \frac{1}{2}\int \{\mathring{l}_{yy}\hat{\zeta}^2 + 2\mathring{l}_{yy'}\,\hat{\zeta}\hat{\zeta}' + \mathring{l}_{y'y'}\,\hat{\zeta}'^2\}\,dx = \frac{1}{2}\int \{\mathring{l}_{y'y'}\,\hat{\zeta}'^2 + \hat{\zeta}^2\,(\mathring{l}_{yy} - \frac{d}{dx}\mathring{l}_{yy'})\}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int (pu'^2 - ku^2)\,dx$$

mit

$$(39) \qquad p = \mathring{l}_{y'y'}, \quad k = \frac{d}{dx}\mathring{l}_{yy'} - \mathring{l}_{yy}, \quad u = \hat{\zeta}$$

und, indem wir

$$(40) \quad v, v_1 \text{ für } \eta \text{ und } \eta_1, \text{ ferner } K_1\{v\} = \int (\mathring{g}_y - \frac{d}{dx}\mathring{g}_{y'})\,v\,dx = \int \mathfrak{G}\,v\,dx$$

schreiben,

$$(41) \qquad u = v - \frac{v_1}{\omega}\,K_1\{v\} = v - \frac{v_1}{\omega}\int \mathfrak{G}\,v\,dt\,,$$

$$2L_2\{u\} = \int (pu'^2 - ku^2)\,dx = \int pv'^2\,dx - 2\int pv'v_1'dx\,\frac{\int \mathfrak{G}v\,dt}{\omega} + \int pv_1'^2\,dx\left(\frac{\int \mathfrak{G}v\,dt}{\omega}\right)^2$$
$$- \int kv^2\,dx + 2\int kv\,v_1\,dx\,\frac{\int \mathfrak{G}v\,dt}{\omega} - \int kv_1^2\,dx\left(\frac{\int \mathfrak{G}v\,dt}{\omega}\right)^2,$$

oder wegen

$$\int pv'v_1'\,dx = -\int v\,\frac{d}{dx}\,(pv_1')\,dx,\,[8])$$

$$2L_2\{u\} = \int pv'^2\,dx + 2\int v\,\frac{d}{dx}\,(pv_1')\,dx\,\frac{\int \mathfrak{G}v\,dt}{\omega} + \int pv_1'^2\,dx\left(\frac{\int \mathfrak{G}v\,dt}{\omega}\right)^2 - \int kv^2\,dx$$
$$+ 2\int kvv_1\,dx\,\frac{\int \mathfrak{G}v\,dt}{\omega} - \int kv_1^2\,dx\left(\frac{\int \mathfrak{G}v\,dt}{\omega}\right)^2,$$

---

[6]) Vgl. O. Bolza, loc. cit. [5]) S. 472.

[7]) Vgl. bsp. bei O. Bolza a. a. O. S. 472—473. Dort liegt, wie vorhin erwähnt, der Betrachtung die Weierstraßsche Parameterdarstellung zugrunde.

[8]) Da $\mathring{y}$ nach Voraussetzung stetige Ableitungen der beiden ersten Ordnungen hat, so besitzt p gewiß eine stetige Ableitung erster Ordnung.

kürzer

$$2L_2\{u\} = \int pv'^2\,dx - \int kv^2\,dx + \iint N(x,t)\,v(x)\,v(t)\,dx\,dt \tag{42}$$

mit

$$N(x,t) = -\mathfrak{G}(x)\,\mathfrak{G}(t)\,\frac{\int kv_1^2\,d\tau}{\omega^2} + \mathfrak{G}(x)\,\mathfrak{G}(t)\,\frac{\int pv_1'^2\,d\tau}{\omega^2} + \frac{1}{\omega}\,\mathfrak{G}(x)\,\frac{d}{dt}\,(pv_1') + \frac{1}{\omega}\,\mathfrak{G}(t)\,\frac{d}{dx}\,(pv_1') + \frac{1}{\omega}\,\mathfrak{G}(x)\,k(t)\,v_1(t) + \frac{1}{\omega}\,\mathfrak{G}(t)\,k(x)\,v_1(x)\,. \tag{43}$$

Offenbar ist

$$N(x,t) = N(t,x)\,. \tag{44}$$

Die zweite für das Eintreten eines Minimums notwendige Bedingung erhält nunmehr die Gestalt: *Der Ausdruck* (42) *darf für keine in a und b verschwindende, nebst ihrer Ableitung erster Ordnung stetige Funktion v einen negativen Wert annehmen.*

§ 3.

Betrachten wir jetzt, unter $\boldsymbol{N}(x,t)$ eine beliebige in dem Rechteck $a \leqq x \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ erklärte stetige symmetrische Funktion verstanden, die nicht identisch verschwindet, die Integro-Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\Big(p\,\frac{dv}{dx}\Big) + \lambda(kv - \int \boldsymbol{N}(x,t)\,v(t)\,dt) = 0\,. \tag{45}$$

Nach bekannten Sätzen hat (45) für unendlich viele reelle Werte des Parameters λ, die sich nur in den Punkten $-\infty$ und $+\infty$ häufen können, Lösungen, die sich nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung in $\langle a, b\rangle$ stetig verhalten und die in den Endpunkten dieses Intervalls verschwinden [9]). Es seien

$$\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \cdots \tag{46}$$

die positiven,

$$\lambda_{-1} \geqq \lambda_{-2} \geqq \lambda_{-3} \geqq \cdots \tag{47}$$

die negativen Eigenwerte. Die zugehörigen Eigenfunktionen

$$\varphi_1(x),\quad \varphi_2(x),\quad \varphi_3(x),\ldots;\qquad \varphi_{-1}(x),\quad \varphi_{-2}(x),\quad \varphi_{-3}(x),\ldots \tag{48}$$

erfüllen die „Orthogonalitätsrelationen“

$$\int_a^b k(x)\,\varphi_\alpha(x)\,\varphi_\beta(x)\,dx - \int_a^b\int_a^b \boldsymbol{N}(x,t)\,\varphi_\alpha(x)\,\varphi_\beta(t)\,dx\,dt = 0 \qquad (\alpha \neq \beta) \tag{49}$$

und lassen sich den Beziehungen

$$\int_a^b k(x)\,\varphi_\alpha^2(x)\,dx - \int_a^b\int_a^b \boldsymbol{N}(x,t)\,\varphi_\alpha(x)\,\varphi_\alpha(t)\,dx\,dt = \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \tag{50}$$

gemäß normieren. Wohl bemerkt können Eigenwerte der einen oder der anderen der beiden Reihen (46) oder (47) auch ganz fehlen.

Es sei $v(x)$ irgendeine nebst ihrer Ableitung in $\langle a, b\rangle$ stetige Funktion mit $v(a) = v(b) = 0$. Es gilt

$$\int kv^2\,dx - \iint \boldsymbol{N}(x,t)\,v(x)\,v(t)\,dx\,dt = \sum_j^{-\infty\cdots\infty} \frac{\lambda_j}{|\lambda_j|}\{\int k\varphi_j\,v\,dx - \iint \boldsymbol{N}(x,t)\,v(x)\,\varphi_j(t)\,dx\,dt\}^2 = \sum \frac{\lambda_j}{|\lambda_j|}\,x_j^2\,, \tag{51}$$

$$\int p\Big(\frac{dv}{dx}\Big)^2 dx \geqq \sum_j^{-\infty\cdots\infty} |\lambda_j|\,\{\int k\varphi_j\,v\,dx - \iint \boldsymbol{N}(x,t)\,v(x)\,\varphi_j(t)\,dx\,dt\}^2 = \Sigma|\lambda_j|\,x_j^2\,. \tag{52}$$

[9]) Vgl. L. Lichtenstein, Über eine Integro-Differentialgleichung und die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach deren Eigenfunktionen, Schwarz Festschrift, Berlin 1914, S. 274—285.

Hat die Integralgleichung

$$k(x)\, v_*(x) - \int N(x,t)\, v_*(t)\, dt = 0 \tag{53}$$

keine von Null verschiedene, in der Form $v_*(x) = \sum_j^{1\cdots\infty} \frac{l_j}{j} \sin jx$ mit konvergenter Quadratsumme $\sum_j^{1\cdots\infty} l_j^2$ darstellbare (somit insbesondere für $x = a$ und $x = b$ verschwindende) Lösung, so gilt in (52) das Gleichheitszeichen. Die Funktion $v(x)$ läßt sich in diesem Falle in eine gleichmäßig konvergente Reihe

$$v(x) = \sum_j^{-\infty\cdots\infty} x_j\, \varphi_j(x)$$

entwickeln [10]). Ist $G(\xi, x)$ die auf dem Rande verschwindende Greensche Funktion der Differentialgleichung $\frac{d}{dx}\left(p\frac{dv}{dx}\right) = 0$, so gilt schließlich

$$G(x,y) = \sum \frac{\varphi_j(x)\ \varphi_j(y)}{|\lambda_j|}\ ^{11}). \tag{53'}$$

Die unendliche Reihe rechter Hand, wie übrigens auch die Reihe $\sum \frac{|\varphi_j(x)|\,|\varphi_j(y)|}{|\lambda_j|}$ konvergiert gleichmäßig.

Alle vorstehenden Behauptungen gelten fast unverändert für die etwas allgemeinere Integro-Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dv}{dx}\right) + qv + \lambda\,(kv - \int N(x,t)\, v(t)\, dt) = 0\,,$$

unter q eine in $\langle a, b\rangle$ erklärte stetige, etwa durchaus negative Funktion verstanden. In (53′) bezeichnet diesmal $G(\xi, x)$ die zu der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dv}{dx}\right) + qv = 0$$

gehörige Greensche Funktion. In (52) tritt nunmehr linker Hand der Ausdruck $\int p\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx - \int qv^2\, dx$ auf.

§ 4.

Es ist leicht zu sehen, daß der am Schluß des § 2 eingeführte Ausdruck $N(x, t)$ dann und nur dann identisch verschwindet, wenn in $\langle a, b\rangle$ durchweg

$$\chi\{v_1(x)\} \equiv \frac{d}{dx}\,(pv_1') + kv_1 = 0 \tag{54}$$

ist. In der Tat ist nach (43), wie man leicht verifiziert,

$$\begin{aligned} N(x,t) &= \frac{1}{\omega}\,\mathfrak{G}(x)\,\chi\{v_1(t)\} + \frac{1}{\omega}\,\mathfrak{G}(t)\,\chi\{v_1(x)\} - \frac{1}{\omega^2}\,\mathfrak{G}(x)\,\mathfrak{G}(t)\int v_1(\tau)\,\chi\{v_1(\tau)\}\,d\tau \\ &= A(x)\,B(t) + A(t)\,B(x) + \alpha\,A(x)\,A(t) \end{aligned} \tag{55}$$

mit

---

[10]) Übrigens ist auch die Reihe $\Sigma|x_j|\,|\varphi_j(x)|$ gleichmäßig konvergent.

[11]) Die Funktion $G(\xi, x)$ ist der Bedingung $\left[\frac{\partial G}{\partial x}\right]_{\xi+0} - \left[\frac{\partial G}{\partial x}\right]_{\xi-0} = -\frac{1}{p(\xi)}$ gemäß normiert zu denken.

$$(56)\quad A(x)=\frac{1}{\omega}\mathfrak{G}(x),\qquad B(x)=\chi\{v_1(x)\},\qquad \alpha=-\int v_1(\tau)\,\chi\{v_1(\tau)\}d\tau,$$

darum

$$N(x,x)=A(x)\,(2\,B(x)+\alpha\,A(x)).$$

Da $A(x)$ gewiß nicht identisch verschwindet, so folgt aus $N(x,x)=0$

$$(57)\quad B(x)=-\frac{\alpha}{2}A(x),\ \text{also auch}\ \int B(x)\,v_1(x)dx=-\frac{\alpha}{2}\int A(x)\,v_1(x)dx,$$

mithin wegen $\omega=\int\mathfrak{G}(x)\,v_1(x)dx$, d. h. $\int A(x)\,v_1(x)dx=1$ nach (56)

$$\int\chi\{v_1(x)\}\,v_1(x)\,dx=-\frac{\alpha}{2}$$

und der letzten der Beziehungen (56) zufolge $\alpha=0$, somit wegen (57)

$$(58)\qquad B(x)=0,\quad \text{d. h.}\quad \chi\{v_1(x)\}=0.$$

Diese Bedingung ist aber für das identische Verschwinden von $N(x,t)$ auch hinreichend. In der Tat folgt aus (56) und (58) $\alpha=0$, darum nach (55) identisch $N(x,t)=0$.

Wir betrachten jetzt die Integro-Differentialgleichung

$$(59)\qquad \frac{d}{dx}\Big(p\frac{dw}{dx}\Big)+kw-\int N(x,t)\,w(t)\,dt=0$$

und wollen zeigen, daß sie *nicht mehr als drei* (in a und b verschwindende) *Eigenfunktionen haben kann.*

Es möge zunächst die Differentialgleichung

$$(60)\qquad \frac{d}{dx}\Big(p\frac{dw}{dx}\Big)+kw=0$$

keine (in a und b verschwindende) Eigenfunktion haben, und es sei $\Gamma(\xi,x)=\Gamma(x,\xi)$ die, wie man weiß, alsdann gewiß vorhandene zu (60) gehörige Greensche Funktion,

$$(61)\qquad \chi\{\Gamma(\xi,x)\}=0,\quad \Gamma(\xi,a)=\Gamma(\xi,b)=0,$$
$$\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(\xi,x)\Big]_{\xi+0}-\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(\xi,x)\Big]_{\xi-0}=-\frac{1}{p(\xi)}.$$

Jetzt ist gewiß $N(x,t)$ nicht identisch gleich Null. Wegen (55) läßt sich die Integro-Differentialgleichung (59) in der Form

$$(62)\quad \frac{d}{dx}\Big(p\frac{dw}{dx}\Big)+kw-(r_2+\alpha r_1)A(x)-r_1B(x)=0,\quad r_1=\int A(t)\,w(t)\,dt,$$
$$r_2=\int B(t)\,w(t)\,dt$$

schreiben. Nach bekannten Sätzen folgt hieraus

$$(63)\qquad w(\xi)=-(r_2+\alpha r_1)\int\Gamma(\xi,x)\,A(x)\,dx-r_1\int\Gamma(\xi,x)\,B(x)\,dx.$$

Dies in (62) eingesetzt gibt weiter

$$(64)\quad \begin{aligned} r_1&=-(r_2+\alpha r_1)\iint\Gamma(\xi,x)\,A(\xi)\,A(x)\,dx\,d\xi-r_1\iint\Gamma(\xi,x)\,A(\xi)\,B(x)\,dx\,d\xi,\\ r_2&=-(r_2+\alpha r_1)\iint\Gamma(\xi,x)\,B(\xi)\,A(x)\,dx\,d\xi-r_1\iint\Gamma(\xi,x)\,B(\xi)\,B(x)\,dx\,d\xi.\end{aligned}$$

Diese zur Bestimmung von r_1 und r_2 dienenden Gleichungen lassen sich wesentlich vereinfachen, wenn man beachtet, daß

$$\int\Gamma(\xi,x)\,B(x)\,dx=\int\Gamma(\xi,x)\,\chi\{v_1(x)\}\,dx=-v_1(\xi),$$

darum

$$\iint\Gamma(\xi,x)\,B(x)\,B(\xi)\,dx\,d\xi=-\int\chi\{v_1(\xi)\}\,v_1(\xi)\,d\xi=\alpha,$$
$$\iint\Gamma(\xi,x)\,B(x)\,A(\xi)\,dx\,d\xi=-\frac{1}{\omega}\int v_1(\xi)\,\mathfrak{G}(\xi)\,d\xi=-1$$

ist. Wir finden so

$$r_1 = -\frac{r_2 + \alpha r_1}{\omega^2} \iint \Gamma(\xi, x)\, \mathfrak{G}(\xi)\, \mathfrak{G}(x)\, dx\, d\xi + r_1,$$

$$r_2 = (r_2 + \alpha r_1) - \alpha r_1.$$

Die zweite dieser beiden Gleichungen ist von selbst erfüllt, während die erste auf die Form

$$(r_2 + \alpha r_1) \iint \Gamma(\xi, x)\, \mathfrak{G}(\xi)\, \mathfrak{G}(x)\, dx\, d\xi = 0$$

gebracht werden kann.

Ist jetzt

$$\iint \Gamma(\xi, x)\, \mathfrak{G}(\xi)\, \mathfrak{G}(x)\, dx\, d\xi \neq 0\,, \tag{65}$$

so ist der Rang des Systems (64) gleich 1. Es gibt nur eine in a und b verschwindende Eigenfunktion der Integro-Differentialgleichung (59). Man erhält sie, indem man in (63) etwa $r_1 = 1$, $r_2 = -\alpha = \int v_1(\tau)\, \chi\{v_1(\tau)\}\, d\tau$ setzt, zu

$$w^{\mathrm{I}}(\xi) = -\int \Gamma(\xi, x)\, \chi\{v_1(x)\}\, dx = v_1(\xi)\,. \tag{66}$$

Aus Gründen, die etwas später klar werden, wollen wir diese Lösung als eine triviale Lösung bezeichnen.

Durch eine passende Wahl von v_1 kann man erreichen, daß $N(x, t)$ eine besonders einfache Form erhält. Wir wählen v_1 so, daß

$$\chi\{v_1(x)\} = \frac{\mathfrak{G}(x)}{\int \mathfrak{G}(\tau)\, v_1(\tau)\, d\tau} \int v_1(\tau)\, \chi\{v_1(\tau)\}\, d\tau, \quad \text{d. h.} \quad B(x) = -\alpha\, A(x) \tag{67}$$

wird. Dies ist tatsächlich möglich. Wir setzen eben

$$\chi\{v_1(x)\} = c\, \mathfrak{G}(x) \quad (c \neq 0 \text{ beliebig}), \tag{68}$$

somit

$$v_1(\xi) = -c \int \Gamma(\xi, x)\, \mathfrak{G}(x)\, dx\,,$$

und finden

$$\int v_1(\xi)\, \mathfrak{G}(\xi)\, d\xi = -c \iint \Gamma(\xi, x)\, \mathfrak{G}(\xi)\, \mathfrak{G}(x)\, dx\, d\xi \neq 0\,,$$

wie zu verlangen ist, sowie ferner wegen (68)

$$\int \chi\{v_1(x)\}\, v_1(x)\, dx = c \int \mathfrak{G}(x)\, v_1(x)\, dx\,,$$

so daß (67) in der Tat erfüllt ist. Jetzt wird aber

$$N(x, t) = N(t, x) = A(t)\, B(x) = \frac{1}{\omega}\, \mathfrak{G}(t)\, \chi\{v_1(x)\} \tag{69}$$

$$= \frac{1}{\omega^2}\, \mathfrak{G}(t)\, \mathfrak{G}(x) \int \chi\{v_1(\tau)\}\, v_1(\tau)\, d\tau = \frac{c}{\omega}\, \mathfrak{G}(t)\, \mathfrak{G}(x)\,.$$

Ist aber

$$\iint \Gamma(\xi, x)\, \mathfrak{G}(\xi)\, \mathfrak{G}(x)\, dx\, d\xi = 0\,, \tag{70}$$

so dürfen sowohl r_1 als auch r_2 willkürlich bleiben, der Rang des Systems (64) ist gleich 0. Es gibt zwei Eigenfunktionen. Man erhält eine zweite Eigenfunktion, indem man in (63) etwa $r_1 = 0$, $r_2 = -\omega$ setzt, zu

$$w^{\mathrm{II}}(\xi) = \int \Gamma(\xi, x)\, \mathfrak{G}(x)\, dx\,. \tag{71}$$

Offenbar ist

$$\chi\{w^{\mathrm{II}}(x)\} = -\mathfrak{G}(x) \tag{72}$$

und nach (70)

$$\int w^{\mathrm{II}}(x)\, \mathfrak{G}(x)\, dx = 0, \text{ darum auch } \int w^{\mathrm{II}}(x)\, \chi\{w^{\mathrm{II}}(x)\}\, dx = 0 \tag{73}$$

und nach einer teilweisen Integration auch

$$\int\left(p\left(\frac{dw^{\mathrm{II}}}{dx}\right)^2 - k(w^{\mathrm{II}})^2\right)dx = 0\,. \tag{74}$$

Augenscheinlich ist die Anzahl der Eigenfunktionen von der speziellen Wahl der Funktion v_1 unabhängig.

Es ist übrigens einleuchtend, daß die Lösungen $w^{\mathrm{I}}(\xi)$ und $w^{\mathrm{II}}(\xi)$ linear unabhängig sind. In der Tat ist

$$\int w^{\mathrm{II}}(x)\,\mathfrak{G}(x)\,dx = 0 \tag{74'}$$

und zugleich

$$\int w^{\mathrm{I}}(x)\,\mathfrak{G}(x)\,dx = \int v_1(x)\,\mathfrak{G}(x)\,dx = \omega \neq 0\,.$$

Wir hatten vorhin vorausgesetzt, daß die Differentialgleichung (60) keine Eigenfunktion hat. Es möge demgegenüber jetzt $w_*(x)$ die der Beziehung $\int w_*^2(x)\,dx = 1$ gemäß normierte Eigenfunktion von (60) sein,

$$\frac{d}{dx}\left(p\,\frac{dw_*}{dx}\right) + kw_* = 0, \qquad w_*(a) = w_*(b) = 0\,,$$

und es sei zunächst $\int \mathfrak{G}w_*\,dx \neq 0$.

Wir wählen $v_1 = w_*$ und erhalten dem auf S. 203 gewonnenen Ergebnis zufolge identisch $N(x,t) = 0$. Es gibt jetzt also natürlich nur eine einzige Eigenfunktion, die triviale Eigenfunktion

$$w^{\mathrm{I}} = w_* = v_1\,. \tag{75}$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß, wie man auch v_1 wählt, diesmal nur eine Eigenfunktion $w^{\mathrm{I}} = v_1$ existiert.

Es sei $\widehat{\Gamma}(\xi, x)$ die zu (60) gehörige Greensche Funktion „im erweiterten Sinne“,

$$\begin{gathered}\chi\{\widehat{\Gamma}(\xi,x)\} = w_*(\xi)\,w_*(x), \quad \widehat{\Gamma}(\xi,a) = \widehat{\Gamma}(\xi,b) = 0,\\ \left[\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(\xi,x)\right]_{\xi+0} - \left[\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(\xi,x)\right]_{\xi-0} = -\frac{1}{p(\xi)}\,,\\ \int\widehat{\Gamma}(\xi,x)\,p(x)\,w_*(x)\,dx = 0, \quad \widehat{\Gamma}(\xi,x) = \widehat{\Gamma}(x,\xi)\,.\end{gathered} \tag{76}$$

Nach bekannten Sätzen hat (62) Lösungen nur, wenn

$$(r_2 + \alpha r_1)\int Aw_*\,dt + r_1\int Bw_*\,dt = 0 \tag{77}$$

gilt. Da nun

$$\int Bw_*\,dt = \int\chi\{v(t)\}\,w_*(t)\,dt = \int\chi\{w_*(t)\}\,v_1(t)\,dt = 0$$

ist, so muß, da $\int Aw_*\,dt = \dfrac{1}{\omega}\int\mathfrak{G}w_*\,dt$ nicht verschwindet,

$$r_2 + \alpha r_1 = 0, \tag{78}$$

darum nach (62)

$$\frac{d}{dx}\left(p\,\frac{dw}{dt}\right) + kw - r_1 B(x) = 0 \tag{79}$$

sein. Aus (79) folgt

$$w = -r_1\int\widehat{\Gamma}(\xi,x)\,B(x)\,dx + cw_* \qquad (c \text{ konstant}), \tag{80}$$

mithin

$$r_1 = \int A(t)\,w(t)\,dt = -r_1\iint\widehat{\Gamma}(\xi,x)\,A(\xi)\,B(x)\,dx\,d\xi + c\int Aw_*\,dt,$$

oder, was dasselbe ist,

$$r_1\left(1 + \iint\widehat{\Gamma}(\xi,x)\,A(\xi)\,B(x)\,dx\,d\xi\right) = c\int Aw_*\,dt\,. \tag{81}$$

Diese Gleichung liefert c in Abhängigkeit von r_1, das willkürlich bleibt; w ist durch (80) bis auf einen multiplikativen Faktor bestimmt. Es gibt also jedenfalls nur eine Eigenfunktion. Führt man jetzt v_1 in (59) für w ein, so überzeugt man sich unmittelbar, daß diese Gleichung identisch erfüllt ist.

Ist entgegen unserer Annahme

$$(82) \qquad \int A w_* \, dt = \frac{1}{\omega} \int \mathfrak{G}(t) \, w_*(t) \, dt = 0,$$

so ist (77) identisch erfüllt.

Aus (62) folgt

$$(83) \qquad w = -(r_2 + \alpha r_1) \int \Gamma(\xi, x) A(x) \, dx - r_1 \int \widehat{\Gamma}(\xi, x) B(x) \, dx + c w_*,$$

mithin

$$r_1 = \int A(t) \, w(t) \, dt = -(r_2 + \alpha r_1) \iint \widehat{\Gamma}(\xi, x) A(\xi) A(x) \, dx \, d\xi - r_1 \iint \widehat{\Gamma}(\xi, x) A(\xi) B(x) \, dx \, d\xi,$$
$$r_2 = \int B(t) \, w(t) \, dt = -(r_2 + \alpha r_1) \iint \widehat{\Gamma}(\xi, x) B(\xi) A(x) \, dx \, d\xi - r_1 \iint \widehat{\Gamma}(\xi, x) B(\xi) B(x) \, dx \, d\xi,$$

da diesmal, wie man leicht sieht,

$$(83') \qquad \int A(t) \, w_*(t) \, dt = \int B(t) \, w_*(t) \, dt = 0$$

ist. Die zweite der zuletzt gewonnenen Gleichungen ist von selbst erfüllt. In der Tat ist nach bekannten Sätzen

$$\int \widehat{\Gamma}(\xi, x) B(x) \, dx = \int \widehat{\Gamma}(\xi, x) \, \chi\{v_1(x)\} \, dx = -v_1(\xi) + w_*(\xi) \int v_1(x) \, w_*(x) \, dx,$$

darum wegen (83')

$$\iint \widehat{\Gamma}(\xi, x) B(\xi) B(x) \, d\xi \, dx = -\int v_1(\xi) \, \chi\{v_1(\xi)\} \, d\xi = \alpha$$

und wegen (82)

$$(84) \qquad \iint \widehat{\Gamma}(\xi, x) A(\xi) B(x) \, dx \, d\xi = -\int v_1(\xi) \frac{\mathfrak{G}(\xi)}{\omega} \, d\xi = -1.$$

Die erste Gleichung liefert aber infolge (82)

$$(r_2 + \alpha r_1) \iint \widehat{\Gamma}(\xi, x) A(\xi) A(x) \, dx \, d\xi = 0.$$

Ist nun

$$\iint \widehat{\Gamma}(\xi, x) \, \mathfrak{G}(\xi) \, \mathfrak{G}(x) \, dx \, d\xi \neq 0,$$

mithin auch

$$\iint \widehat{\Gamma}(\xi, x) \, A(\xi) \, A(x) \, dx \, d\xi \neq 0,$$

so muß

$$r_2 + \alpha r_1 = 0$$

sein. Wir dürfen also c und r_1 willkürlich wählen und erhalten aus (83) als Eigenfunktionen

$$w^{\mathrm{I}} = \int \widehat{\Gamma}(\xi, x) \, B(x) \, dx = v_1 \qquad (r_1 = 1, \; c = \int v_1(x) \, w_*(x) \, dx)$$

und

$$w^{\mathrm{II}} = w_* \; (r_1 = 0, \; c = 1), \text{ darum } \chi\{w^{\mathrm{II}}(x)\} = 0.$$

Diese beiden Lösungen sind wegen (82) linear von einander unabhängig.

Ist aber außer (82) auch noch

$$(85) \qquad \iint \widehat{\Gamma}(\xi, x) \, \mathfrak{G}(\xi) \, \mathfrak{G}(x) \, dx \, d\xi = 0,$$

so sind die beiden Gleichungen, die wir für r_1 und r_2 abgeleitet halten, von selbst erfüllt, so daß r_1, r_2 und c beliebige Werte haben können. Es gibt eine dritte Eigenfunktion

$$(86) \qquad w^{\mathrm{III}} = \int \widehat{\Gamma}(\xi, x) \, \mathfrak{G}(x) \, dx \qquad (r_2 = -\omega, \; r_1 = 0, \; c = 0).$$

Offenbar ist jetzt wegen (82)

$$\chi\{w^{\mathrm{III}}(x)\} = -\mathfrak{G}(x)$$

und wegen (85) noch

(86′) $$\int w^{\mathrm{III}}(x)\,\mathfrak{G}(x)\,dx = 0\,.$$

Die drei Eigenfunktionen $w^{\mathrm{I}}(x)$, $w^{\mathrm{II}}(x)$, $w^{\mathrm{III}}(x)$ sind linear unabhängig. Aus

$$c^{(1)}\,w^{\mathrm{I}}(x) + c^{(2)}\,w^{\mathrm{II}}(x) + c^{(3)}\,w^{\mathrm{III}}(x) = 0$$

folgt nämlich nach Multiplikation mit $\mathfrak{G}(x)$ und Integration infolge (82) und (86′), da

$$\int w^{\mathrm{I}}(x)\,\mathfrak{G}(x)\,dx = \omega \neq 0$$

ist, zunächst $c^{(1)} = 0$, somit

$$c^{(2)}\,w^{\mathrm{II}}(x) + c^{(3)}\,w^{\mathrm{III}}(x) = 0\,,$$

darum auch

$$c^{(2)}\,\chi\,(w^{\mathrm{II}}) + c^{(3)}\,\chi\,(w^{\mathrm{III}}) = 0\,.$$

Nun ist aber $\chi(w^{\mathrm{II}}) = \chi(w_*) = 0$, wegen (82) $\chi(w^{\mathrm{III}}) = -\mathfrak{G}(x)$, also $c^{(2)} = 0$. Es ist übrigens einleuchtend, daß nur die triviale Eigenfunktion $w^{\mathrm{I}}(x) = v_1(x)$ von der speziellen Wahl von v_1 abhängt.

§ 5.

Nach dieser eingehenden Diskussion der Integro-Differentialgleichung (59) kehren wir zu den Betrachtungen des § 2 wieder zurück. Nach (41) gehört zu jeder die Bedingung $\int \mathfrak{G} u\,dx = 0$ erfüllenden Funktion u eine Schar der Funktionen v,

(87) $$v = u + \beta v_1 \text{ mit } \beta = \text{const.} = \frac{1}{\omega}\int \mathfrak{G} v\,dt\,.$$

Insbesondere gehört zu $u \equiv 0$ die Schar $v = \text{Const.}\,v_1$.

Wir denken uns im folgenden v stets so normiert, daß

(88) $$\int k v v_1\,dx - \int\int N(x,t)\,v(x)\,v_1(t)\,dx\,dt = 0$$

wird. Dies ist gewiß und zwar nur in einer einzigen Art und Weise möglich. Es sei in der Tat $v = u + \gamma v_1$, und es soll γ so bestimmt werden, daß v der Bedingung (88) genügt. Jetzt soll also

(89) $$\int k u v_1\,dx - \int\int N(x,t)\,u(x)\,v_1(t)\,dx\,dt + \gamma\Big[\int k v_1^2\,dx - \int\int N(x,t)\,v_1(x)\,v_1(t)\,dx\,dt\Big] = 0$$

sein. Der Koeffizient von γ hat, wie man leicht sieht, den Wert

$$-\int v_1 \frac{d}{dx}\Big(p\,\frac{dv_1}{dx}\Big)\,dx = \int p\Big(\frac{dv_1}{dx}\Big)^2\,dx > 0\ ^{12}),$$

also läßt sich γ aus (89) tatsächlich der vorgeschriebenen Bedingung gemäß bestimmen. Jetzt entspricht insbesondere $u \equiv 0$ die Funktion $v \equiv 0$.

Als eine zweite für das Eintreten eines (schwachen, relativen) Minimums notwendige Bedingung haben wir seiner Zeit die Bedingung

$$2L_2\{u\} = \int p v'^2\,dx - \int k v^2\,dx + \int\int N(x,t)\,v(x)\,v(t)\,dx\,dt \geqq 0$$

gefunden.

Wir führen jetzt wie auf S. 201 die zu der Integro-Differentialgleichung (45) mit $\boldsymbol{N}(x,t) = N(x,t)$ gehörigen Eigenwerte und Eigenfunktionen ein und bezeichnen sie diesmal, indem wir die triviale Eigenfunktion v_1 und den zugehörigen Eigenwert 1 aussondern, mit

---

[12]) Man beachte, daß v_1 der Integro-Differentialgleichung (59) genügt.

$$1;\ 0 < \mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \mu_3 \leqq \cdots;\quad 0 > \mu_{-1} \geqq \mu_{-2} \geqq \mu_{-3} \geqq \cdots,$$
$$v_1(x);\ \chi_1(x), \chi_2(x), \chi_3(x), \ldots;\quad \chi_{-1}(x), \chi_{-2}(x), \chi_{-3}(x), \ldots$$

Nach (51) und (52) gilt jetzt wegen (88)

$$(90)\quad 2L_2\{u\} \geqq \sum_j |\mu_j|\, y_j^2 \left(1 - \frac{1}{\mu_j}\right), \qquad y_j = \int k\chi_j\, v dx - \iint N(x,t)\, v(x)\, \chi_j(t)\, dx\, dt,$$

wo die Summe rechter Hand also über alle *nicht trivialen* Eigenfunktionen von (45) zu erstrecken ist.

Damit $L_2\{u\} \geqq 0$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß der kleinste positive nichttriviale Eigenwert $\mu_1 \geqq 1$ sei.

Daß diese Bedingung hinreichend ist, folgt ohne weiteres aus (90). Wäre andererseits $\mu_1 < 1$, so würde man für $v = \chi_1$

$$2L_2\{u\} = \mu_1 y_1^2 \left(1 - \frac{1}{\mu_1}\right) < 0$$

erhalten. Die Bedingung ist also auch notwendig.

Es sei jetzt $\mu_1 > 1$, und es möge q_* irgendeine zwischen $\frac{1}{\mu_1}$ und 1 enthaltene Zahl bezeichnen,

$$\frac{1}{\mu_1} < q_* < 1.$$

Es gilt wegen (51), (52) und (88)

$$\int p \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx = q_* \int p \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx + (1 - q_*) \int p \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx \geqq q_* \sum |\mu_j|\, y_j^2 + (1 - q_*) \int p \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx,$$

$$(91)\quad L_2\{u\} \geqq \frac{1}{2} \sum \left(q_* |\mu_j| - \frac{\mu_j}{|\mu_j|}\right) y_j^2 + \frac{1}{2} (1 - q_*) \int p \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx = \frac{1}{2} \sum |\mu_j| \left(q_* - \frac{1}{\mu_j}\right) y_j^2$$
$$+ \frac{1}{2} (1 - q_*) \int p \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx \geqq \frac{1}{2} (1 - q_*) \int p \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx.$$

Wir kehren jetzt zu der Formel (36) zurück und versuchen die Glieder dritten und höheren Grades der Entwicklung von $\Delta I\{\xi\}$ abzuschätzen.

Nach (36) ist wegen $L_1\{\eta\} = 0$ die Gesamtheit der Glieder erster und zweiter Ordnung in $\Delta I\{\zeta\}$ gleich $\varepsilon^2 L_2\{\hat{\zeta}\}$. Demnach ist (vgl. (31) und (33))

$$(92)\qquad \varepsilon^2 L_2\{\hat{\zeta}\} = \varepsilon I_1\{\hat{\zeta} + \varepsilon\psi_1 \eta_1\} + \varepsilon^2 I_2\{\hat{\zeta}\}.$$

Wegen (31) und (92) kann also ΔI auch in der Form

$$(93)\quad \Delta I = \varepsilon[I_1\{\zeta\} - I_1\{\hat{\zeta} + \varepsilon\psi_1 \eta_1\}] + \varepsilon^2[I_2\{\zeta\} - I_2\{\hat{\zeta}\}] + \varepsilon^2 L_2\{\hat{\zeta}\} + \varepsilon^3 I_3\{\zeta\} + \cdots$$

geschrieben werden. Nun ist (vgl. (9), (10) und (29))

$$I_1\{\zeta\} - I_1\{\hat{\zeta} + \varepsilon\psi_1 \eta_1\} = (\varepsilon^2 \psi_2 + \varepsilon^3 \psi_3 + \cdots)\, I_1\{\eta_1\},$$

darum wegen (26) und (27)

$$(94)\qquad |I_1\{\zeta\} - I_1\{\hat{\zeta} + \varepsilon\psi_1 \eta_1\}| < \varepsilon^2 \gamma_1 \int_a^b \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 dx,$$

unter γ_1 eine Konstante verstanden, wie auch später unter $\gamma_2, \gamma_3, \ldots$ Weiter ist

$$I_2\{\zeta\} - I_2\{\hat{\zeta}\} = 2I_2\{\hat{\zeta},\ \zeta - \hat{\zeta}\} + I_2\{\zeta - \hat{\zeta}\},$$
$$\zeta - \hat{\zeta} = (\varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \cdots)\, \eta_1,$$

also nach (24) und (25)

$$|\zeta - \hat{\zeta}| < \varepsilon\,\gamma_2 \int_a^b \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 dx, \quad \text{sowie} \quad \left|\frac{d}{dx}(\zeta - \hat{\zeta})\right| < \varepsilon\,\gamma_3 \int_a^b \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 dx,$$

darum gewiß (vgl. (30))

$$|I_2\{\zeta\} - I_2\{\hat{\zeta}\}| < \varepsilon\,\gamma_4 \int_a^b \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 dx. \tag{95}$$

Schließlich ist nach bekannten Sätzen

$$\varepsilon^3 I_3\{\zeta\} + \cdots = \frac{\varepsilon^3}{3!}\int_a^b \left[\tilde{f}_{y'y'y'}\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^3 + 3\tilde{f}_{y'y'y}\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2\zeta + 3\tilde{f}_{y'yy}\frac{d\zeta}{dx}\zeta^2 + \tilde{f}_{yyy}\zeta^3\right] dx,$$

woselbst bsp.

$$\tilde{f}_{y'y'y'} = f_{y'y'y'}(x, \mathring{y} + \varepsilon\theta\zeta,\ \mathring{y}' + \varepsilon\theta\zeta'), \qquad 0 < \theta < 1$$

gilt. Wir finden nacheinander wegen (23) und (16)

$$\left|\int_a^b \tilde{f}_{y'y'y'}\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^3 dx\right| < \gamma_5 \int_a^b \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 dx,$$

wegen (22), (23′) und (23)

$$\left|\int_a^b \tilde{f}_{y'y'y}\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 \zeta\,dx\right| < \gamma_6 \int_a^b \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 dx, \qquad \left|\int_a^b \tilde{f}_{y'yy}\frac{d\zeta}{dx}\zeta^2\,dx\right| < \gamma_7 \int_a^b \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 dx$$

und

$$\left|\int_a^b \tilde{f}_{yyy}\,\zeta^3\,dx\right| < \gamma_8 \int_a^b \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 dx,$$

darum, indem wir zugleich für η und $\hat{\xi}$ wie früher v und u setzen,

$$|\varepsilon^3 I_3\{\zeta\} + \cdots| < \varepsilon^3\,\gamma_9 \int_a^b \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx. \tag{96}$$

Alle zuletzt abgeleiteten Abschätzungen gelten für nicht identisch verschwindende v. Ist $v = 0$, so tritt überall das Gleichheitszeichen ein.

Aus (91), (93), (94), (95), (96) folgt nunmehr

$$\Delta I \geqq \frac{1}{2}(1 - q_*)\,\varepsilon^2 \int_a^b p\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx - \varepsilon^3\,\gamma_{10}\int_a^b \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx$$

und a fortiori

$$\Delta I \geqq \left(\frac{1}{2}(1 - q_*) - \frac{\varepsilon\gamma_{10}}{p_0}\right)\varepsilon^2 \int_a^b p\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx, \qquad p_0 = \operatorname{Min} p > 0.$$

Für hinreichend kleine $|\varepsilon|$ ist gewiß

$$\Delta I \geqq \varepsilon^2\,\gamma_{11} \int p\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx,$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für $v \equiv 0$, d. h. $\zeta = 0$. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

§ 6.

Wir wenden uns jetzt einer eingehenden Betrachtung des Falles $\mu_1 = 1$ zu. Wir nehmen dabei einstweilen an, daß die Integralgleichung

(96′) $$k(x)\, v_*(x) - \int N(x,t)\, v_*(t)\, dt = 0$$

keine von Null verschiedene, in der Form $v_*(x) = \sum_j^{1\cdots\infty} \frac{l_j}{j} \sin jx$ mit konvergenter Quadratsumme $\sum_j^{1\cdots\infty} l_j^2$ darstellbare Lösung hat und setzen zunächst auch noch voraus, daß die Integro-Differentialgleichung (59) nur eine nichttriviale Lösung $\chi_1(x)$ hat.

Wir schreiben

(97) $$v = y_1\, \chi_1(x) + \boldsymbol{v}$$

und erhalten, wie man sich leicht überzeugt (vgl. (90)),

(98) $$2L_2\{v\} = 2L_2\{\boldsymbol{v}\} = \Sigma' \mid \mu_j \mid \left(1 - \frac{1}{\mu_j}\right) y_j^2 .$$

Durch das Zeichen Σ' soll angedeutet werden, daß bei der Summation der Wert $j = 1$ außer Betracht bleibt.

Die Gesamtheit der Glieder dritter Ordnung von ΔI ist (vgl. (31), (9) und (10))

(99) $$\varepsilon^3 \Lambda_3\{v\} = \varepsilon^3 \psi_2\, I_1\{v_1\} + 2\varepsilon^3 \psi_1\, I_2\{v + \psi_0\, v_1, v_1\} + \varepsilon^3\, I_3\{v + \psi_0\, v_1\}$$ [13]).

Die durch die Formeln (13), (14), (15) erklärten Funktionale ψ_0, ψ_1, ψ_2 wollen wir jetzt ausführlicher mit

(100) $$\psi_0 = \psi_0\{v, v_1\}, \quad \psi_1 = \psi_1\{v, v_1\}, \quad \psi_2 = \psi_2\{v, v_1\}$$

bezeichnen. Es gilt speziell

$$\psi_0\{\chi_1, v_1\} = -\frac{1}{\omega} K_1\{\chi_1\} = \psi_0^*, \quad \psi_1\{\chi_1, v_1\} = -\frac{1}{\omega} K_2\{\chi_1 + \psi_0^*\, v_1\} = \psi_1^* ,$$

$$\psi_2\{\chi_1, v_1\} = \frac{2}{\omega^2} K_2\{\chi_1 + \psi^*\, v_1\}\, K_2\{\chi_1 + \psi_0^*\, v_1, v_1\} - \frac{1}{\omega} K_3\{\chi_1 + \psi_0^*\, v_1\} = \psi_2^*,$$

darum

$$\Lambda_3\{\chi_1\} = \psi_2^*\, I_1\{v_1\} + 2\,\psi_1^*\, I_2\{\chi_1 + \psi_0^*\, v_1, v_1\} + I_3\{\chi_1 + \psi_0^*\, v_1\} .$$

Nun ist $L_2\{\chi_1\} = 0$, darum ist

(101) $$\boxed{\Lambda_3\{\chi_1\} = 0}$$

eine für das Eintreten eines Extremums notwendige Bedingung.

Es möge jetzt v den durch (97) gegebenen Wert haben. Es ist dann

$$\psi_0 = -\frac{1}{\omega} K_1\{y_1\, \chi_1 + \boldsymbol{v}\}, \quad \psi_1 = -\frac{1}{\omega} K_2\{y_1\, \chi_1 + \boldsymbol{v} + \psi_0\, v_1\},$$

(102) $$\psi_2 = \frac{2}{\omega^2} K_2\{y_1\, \chi_1 + \boldsymbol{v} + \psi_0 v_1\}\, K_2\{y_1\, \chi_1 + \boldsymbol{v} + \psi_0\, v_1, v_1\}$$

$$- \frac{1}{\omega} K_3\{y_1\, \chi_1 + \boldsymbol{v} + \psi_0\, v_1\}.$$

Augenscheinlich sind ψ_0, ψ_1, ψ_2 entsprechend Funktionale ersten, zweiten und dritten Grades der Funktionen $y_1\, \chi_1, \boldsymbol{v}, y_1 \frac{d\chi_1}{dx}, \frac{d\boldsymbol{v}}{dx}$.

---

[13]) Es sei daran erinnert, daß wir neuerdings $\eta = v$, $\eta_1 = v_1$ gesetzt haben.

Aus

$$y_1 = \int k\chi_1 v\,dx - \iint N(x,t)\, v(x)\, \chi_1(t)\, dx\, dt$$

folgt wegen $\left|\frac{dv}{dx}\right| \leqq M$ (vgl. (17))

$$|y_1| \leqq \gamma_{12} \operatorname{Max} |v| \leqq \gamma_{13} M\,, \tag{103}$$

darum nach (97)

$$|\boldsymbol{v}| \leqq |v| + |y_1|\,|\chi_1| \leqq \gamma_{14} M \tag{104}$$

und (vgl. (16))

$$\left|\frac{d\boldsymbol{v}}{dx}\right| \leqq \left|\frac{dv}{dx}\right| + |y_1| \left|\frac{d\chi_1}{dx}\right| \leqq \gamma_{15} M. \tag{105}$$

Jetzt findet man weiter sukzessive

$$\begin{aligned} |\psi_0| &\leqq \gamma_{16} |y_1| + \gamma_{17} \Big(\int \Big(\frac{d\boldsymbol{v}}{dx}\Big)^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}, \\ |\psi_1| &\leqq \gamma_{18} y_1^2 + \gamma_{19} |y_1| \Big(\int \Big(\frac{d\boldsymbol{v}}{dv}\Big)^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} + \gamma_{20} \Big(\int \Big(\frac{d\boldsymbol{v}}{dx}\Big)^2 dx\,, \\ |\psi_2| &\leqq \gamma_{21} |y_1|^3 + \gamma_{22} y_1^2 \Big(\int \Big(\frac{d\boldsymbol{v}}{dx}\Big)^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} + \gamma_{23} |y_1| \int \Big(\frac{d\boldsymbol{v}}{dx}\Big)^2 dx + \gamma_{24} \int \Big(\frac{d\boldsymbol{v}}{dx}\Big)^2 dx. \end{aligned} \tag{106}$$

Betrachten wir nunmehr den Ausdruck $\Lambda_3\{v\}$ etwas näher. Als Funktion von y_1 aufgefaßt, stellt er augenscheinlich ein Polynom höchstens dritten Grades dar. Wegen (101) sind die Glieder dritten Grades gleich Null. Für die Glieder nullten und ersten Grades, deren Gesamtheit mit $\bar{\Lambda}_3$ bezeichnet werden mag, findet man, wenn man alles vorstehende betrachtet, nach einer keinerlei grundsätzliche Schwierigkeiten bietenden Diskussion eine Abschätzung von der Form

$$|\bar{\Lambda}_3| \leqq \gamma_{25} \int p \Big(\frac{d\boldsymbol{v}}{dx}\Big)^2 dx,$$

während die Glieder zweiten Grades zu

$$y_1^2 \int \Big(h_1 \boldsymbol{v} + h_2 \frac{d\boldsymbol{v}}{dx}\Big) dx = y_1^2 \int \Big(h_1 - \frac{dh_2}{dx}\Big) \boldsymbol{v}\, dx = y_1^2 \int h \boldsymbol{v}\, dx$$

zusammengefaßt werden können. Hierin bezeichnen h_1, h_2, h explizite angebbare, übrigens analytische und reguläre Funktionen. Alles in allem ist also

$$\Lambda_3 = \bar{\Lambda}_3 + y_1^2 \int h \boldsymbol{v}\, dx \tag{107}$$

mit

$$|\bar{\Lambda}_3| \leqq \gamma_{25} \int p \Big(\frac{d\boldsymbol{v}}{dx}\Big)^2 dx. \tag{108}$$

Es sei schließlich $\varepsilon_4 \Lambda_4\{v\}$ die Gesamtheit der Glieder vierter Ordnung von ΔJ. Durch eine zu der vorstehenden ganz analoge Betrachtung, diesmal muß freilich auch noch ψ_3 herangezogen werden, findet man

$$\Lambda_4 = \bar{\Lambda}_4 + y_1^3 \int \Big(h_3 \boldsymbol{v} + h_4 \frac{d\boldsymbol{v}}{dx}\Big) dx + y_1^4 \Delta_4 = \bar{\Lambda}_4 + y_1^3 \int h^{(1)} \boldsymbol{v}\, dx + y_1^4 \Delta_4 \tag{109}$$

mit

$$|\bar{\Lambda}_4| \leqq \gamma_{26} \int p \Big(\frac{d\boldsymbol{v}}{dx}\Big)^2 dx. \tag{110}$$

Hier bezeichnet $\bar{\Lambda}_4$ die Gesamtheit der Glieder, die y_1 höchstens in der zweiten Potenz enthalten, $\Delta_4 = \Lambda_4\{\chi_1\}$ die Gesamtheit der von $\boldsymbol{v}$ und $\frac{d\boldsymbol{v}}{dx}$ freien Glieder in Λ_4.

Die Gesamtänderung des Integrals I läßt sich demnach in der Form schreiben

$$(111)\quad \Delta I = \frac{\varepsilon^2}{2}\sum{}'|\mu_j|\Big(1-\frac{1}{\mu_j}\Big)y_j^2 + \varepsilon^3 y_1^2\int h v\,dx + \varepsilon^4 y_1^3\int h^{(1)} v\,dx + \varepsilon^3\bar{\Delta}_3 + \varepsilon^4\bar{\Delta}_4 + \varepsilon^4 y_1^4\Delta_4 + \varepsilon^5 R_5.$$

Für $\varepsilon^5 R_5$, die Gesamtheit der Glieder fünfter und höherer Ordnung, erhalten wir unter Berücksichtigung der Formeln (24), (25) und der ersten der Formeln (106) eine Abschätzung von der Form

$$(112)\qquad |\varepsilon^5 R^5| \leqq \gamma_{27}\,\varepsilon^5\int p\Big(\frac{dv}{dx}\Big)^2 dx + \gamma'_{27}\,\varepsilon^5 y_1^4.$$

Für (111) kann man auch schreiben

$$\Delta I = \frac{\varepsilon^2}{2}\sum{}'|\mu_j|\Big(1-\frac{1}{\mu_j}\Big)y_j^2 + \varepsilon^3\Sigma' y_j y_1^2\int h\chi_j dx + \varepsilon^4\Sigma' y_j y_1^3\int h^{(1)}\chi_j dx + \varepsilon^3\bar{\Delta}_3 + \varepsilon^4\bar{\Delta}_4$$

$$(113)\quad + \varepsilon^4 y_1^4\Delta_4 + \varepsilon^5 R_5 = \frac{\varepsilon^2}{2}\sum{}'|\mu_j|\Big(1-\frac{1}{\mu_j}\Big)\Big\{y_j + \varepsilon y_1^2\frac{\int h\chi_j dx}{|\mu_j|\Big(1-\frac{1}{\mu_j}\Big)} + \varepsilon^2 y_1^3\frac{\int h^{(1)}\chi_j dx}{|\mu_j|\Big(1-\frac{1}{\mu_j}\Big)}\Big\}^2$$

$$+ \varepsilon^3\bar{\Delta}_3 + \varepsilon^4\bar{\Delta}_4 + \varepsilon^4 y_1^4\Big\{\Delta_4 - \sum{}'\frac{[\int(h+\varepsilon y_1 h^{(1)})\chi_j dx]^2}{2\,|\mu_j|\Big(1-\frac{1}{\mu_j}\Big)}\Big\} + \varepsilon^5 R_5.$$

Die vorstehende Umformung ist gestattet, denn, wie sich sogleich zeigen wird, ist die Reihe

$$(114)\qquad \sum{}'\frac{(\int h^*\chi_j\,dx)^2}{|\mu_j|\Big(1-\frac{1}{\mu_j}\Big)} \quad \text{mit} \quad h^* = h + \varepsilon y_1 h^{(1)}$$

konvergent.

In der Tat ist (vgl. S. 202) die Reihe

$$(115)\qquad \sum\frac{\chi_j(x)\,\chi_j(t)}{|\mu_j|} = G(x,t)\,,$$

wie übrigens auch die Reihe $\sum{}'\dfrac{|\chi_j(x)|\,|\chi_j(t)|}{|\mu_j|}$ gleichmäßig konvergent. Die Reihe

$$(116)\qquad \sum{}'\chi_j(x)\frac{\int h^*\chi_j\,dt}{|\mu_j|} = \int G(x,t)\,h^*(t)\,dt - \chi_1(x)\int h^*\chi_1\,dt$$

ist augenscheinlich gleichmäßig konvergent und stellt eine nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktion dar. Übrigens konvergiert auch die Reihe

$$\sum{}'|\chi_j(x)|\frac{|\int h^*\chi_j\,dt|}{|\mu_j|}$$

gleichmäßig. Daher ist auch die Reihe

$$(117)\qquad \sum{}'\chi_j(x)\frac{\int h^*\chi_j\,dt}{|\mu_j|\Big(1-\frac{1}{\mu_j}\Big)}$$

gleichmäßig konvergent. Also konvergiert in der Tat (114).

Natürlich konvergiert auch die Reihe

$$(118)\qquad \sum{}'\chi_j(x)\frac{1}{|\mu_j|\,(\mu_j-1)}\int h^*\chi_j\,dt$$

gleichmäßig. Da auch die Reihe

$$(119)\qquad \sum{}' \frac{d}{dx}\left(p\frac{d\chi_j}{dx}\right)\frac{1}{|\mu_j|(\mu_j-1)}\int h^*\chi_j\,dt$$

$$=-\sum{}'\frac{\mu_j}{|\mu_j|}\frac{1}{\mu_j-1}\{k\chi_j(x)-\int N(x,t)\,\chi_j(t)\,dt\}\int h^*\chi_j\,dt$$

gleichmäßig konvergiert, so hat (118), wie sich ohne Mühe zeigen läßt, stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung. Da die Reihe (117) gleich der Summe der Reihen (116) und (118) ist, so besitzt auch sie stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

Wir kehren jetzt zu der Formel (113) zurück und behaupten: *eine weitere für das Eintreten eines Minimums notwendige Bedingung sei*

$$(120)\qquad \boxed{\Delta_4-\sum{}'\frac{(h\chi_j\,dx)^2}{2|\mu_j|\left(1-\frac{1}{\mu_j}\right)}\geqq 0.}$$

Insbesondere muß also $\Delta_4\geqq 0$ sein.

1. Es sei zunächst

$$(121)\qquad \Delta_4-\sum{}'\frac{(h\chi_j\,dx)^2}{2|\mu_j|\left(1-\frac{1}{\mu_j}\right)}<0.$$

Dann ist für hinreichend kleine $\delta>0$ und $|\varepsilon|$ gewiß

$$(122)\qquad \Delta_4-\sum{}'\frac{(h^*\chi_j\,dx)^2}{2(1+\delta)|\mu_j|\left(1-\frac{1}{\mu_j}\right)}<-\delta_1<0\,.$$

Wir schreiben für (113) den gleichwertigen Ausdruck

$$\Delta I=\frac{\varepsilon^2}{2}\sum{}'(1+\delta)|\mu_j|\left(1-\frac{1}{\mu_j}\right)\left\{y_j+\varepsilon y_1^2\frac{\int h^*\chi_j\,dx}{(1+\delta)|\mu_j|\left(1-\frac{1}{\mu_j}\right)}\right\}^2$$

$$(123\qquad +\varepsilon^4 y_1^4\left\{\Delta_4-\sum{}'\frac{(\int h^*\chi_j\,dx)^2}{2(1+\delta)|\mu_j|\left(1-\frac{1}{\mu_j}\right)}\right\}$$

$$-\delta\frac{\varepsilon^2}{2}\sum{}'|\mu_j|\left(1-\frac{1}{\mu_j}\right)y_j^2+\varepsilon^3\bar{\Delta}_3+\varepsilon^4\bar{\Delta}_4+\varepsilon^5 R_5=\sum_{j=1}^{6}N_j$$

und setzen zur Vereinfachung

$$\bar{y}_j=-\varepsilon y_1^2\frac{\int h^*\chi_j\,dx}{(1+\delta)|\mu_j|\left(1-\frac{1}{\mu_j}\right)}\qquad (j\geqq 2)\,.$$

Wie wir vorhin gesehen haben, ist die unendliche Reihe

$$\Sigma'\,\bar{y}_j\chi_j(x)$$

gleichmäßig konvergent und stellt eine nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktion dar. Sie heiße $\bar{v}(x)$,

$$(124)\qquad \bar{v}(x)=\Sigma'\,\bar{y}_j\,\chi(x)\,.$$

Führt man in (123) für y_j speziell $\bar{y}_j$, darum für v die Funktion $\bar{v}$ ein, so verschwindet N_1. Es ist nun weiter (vgl. (108), (110), (112) und (122))

$$N_2 \leqq -\delta_1 \varepsilon^4 y_1^4, \quad N_3 \leqq -\delta \frac{\varepsilon^2}{2}\left(1-\frac{1}{\mu_2}\right)\int p\left(\frac{d\bar{v}}{dx}\right)^2 dx,$$

$$|N_4+N_5+N_6| < \gamma_{28}|\varepsilon|^3 \int p\left(\frac{d\bar{v}}{dx}\right)^2 dx + \gamma'_{27}\varepsilon^5 y_1^4.$$

Für alle hinreichend kleinen $|\varepsilon|$, etwa $|\varepsilon| \leqq \varepsilon_1$, ist offenbar

$$\Delta I \leqq -\gamma_{29}\varepsilon^2 \int p\left(\frac{d\bar{v}}{dx}\right)^2 dx - (\delta_1 - \varepsilon\gamma'_{27})\varepsilon^4 y_1^4.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $y_1 = 0$, $\bar{v} = 0$.
Das Minimum tritt nicht ein.
2. Es sei jetzt

$$\Delta_4 - \sum' \frac{(h\chi_j\, dx)^2}{2|\mu_j|\left(1-\frac{1}{\mu_j}\right)} > 0. \tag{125}$$

Dann ist für hinreichend kleine $\delta > 0$ und $|\varepsilon|$ gewiß

$$\Delta_4 - \sum' \frac{(\int h^*\chi_j\, dx)^2}{2(1-\delta)|\mu_j|\left(1-\frac{1}{\mu_j}\right)} > \delta_2 > 0. \tag{126}$$

Wir schreiben diesmal (113) in der Form

$$\Delta I = \frac{\varepsilon^2}{2}\sum'(1-\delta)|\mu_j|\left(1-\frac{1}{\mu_j}\right)\left\{y_j + \varepsilon y_1^2 \frac{\int h^*\chi_j\, dx^2}{(1-\delta)|\mu_j|\left(1-\frac{1}{\mu_j}\right)}\right\}^2$$

$$+ \varepsilon^4 y_1^4\left\{\Delta_4 - \sum' \frac{(\int h^*\chi_j\, dx)^2}{2(1-\delta)|\mu_j|\left(1-\frac{1}{\mu_j}\right)}\right\}$$

$$+ \frac{\delta\varepsilon^2}{2}\sum'|\mu_j|\left(1-\frac{1}{\mu_j}\right)y_j^2 + \varepsilon^3\bar{\Delta}_3 + \varepsilon^4\bar{\Delta}_4 + \varepsilon^5 R_5 = \sum_{j=1}^{6} N'_j$$

und bemerken vor allem, daß

$$N'_1 \geqq 0, \quad N'_2 \geqq \delta_2\varepsilon^4 y_1^4, \quad N'_3 \geqq \left(1-\frac{1}{\mu_2}\right)\frac{\delta\varepsilon^2}{2}\,\Sigma'|\mu_j|\,y_j^2 = \left(1-\frac{1}{\mu_2}\right)\frac{\delta\varepsilon^2}{2}\int p\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx$$

ist. Des weiteren finden wir nach (108), (110) und (112)

$$|N'_4+N'_5+N'_6| \leqq \gamma_{30}|\varepsilon|^3 \int p\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx + \gamma'_{27}\varepsilon^5 y_1^4.$$

Für alle hinreichend kleinen $|\varepsilon|$, sagen wir $|\varepsilon| \leqq \varepsilon_2$, ist augenscheinlich

$$\Delta I \geqq \gamma_{31}\varepsilon^2 \int p\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx + \delta_3\varepsilon^4 y_1^4 \quad (\delta_3 > 0). \tag{127}$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $y_1 = 0$, $\bar{v} = 0$.
Es liegt also ein schwaches Minimum vor.
Die bisherigen Ergebnisse bringen keine Entscheidung, wenn

$$\Delta_4 - \sum' \frac{(\int h\chi_j\, dx)^2}{2|\mu_j|\left(1-\frac{1}{\mu_j}\right)} = 0 \tag{128}$$

ist. In diesem Falle müssen Glieder höherer Ordnung herangezogen werden. Die Betrachtungen können in ähnlicher Weise wie in der ersten Mitteilung (S. 182—186), wo es sich um das einfachste Problem der Variationsrechnung handelt, weiter geführt werden.

Wir hatten vorhin angenommen, daß die Integralgleichung (96′) keine in der Form $\sum_j \frac{l_j}{j} \sin jx$ mit konvergenter Quadratsumme $\sum_j l_j^2$ darstellbare Lösung hat. Von dieser Voraussetzung können wir uns leicht auf folgende Weise frei machen. Es sei $k_0(x)$ irgendeine in $\langle a, b\rangle$ erklärte stetige, durchaus positive Funktion, so daß in $\langle a, b\rangle$ durchweg $k(x) - k_0(x) < 0$ ist, die überdies so beschaffen ist, daß die Integralgleichung

$$k_0(x)\, w(x) - \int N(x, t)\, w(t)\, dt = 0$$

keine Nullösung hat. Augenscheinlich lassen sich diese Forderungen ohne weiteres erfüllen, indem man bsp. $k_0(x)$ gleich einer geeigneten Konstanten $k_0 > 0$ setzt.

Wir schreiben (59) in der Form

$$\frac{d}{dx}\left(p \frac{dw}{dx}\right) + (k - k_0)\, w + k_0 w - \int N(x, t)\, w(t)\, dt = 0 \tag{129}$$

und betrachten die Integro-Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p \frac{dw}{dx}\right) + (k - k_0)\, w + \lambda\left(k_0 w - \int N(x, t)\, w(t)\, dt\right) = 0. \tag{130}$$

Ihre positiven Eigenwerte sind sämtlich $\geqq 1$. Es möge im Gegensatz zu unserer Behauptung (130) einen positiven Eigenwert $\hat{\mu} < 1$ haben, und es sei $\hat{\chi}(x)$ die zu $\hat{\mu}$ gehörige normierte Eigenfunktion [13]). Offenbar ist

$$\begin{aligned} 2L_2\{\hat{\chi}\} &= \int p\chi'^2\, dx - \int (k - k_0)\, \hat{\chi}^2 dx - \int k_0 \hat{\chi}^2 dx + \iint N(x,t)\, \hat{\chi}(x)\, \hat{\chi}(t)\, dx\, dt \\ &= -\int \hat{\chi}\left\{\frac{d}{dx}(p\hat{\chi}') + (k - k_0)\hat{\chi}\right\} dx - \int k_0 \hat{\chi}^2 dx + \iint N(x, t)\, \hat{\chi}(x)\, \hat{\chi}(t)\, dx\, dt \\ &= (\hat{\mu} - 1)\, [k_0 \hat{\chi}^2 dx - \iint N(x, t)\, \hat{\chi}(x)\, \hat{\chi}(t)\, dx\, dt] = \hat{\mu} - 1 < 0\,, \end{aligned}$$

und dies kann im vorliegenden Falle (vgl. S. 208) nicht eintreten. Augenscheinlich hat (130) für $\lambda = 1$ dieselben Eigenfunktionen wie die Integro-Differentialgleichung (59).

Wir gelangen nunmehr zu einer unbegrenzten Reihe einerseits notwendiger, andererseits hinreichender Beziehungen für das Eintreten eines Minimums, wenn wir der Untersuchung statt der Integro-Differentialgleichung (45) mit $\boldsymbol{N}(x, t) = N(x, t)$ die Gleichung (130) zugrundelegen. Die Betrachtungen verlaufen in allen Stücken denjenigen auf S. 213 parallel. Jetzt bezeichnen also (vgl. S. 208) χ_j diejenigen nichttrivialen Eigenfunktionen der Gleichung (130), die zu dem von 1 verschiedenen (positiven und negativen) Eigenwerten μ_j gehören [14]). Wie auf S. 210 gehen wir von dem Ansatz

$$v = y_1\, \chi_1(x) + \boldsymbol{v}$$

aus. Dabei ist diesmal

$$y_1 = \int k_0 \chi_1\, v dx - \iint N(x, t)\, v(x)\, \chi_1(t)\, dx\, dt\,.$$

Wir haben bisher angenommen, daß die Gleichung (59) nur eine Lösung $\chi_1(x)$ hat. Sie möge jetzt demgegenüber noch eine zweite Eigenfunktion $\chi_2(x)$ haben. Wir schreiben

$$v(x) = y_1\, \chi_1(x) + y_2\, \chi_2(x) + \dot{v}(x) \tag{131}$$

und erhalten

---

[13]) Es gilt $\int k_0 \hat{\chi}^2\, dx - \iint N(x, t)\, \hat{\chi}(x)\, \hat{\chi}(t)\, dx\, dt = 1$.

[14]) Die Normierungsbedingungen lauten jetzt

$$\int k_0\, \chi_\alpha\, \chi_\beta\, dx - \iint N(x, t)\, \chi_\alpha(x)\, \chi_\beta(t)\, dx\, dt = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha \neq \beta, \\ \dfrac{\mu_\alpha}{|\mu_\alpha|} & \text{für } \alpha = \beta. \end{cases}$$

$$2L_2\{v\} = 2L_2\{\dot{v}\} = \Sigma'' |\mu_j| \left(1 - \frac{1}{\mu_j}\right) y_j^2,$$

wo durch das Zeichen Σ'' angedeutet werden soll, daß bei der Summation die Werte $j = 1$ und $j = 2$ außer Betracht bleiben. Für (131) kann man setzen

$$(132)\quad v(x) = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}\left(\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}\chi_1(x) + \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}\chi_2(x)\right) + \dot{v}(x) = \dot{y}\dot{\chi}(x) + \dot{v}(x)\,.$$

Auch $\dot{\chi}(x)$ ist eine zu dem Eigenwerte 1 gehörige Lösung der Integro-Differentialgleichung (59). Es ist einleuchtend, daß man ausgehend von der Zerlegung

$$v = \dot{y}_1\dot{\chi}(x) + \dot{v}(x)$$

zu einer Folge von Kriterien gelangt, die zu den vorstehend abgeleiteten Kriterien vollkommen analog sind.
So muß vor allem

$$(133)\qquad \Delta_3\{\dot{\chi}\} = 0\,,$$

$$(134)\qquad \dot{\Delta}_4 - \Sigma'' \frac{(\int \dot{h}\dot{\chi}_j\,dx)^2}{2|\mu_j|\left(1 - \frac{1}{\mu_j}\right)} \geqq 0$$

sein; $\dot{\Delta}_4$ und $\dot{h}$ bezeichnen in naheliegender Weise Ausdrücke, die sich ergeben, wenn man in unseren früheren Entwicklungen χ_1 und y_1 entsprechend durch $\dot{\chi}_1$ und $\dot{y}_1$ ersetzt; die Summation erstreckt sich über alle j, die von 1 und 2 verschieden sind. Die beiden Beziehungen müssen freilich diesmal für *alle*

$$\dot{\chi}(x) = c_1\,\chi_1(x) + c_2\,\chi(x)\,,$$

wo c_1 und c_2 beliebige der Gleichheit $c_1^2 + c_2^2 = 1$ genügende Werte bezeichnen, erfüllt sein. Aus Gründen der Homogenität kann man von der Bedingung $c_1^2 + c_2^2 = 1$ hierbei absehen. Die Beziehungen (133) und (134) müssen also für alle c_1 und c_2 erfüllt sein. Gilt in (134) für alle c_1 und c_2 das Zeichen $>$, so tritt das Minimum ein. Gibt es Wertepaare von c_1 und c_2 (maßgebend ist natürlich nur das Verhältnis $c_1 : c_2$), so daß

$$\dot{\Delta}_4 - \Sigma'' \frac{(\int \dot{h}\dot{\chi}_j\,dx)^2}{2|\mu_j|\left(1 - \frac{1}{\mu_j}\right)} < 0$$

ist, so liegt bestimmt kein Minimum vor. Gilt (134), wobei für bestimmte (evtl. alle) Werte von $c_1 : c_2$ das Gleichheitszeichen zutrifft, so muß unter Zugrundelegung dieser Werte von $c_1 : c_2$ die Diskussion auf Glieder fünfter und höherer Ordnung ausgedehnt werden.

Eingegangen 10. März 1931.

Über den Schottkyschen Satz.

Von *M. Fekete* in Jerusalem.

1. Der Schottkysche Satz [1]), in seiner von Landau verschärften [2]) Form, besagt folgendes:

I. Konvergiert die nach wachsenden Potenzen von $(x-\xi)$ *geordnete Potenzreihe*

$$a_0 + a_1(x-\xi) + \cdots + a_n(x-\xi)^n + \cdots \tag{1}$$

mit von x *unabhängigen Koeffizienten* $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *für* $|x-\xi| < r$ *und ist ihre Summe* $f(x)$ *daselbst überall von* 0 *und* 1 *verschieden, genügen ferner* a_0 *und* ϑ *den Ungleichungen*

$$|a_0| \leqq \lambda, \qquad 0 < \vartheta < 1,$$

so liegt der Betrag von $f(x)$ *für* $|x-\xi| \leqq \vartheta r$ *unter einer Schranke* $S = S(\lambda, \vartheta)$, *die nur von* λ *und* ϑ *abhängt und von* r, ξ *und von den Koeffizienten der Potenzreihe* (1) *unabhängig ist.*

2. In der vorliegenden Note will ich zeigen, daß dieser Satz sich auf Potenzreihen verallgemeinern läßt, die nach wachsenden Potenzen eines gegebenen Polynoms

$$\omega(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + \cdots + c_k = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_k), \qquad (k \geqq 2)$$

fortschreiten und zu Koeffizienten Polynome $a_0(x), a_1(x), \ldots$ eines niedereren Grades haben [3]):

II. Ist die Potenzreihe

$$a_0(x) + a_1(x)\omega(x) + a_2(x)\omega(x)^2 + \cdots + a_n(x)\omega(x)^n + \cdots, \tag{2}$$

— wo die Polynome $\omega(x)$ *und* $a_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ *die eben angegebene Form haben — für* $|\omega(x)| < R$ *konvergent und ihre Summe* $F(x)$ *daselbst überall von* 0 *und* 1 *verschieden, genügen ferner* $a_0(x)$ *und* ϑ *den Ungleichungen*

$$\operatorname*{Max}_{\omega(x)=0} |a_0(x)| \leqq \lambda, \qquad 0 < \vartheta < 1,$$

so liegt der Betrag von $F(x)$ *für* $|\omega(x)| \leqq \vartheta R$ *unter einer Schranke* S^*, *die nur von* λ, ϑ *und vom Grade* k *des Polynoms* $\omega(x)$ *abhängt und von* R, *von den Nullstellen* $\xi_1, \ldots, \xi_k$ *von* $\omega(x)$ *und von den Koeffizienten der Potenzreihe* (2) *unabhängig ist, vorausgesetzt, daß der Lemniskatenbereich* $|\omega(x)| \leqq R$ *aus einem Stücke* [4]) *besteht.*

---

[1]) Sitzungsber. der Kgl. Preuß. Ak. der Wiss., Berlin, 1904, S. 1244—1262; S. 1255.

[2]) Nachr. von der Kgl. Gesellsch. der Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Klasse, 1910, S. 303—330; S. 309.

[3]) Mit der Entwicklung von Funktionen in solche Potenzreihen hat sich zuerst Jacobi beschäftigt (Journal für r. und ang. Math., **53** (1847), S. 103—126; Ges. Werke, Bd. VI, S. 203—230. Vgl. auch die Inauguraldissertation von A. Kienast, Über die Darstellung analytischer Funktionen, etc. 1906. Zürich. Eine systematische ausführliche Darstellung einiger bemerkenswerter Eigenschaften dieser Potenzreihen (in bezug auf die Konvergenz und die Eigentümlichkeiten der durch die Reihensumme definierte Funktion) beabsichtige ich demnächst zu veröffentlichen.

[4]) Die Frage nach der notwendigen und hinreichenden Bedingung, damit die Punktmenge $|\omega(x)| \leqq R$ ein Kontinuum bildet, habe ich in meiner zweiten Mitteilung „Über den transfiniten Durchmesser ebener Punktmengen" behandelt. Vgl. Math. Zeitsch. **32** (1930), S. 215—221; S. 219.

3. Ich stütze mich beim Beweise dieses Satzes auf eine Folgerung aus I, die so lautet:

III. Es sei B ein einfach zusammenhängender, abgeschlossener, endlicher Bereich (= Kontinuum) in der komplexen x-Ebene und es bedeute $B(\varrho)$ die Hülle von B vom Radius $\varrho > 0$, d. h. die Gesamtheit derjenigen Punkte der Ebene von B, die in den um die Punkte von B mit dem Radius ϱ beschriebenen Kreisflächen liegen. Es sei d der transfinite Durchmesser[5]*) von B und es bestehe*

$$\frac{d}{\varrho} \leqq q .$$

Es sei $g(x)$ eine im Innern von $B(\varrho)$ reguläre analytische Funktion, die daselbst von 0 und 1 verschieden ist und die in einem Punkte x_0 von B einen Wert y_0 besitzt, der die Ungleichung

$$|y_0| \leqq p$$

befriedigt. Dann liegt der Betrag von $g(x)$ in B überall unter einer Schranke, die nur von p und q abhängt[6]*).*

4. Indem ich die Begründung des Hilfssatzes III für später verschiebe, will ich jetzt dartun, wie man durch seine Anwendung meine Behauptung II verifizieren kann:

Bekanntlich bildet der Lemniskatenbereich $|\omega(x)| \leqq \vartheta R$ — wie nach Voraussetzung die durch $|\omega(x)| \leqq R$ gegebene Punktmenge — einen einzigen Bereich B_1 mit den in III geschilderten Eigenschaften von B, (begrenzt durch die Lemniskatenkurve $|\omega(x)| = \vartheta R$ und enthaltend alle Brennpunkte dieser Kurve: die Nullstellen ξ_i von $\omega(x)$), oder aber er zerfällt in mehrere solche, voneinander getrennte Bereiche $B_1, \ldots, B_l$, $(l \leqq k)$, auf deren Berandung $|\omega(x)| = \vartheta R$ ist und welche je mindestens eine Nullstelle ξ_i von $\omega(x)$ enthalten.

Im ersten Falle kann B_1, im zweiten aber jeder von den Bereichen $B_1, \ldots, B_l$, die Rolle des Bereiches B im Satze III übernehmen, wenn als ϱ ein echter Teil, z. B. die Hälfte der Entfernung a zwischen den durch $|\omega(x)| = \vartheta R$ und $|\omega(x)| = R$ charakterisierten Punktmengen der x-Ebene und als $g(x)$ die Summenfunktion $F(x)$ der Potenzreihe (2) fungiert.

Konvergiert nämlich diese Reihe für $|\omega(x)| < R$, so ist ihre Konvergenz eine gleichmäßige für $|\omega(x)| \leqq r$, sobald $r < R$ ist[7]) und deshalb stellt ihre Summe für $|\omega(x)| \leqq r$

---

[5]) In bezug auf die Definition des transfiniten Durchmessers allgemeiner abgeschlossener und beschränkter Punktmengen M vgl. M. Fekete, Über die Verteilung der Wurzeln, etc., Math. Zeitsch. **17** (1923), S. 228—249; S. 231. Besitzt M eine Komplementärmenge $\bar{M}$, die ein einfach zusammenhängendes (den Punkt $x = \infty$ enthaltendes) Gebiet bildet, so ist der transfinite Durchmesser von M gleich dem Radius desjenigen Kreises, auf dessen Äußeres das Gebiet $\bar{M}$ sich konform abbilden läßt, wenn die unendlichfernen Punkte einander entsprechen und die Linienelemente darin einander gleich sind. Vgl. a. a. O. S. 237. Der transfinite Durchmesser einer Lemniskatenlinie $|x^k + c_1 x + \cdots + c_k| = r$ oder einer Lemniskatenfläche $|x^k + \cdots| \leqq r$ ist gleich $\sqrt[k]{r}$. Vgl. a. a. O. S. 234, Fußnote [4]).

[6]) III enthält den Satz I (und da er — wie behauptet — sich aus jenem folgern läßt, sind die beiden einander äquivalent): Ist B der Kreisbereich $|x - \xi| \leqq \vartheta r$ und fällt die Funktion $g(x)$ mit der Summe von (1) zusammen, so kann man auf sie den Satz III anwenden, wenn $\varrho = (1 - \vartheta) r$ festgesetzt ist, während die Rolle von x_0 dem Punkte ξ, die von y_0 dem a_0, die von p dem λ zukommt. Nun ist d in dem vorliegenden Falle $= \vartheta r$ (vgl. Fußnote [5])), daher kann als q das $\dfrac{\vartheta}{1 - \vartheta}$ fungieren; d. h. $|f(x)| \leqq$ eine Schranke, die nur von λ und ϑ abhängt, w. z. b. w.

[7]) Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_k$ feste Punkte, die auf $|\omega(x)| = r_1$, mit $r < r_1 < R$, liegen; da nach Voraussetzung in allen diesen Punkten (2) konvergieren muß, gibt es sicherlich ein N so, daß für $n \geqq N$, $i = 1, 2, \ldots, k$ $|a_n(x_i)\, \omega(x_i)^n| < 1$, d. h. $|a_n(x_i)| < \dfrac{1}{r_1^n}$ ausfällt und folglich für $n \geqq N$, $|\omega(x)| \leqq R$ — mit Rücksicht auf die Lagrangesche Interpolationsformel —

$$|a_n(x)| = \left| \sum_{i=1}^{k} \frac{a_n(x_i)}{x - x_i} \frac{g(x)}{g'(x_i)} \right| \leqq \frac{k}{r_1^n} \operatorname*{Max}_{\substack{i = 1, \ldots, k \\ |\omega(x)| \leqq R}} \left| \frac{g(x)}{(x - x_i)\, g'(x_i)} \right| = \frac{c}{r_1^n}$$

eine einzige reguläre analytische Funktion von x dar, wenn $|\omega(x)| \leqq r$ ein einziges Kontinuum bildet, wogegen im Falle der Zerfällung dieser Punktmenge in m ($m \leqq k$) von einander getrennte Kontinua $K_1, \ldots, K_m$ die Summe von (2) in jedem dieser Kontinua je eine reguläre analytische Funktion darstellt, die nicht durch analytische Fortsetzung ineinander überzugehen brauchen [8]).

Da man r_0, zwischen ϑR und R, so fixieren kann, daß $|\omega(x)| = r_0$ nicht nur den Bereich $|\omega(x)| \leqq \vartheta R$, sondern auch seine Hülle vom Radius ϱ und somit die Hüllen $B_i(\varrho)$, $i = 1, \ldots, l$ umschließt, so folgt aus dem eben Gesagten, daß die Summe $F(x)$ von (2) in jedem der getrennten Kontinua B_i, welche zusammen $|\omega(x)| \leqq \vartheta R$ ausmachen, einer regulären analytischen Funktion gleich ist, die auch in $B_i(\varrho)$ noch regulär ist (und von 0 und 1 verschieden ausfällt).

5. Um nun das bisher erzielte für den Beweis von II zu verwerten, indem ich mich dabei auf III stütze, bemerke ich, daß

1°. $F(x)$ an den Nullstellen von $\omega(x)$ dem Koeffizienten $a_0(x)$ gleich ist und folglich in diesen Punkten $|F(x)|$ die Schranke λ nicht überschreiten kann, also, wenn in bezug auf B_i ($i = 1, \ldots, l$) die Rolle der Größe x_0 des Satzes III die (oder eine) in diesem Bereiche liegende Nullstelle von $\omega(x)$ übernimmt, so kann als p das λ fungieren;

2°. der transfinite Durchmesser des Komponentenbereiches B_i ($i = 1, \ldots, l$) den transfiniten Durchmesser des Lemiskatenbereiches $|\omega(x)| \leqq \vartheta R$, d. h. den Wert $\sqrt[k]{\vartheta R}$ nur unterbieten kann;

3°. der Abstand a zwischen $|\omega(x)| = R$ und $|\omega(x)| = \vartheta R$ — mit Rücksicht auf die vorausgesetzte Nicht-Zerfällung von $|\omega(x)| \leqq R$ in voneinander getrennte Kontinua — die untere Schranke $\dfrac{(\sqrt[k]{2-\vartheta} - 1)\sqrt[k]{R}}{4^{k-1}}$ hat [9]);

---

ist, wobei $g(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - x_i)$ ist. Daher hat die Reihe (2) für $|\omega(x)| \leqq r$, $(r < R)$, die Majorantenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c\left(\frac{r}{r_1}\right)^n$, woraus die behauptete gleichmäßige Konvergenz folgt.

[8]) Man kann r_1 zwischen r und R so festlegen, daß $|\omega(x)| = r_1$ aus ebensovielen voneinander getrennten geschlossenen Jordanschen Kurven, $(J_1, \ldots, J_m)$ besteht, als voneinander getrennte Kontinua $(K_1, \ldots, K_m)$ den Bereich $|\omega(x)| \leqq r$ ausmachen; (man wähle r_1 genügend nahe zu r, derart, daß auf $|\omega(x)| = r_1$ keine Nullstelle von $\omega'(x)$ fällt). Offenbar läßt sich dann die Summe $F(x)$ von (2), falls x innerhalb J_μ ($\mu = 1, \ldots, m$) liegt, in der Form $\frac{1}{2\pi i}\oint_{J_\mu} \frac{F(\xi)}{\xi - x}\,d\xi$ darstellen, wobei die Integration, längs der Kurve J_μ, in positivem Sinne durchzuführen ist, da ja wegen der gleichmäßigen Konvergenz von (2) auf $|\omega(x)| = r_1$ (vgl. die vorangehende Fußnote)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{J_\mu} \frac{F(\xi)}{\xi - x}\,d\xi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\oint_{J_\mu} \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(\xi)\,\omega(\xi)^\nu \cdot \frac{1}{\xi - x}\,d\xi$$

und, nach Cauchy, $\frac{1}{2\pi i}\oint_{J_\mu} \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(\xi)\,\omega(\xi)^\nu \frac{1}{\xi - x}\,d\xi = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x)\,\omega(x)^\nu$ ist. Nun ist aber $F(\xi)$ stetig, wenn ξ auf J_μ liegt, daher ist der Wert des Integrals $\oint_{J_\mu} \frac{F(\xi)}{\xi - x}\,d\xi$, wenn x innerhalb J_μ liegt und folglich auch dann, wenn x zu K_μ gehört, eine reguläre analytische Funktion von x.

[9]) Es gilt für jedes Wertepaar x_1, x_2

$$|\omega(x_1) - \omega(x_2)| \leqq |\omega'(x_1)|\,|x_2 - x_1| + \frac{|\omega''(x_1)|}{2!}|x_2 - x_1|^2 + \cdots + \frac{|\omega^k(x_1)|}{k!}(x_2 - x_1)^k,$$

also für $0 < |\omega(x_2)| = \vartheta|\omega(x_1)|$, $0 < \vartheta < 1$ besteht

$$1 - \vartheta \leqq \left|\frac{\omega'(x_1)}{\omega(x_1)}\right| |x_2 - x_1| + \cdots + \left|\frac{\omega^k(x_1)}{k!\,\omega(x_1)}\right| |x_2 - x_1|^k \leqq \binom{k}{1}\left|\frac{x_2 - x_1}{\delta}\right| + \cdots + \binom{k}{k}\left|\frac{x_2 - x_1}{\delta}\right|^k$$
$$= \left(1 + \left|\frac{x_2 - x_1}{\delta}\right|\right)^k - 1,$$

4^0 nach den beiden vorangehenden Bemerkungen, und auf Grund der oben gemachten Festsetzung betreffs ϱ, bei Anwendung des Hilfssatzes III auf B_i $(i = 1, \ldots, l)$ und $F(x)$, die Rolle von q dem Quotienten $\dfrac{\sqrt[k]{\vartheta R} \cdot 2.4^{k-1}}{\sqrt[k]{R}\,(\sqrt[k]{2-\vartheta}-1)}$, also einer nur von ϑ und k abhängenden Größe, zugeteilt werden kann.

Damit ist die Möglichkeit der Abschätzung von $|F(x)|$ mit Hilfe von λ, ϑ und k bewiesen, es sei denn, daß der Satz III falsch ist.

6. Um seine Richtigkeit aus dem Schottkyschen Satze herzuleiten, verfahre ich so:

In der Ebene von B (und $B(\varrho)$) konstruiere ich mit den Koordinatenachsen parallelen Geraden ein quadratisches Netz, derart, daß ein Knotenpunkt mit x_0 zusammenfällt und die Länge l der Maschenseiten $\dfrac{\varrho}{2\sqrt{2}}$ beträgt. Diejenigen Maschen, die je mindestens einen Punkt mit B gemeinsam haben, bilden einen (einfach oder mehrfach) zusammenhängenden Bereich B, welcher B enthält und in $B(\varrho)$ enthalten ist. Man bezeichne mit ν die Anzahl der Maschen, welche B ausmachen; nach dem obigen gilt $\nu \geqq 4$; ich will diese Anzahl auch nach oben abschätzen:

Es ist offenbar

$$\nu l^2 \leqq (s + 2l)^2,$$

wenn s die Spanne von B bedeutet. Nun ist, nach dem Koebe-Bieberbachschen Satz[10]),

$$s \leqq 4d,$$

folglich gilt für ν, mit Rücksicht auf die Definition von l und q, die Abschätzung

$$\nu \leqq \frac{(4d + 2l)^2}{l^2} \leqq 8\left(\frac{4d + \frac{\varrho}{\sqrt{2}}}{\varrho}\right)^2 < 128\,(q+1)^2.$$

7. Im Besitze dieses Resultates ist es schon sehr leicht die in Frage stehende Behauptung zu verifizieren. Nach dem Satze I läßt nämlich die Funktion $g(x)$ des Satzes III für $|x - x_0| \leqq l = \dfrac{\varrho}{2\sqrt{2}}$ die Abschätzung

$$|g(x)| \leqq S\left(p, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \Sigma(p)$$

zu, da ja $g(x)$ im Bereiche $|x - x_0| < \dfrac{\varrho}{2}$ regulär ist und von 0 und 1 verschieden ausfällt.

Daraus kann ich aber eine für $|g(x)|$ auf der Berandung des oben erklärten Bereiches B überall gültige Abschätzung ableiten, die ihren Ausdruck in der Ungleichung

---

wobei $\delta = \underset{i=1,\ldots,k}{\mathrm{Min}} |x_1 - \xi_i|$ und $\omega(x) = (x - \xi_1) \cdots (x - \xi_k)$ ist. Ist speziell $|\omega(x_1)| = R$, $|\omega(x_2)| = \vartheta R$, $|x_2 - x_1| = a$, so folgt aus der vorangehenden Ungleichung $a \geqq (\sqrt[k]{2-\vartheta} - 1)\,\delta$. Andererseits $|x_1 - \xi_1|, \ldots, |x_1 - \xi_k| = R$ liefert uns $\delta \cdot \sigma^{k-1} \geqq R$, wobei σ die Spanne von $|\omega(x)| = R$ angibt. Da nun, dank der Voraussetzung der Nicht-Zerfällung von $|\omega(x)| \leqq R$, $\sigma \leqq 4\sqrt[k]{R}$ ist, (vgl. den Koebe-Bieberbachschen Satz über konforme Abbildung; s. Fußnote [10])), so muß $\delta \geqq \dfrac{\sqrt[k]{R}}{4^{k-1}}$ ausfallen. Daher folgt $a \geqq \dfrac{(\sqrt[k]{2-\vartheta} - 1)\sqrt[k]{R}}{4^{k-1}}$.

[10]) Vgl. L. Bieberbach, Über einige Extremalprobleme im Gebiete der konformen Abbildung, Math. Ann. 77 (1916), S. 153—172. Übrigens läßt sich die in Frage stehende Relation auf Grund der Definition der transfiniten Durchmesser sehr leicht folgern. Vgl. M. Fekete, Über den transfiniten Durchmesser von linearen Punktmengen, Acta litt. ac scientiarum reg. univ. hung. Franc.-Jos., section sc. math. 5 (1930), S. 20.

$$(3^0) \qquad |g(x)| \leqq \Sigma_\nu(p)$$

findet, wenn $\Sigma_1(p) = \Sigma(p)$ und für $j \geqq 2$, $\Sigma_j(p) = \Sigma(\Sigma_{j-1}(p))$ definiert wird; damit wird aber der gewünschte Beweis erzielt, da einerseits der Wert von $|g(x)|$ in B nirgends größer als das Maximum von $|g(x)|$ auf der Berandung von B sein kann, andererseits aber $\Sigma_\nu(p) \leqq \Sigma_Q(p)$ ist, wenn Q die in $128\,(q+1)^2$ enthaltene größte ganze Zahl bedeutet, da ja $\Sigma(p) \geqq p$ und folglich für $u \geqq v$ $\Sigma_u(p) \geqq \Sigma_v(p)$ sein muß.

8. Um (3^0) zu beweisen, beachte man, daß es möglich ist, von x ausgehend, längs einem sich nicht schneidenden, aus lauter zu B gehörigen Maschenseiten zusammengesetzten Polygonzug Z jeden der an der Berandung von B liegenden Knotenpunkte $\varkappa$ zu erreichen; und zwar braucht man, um auf einem möglichst kurz gewählten Z von x_0 den Punkt $\varkappa$ zu erreichen, sicherlich weniger als $\nu - 1$ Maschenseiten zu durchlaufen [11]).

Bezeichne man die aufeinander folgenden Knotenpunkte auf Z, die man auf dem Wege von x_0 bis $\varkappa$ passiert, der Reihe nach mit $x_1, \ldots, x_\mu = \varkappa$ $(\mu \leqq \nu - 2)$, so ist nach dem oben gesagten $|g(x_1)| \leqq \Sigma_1(p)$, und daraus kann man, durch wiederholte Anwendung des Satzes I, $|g(x_2)| \leqq \Sigma_2(p)$, $|g(x_3)| \leqq \Sigma_3(p), \ldots, |g(x_\mu)| \leqq \Sigma_\mu(p)$ schließen, da einerseits $|x_2 - x_1| = |x_3 - x_2| = \cdots = |x_\mu - x_{\mu-1}| = l$ ist, andererseits $g(x)$ nach der Voraussetzung für $|x - x_i| \leqq \frac{\varrho}{2}$ regulär und von 0 und 1 verschieden ist, weil x_i einen Eckpunkt eines solchen Quadrates bedeutet, das mindestens einen Punkt x_i^* von B enthält und darum $|x_i - x_i^*| \leqq l\sqrt{2} = \frac{\varrho}{2}$ und für ein x mit $|x - x_i| \leqq \frac{\varrho}{2}$ auch die Ungleichung $|x - x_i^*| \leqq \varrho$ bestehen muß. $|g(x_\mu)| \leqq \Sigma_\mu(p)$ liefert uns, wiederum auf Grund von I, die Ungleichung $|g(x)| \leqq \Sigma_{\mu+1}(p)$ in allen Punkten derjenigen Strecken, die x_μ mit den nächstliegenden Knotenpunkten des diesen Punkt x_μ enthaltenden Berandungspolygonzuges von B verbinden. Da $\mu + 1 \leqq \nu - 1$ und somit $\Sigma_{\mu+1}(p) \leqq \Sigma_\nu(p)$ ist, so ist $|g(x)| \leqq \Sigma_\nu(p)$ auf allen Maschenseiten, die zur Berandung von B gehören; w. z. b. w.

9. Unter den Voraussetzungen des Satzes II gab es eine von geometrischer Natur: die Forderung in bezug auf den Bereich $|\omega(x)| \leqq R$, wonach dieser aus *einem* Stücke bestehe. Ich habe mich überzeugt, daß im Falle, wo $\omega(x)$ ein quadratisches Polynom bedeutet, die Möglichkeit für die Abschätzung des Betrages von $F(x)$ im Bereiche $|\omega(x)| \leqq \vartheta R$ (auf die im Satze II charakterisierte Weise) auch dann fortbesteht, wenn die ebenerwähnte Forderung nicht erfüllt ist. Jedoch gelang es mir bisher nicht, ähnliches für $k > 2$ allgemein zu beweisen. Ich hoffe auf diese Frage bei einer anderen Gelegenheit zurückzukommen.

10. Diesmal will ich noch den Satz II (in der Form, wie ich ihn oben bewiesen habe) anwenden, um den bekannten Picard-Landauschen Satz auf die Potenzreihen (2) ähnlich zu verallgemeinern, wie im Satze II der Schottkysche Satz I erweitert wurde.

Ich formuliere den erwähnten Satz in der folgenden Gestalt:

IV. Es sei die Potenzreihe (1) *für* $|x - \xi| < r$ *konvergent und ihre Summe von* 0 *und* 1 *verschieden, ferner lasse sich der Betrag von* a_0 *nach oben, bzw. — für ein bestimmtes* $n \geqq 1$ *— der Betrag von* a_n *nach unten durch positive Zahlen* (λ *bzw.* μ) *abschätzen; dann befriedigt* r *die Ungleichung*

$$r < L(\lambda, \mu, n),$$

wobei L *nur von* λ, μ *und* n *abhängt.*

---

[11]) Im Falle $\nu = 4$ ist die Richtigkeit der Behauptung klar; sie läßt sich durch vollständige Induktion auch für beliebige $\nu > 4$ beweisen; übrigens würde (für unsere Zwecke) genügen, uns auf die triviale Tatsache zu berufen, daß es ein Z gibt, wobei die Anzahl der Maschenseiten $< 4\nu$ ist.

Diesen Satz, im Falle der Potenzreihe (2), enthält der Satz

V. Zu jedem positiven λ und μ, und zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine positive, außer von diesen Zahlen noch von k $(k \geqq 2)$ abhängende Größe $L = L(\lambda, \mu, n, k)$ derart, daß jede Potenzreihe (2) *mit* $\omega(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - \xi_i)$, $\underset{\omega(x)=0}{\text{Max}} |a_0(x)| \leqq \lambda$, $\underset{\omega(x)=0}{\text{Max}} |a_n(x)| \geqq \mu$, *welche im Bereiche* $|\omega(x)| \leqq \text{Max}\,(L, M)$ *konvergiert, daselbst eine Summe* $F(x)$ *liefert, die dort mindestens einmal gleich* 0 *oder* 1 *wird. Hierbei ist* M *durch die Gleichung*

$$M = \underset{\omega'(x)=0}{\text{Max}} |\omega(x)|$$

definiert.

Beweis: Aus der Definition von M folgt, daß für $R \geqq M$ der Bereich $|\omega(x)| \leqq R$ aus *einem* Stücke besteht (vgl. die Fußnote [4]).

Ist (2) für $|\omega(x)| < R$ konvergent, mit der Summe $F(x)$, so kann man die Koeffizienten $a_n(x)$ von (2) für jedes $n \geqq 0$ und für jedes x mit $|\omega(x)| \leqq \frac{R}{4}$ in der Form

$$(3) \qquad a_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\omega(\xi)|=r} \frac{F(\xi)}{\omega(\xi)^{n+1}} \frac{\omega(\xi) - \omega(x)}{\xi - x}\, d\xi$$

ausdrücken, wobei r zwischen $\frac{R}{4}$ und $\frac{R}{2}$ derart festgesetzt ist, daß auf $|\omega(\xi)| = r$ keine Nullstelle von $\omega'(x)$ liegt und folglich diese Linie entweder aus einer einzigen geschlossenen Jordankurve J besteht, oder in mehrere solche, voneinander getrennte geschlossene Jordankurven $J_\tau (\tau = 1, \ldots, h \leqq k)$ zerfällt, längs deren bei positivem Umlauf integriert werden soll.

In der Tat, für $|\omega(x)| \leqq \frac{R}{4}$ gelten die Relationen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\,\omega(x)^n = F(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\omega(\xi)|=r} \frac{F(\xi)}{\xi - x}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\omega(\xi)|=r} \frac{F(\xi)}{\omega(\xi)} \frac{\omega(\xi) - \omega(x)}{\xi - x} \frac{d\xi}{1 - \frac{\omega(x)}{\omega(\xi)}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\omega(\xi)|=r} \frac{F(\xi)}{\omega(\xi)} \frac{\omega(\xi) - \omega(x)}{\xi - x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega(x)}{\omega(\xi)}\right)^n d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \omega(x)^n \oint_{|\omega(\xi)|=r} \frac{F(\xi)}{\omega(\xi)^{n+1}} \frac{\omega(\xi) - \omega(x)}{\xi - x}\, d\xi,$$

wobei die letzte Reihe für $|\omega(x)| \leqq \frac{R}{4}$ gleichmäßig konvergiert, daher muß die daselbst ebenfalls gleichmäßig konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \omega(x)^n \left(a_n(x) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\omega(\xi)|=r} \frac{F(\xi)}{\omega(\xi)^{n+1}} \frac{\omega(\xi) - \omega(x)}{\xi - x}\, d\xi\right)$ eine identisch verschwindende Summe liefern, woraus, wie bei den gewöhnlichen Potenzreihen, das identische Verschwinden der Potenzkoeffizienten, d. h. die Richtigkeit der Formel (3) gefolgert werden kann. (Vgl. die Dissertation von Kienast, a. a. O. [3]))

Um, davon ausgehend, den Satz V zu beweisen, bemerke ich zunächst, daß man den Integrationsweg in (3) derart modifizieren kann, daß man die Kurve J, bzw. jede J_τ (oder einzelne Gruppen G der J_τ) durch irgendeine andere, sie umschließende Jordankurve J^*, bzw. J_τ^* (oder J^{**}) ersetzt, welche im Bereiche $r \leqq |\omega(\xi)| \leqq \frac{3R}{4}$ gelegen ist, da doch dann der Integrand auf der linken Seite von (3), nach unseren Voraussetzungen, im Ringe zwischen J und J^*, bzw. J_τ und J_τ^* (oder G und J^{**}) regulär ist.

Ich will als J^*, bzw. J_τ^* (oder J^{**}) immer eine solche Kurve wählen, die noch der Forderung entspricht, daß der Quotient des Kurvenumfanges und der minimalen Entfernung der Kurve von den Nullstellen ξ_j des $\omega(x)$ sich (mit Hilfe von k) leicht nach oben abschätzen läßt:

Konstruiert man zum durch J bzw. J_τ beränderten Bereiche β bzw. β_τ, wie im § 6 das B zu B, je ein überdeckendes quadratisches Netzwerk N bzw. N_τ, (wobei aber die Rolle von x_0 dem Anfangspunkte zugeteilt sei), so entspricht der einfachgeschlossene Polygonzug P bzw. P_τ, welcher dessen einzige, oder, wenn das Netzwerk mehrfach zusammenhängend ist, seine äußere Berandung bildet, jeder der 3 obigen Forderungen, falls die (gemeinsame) Länge l der Maschenseiten geeignet festgesetzt wird, es sei denn, daß N_τ mit einem N_σ eine Masche gemeinsam besitzt; in diesem Ausnahmsfalle vereinige man sämtliche so verkettete Netzwerke $N_\tau, N_\sigma, \ldots$, die mindestens paarweise gemeinsame Maschen besitzen, zu einem einzigen Netzwerke N, dessen einfachgeschlossene (äußere) polygonale Berandung Π dann (bei der erwähnten Modifikation des Integrationsweges an die Stelle der Gruppe G der von N überdeckten $C_\tau, C_\sigma, \ldots$ treten soll.

Es bedeute ν die Anzahl der Maschen, aus welchem das fragliche Netzwerk zusammengesetzt ist; dann ist der Umfang von P bzw. P_τ bzw. $\Pi \leqq 4\nu l$, wobei ν der Ungleichung $\nu < \left(4\frac{\sqrt[k]{R}}{l} + 2\right)^2$ befriedigt, da ja die Spanne des durch das Netzwerk übergedeckten Bereiches nicht größer als die Spanne von $|\omega(x)| \leqq R$ sein kann, also sicherlich $\leqq 4\sqrt[k]{R}$ ausfällt.

Andererseits ist die minimale Entfernung des zur (äußeren) Berandung dienenden Polygonzuges von den Nullstellen ξ_j nicht kleiner, als die entsprechende Größe im Falle, wo der Polygonzug durch die Lemniskatenlinie $|\omega(x)| = \frac{R}{4}$ ersetzt wird. d. h. man kann die fragliche Entfernung nach unten durch $\frac{\frac{R}{4}}{(4\sqrt[k]{R})^{k-1}} = \frac{\sqrt[k]{R}}{4^k}$ abschätzen (vgl. die analoge Abschätzung in der Fußnote [9])), woraus für den oben definierten Quotienten als obere Schranke $4^{k+1}\frac{l}{\sqrt[k]{R}}\left(4\frac{\sqrt[k]{R}}{l} + 2\right)^2$ sich ergibt.

Um zu sichern, daß P bzw. P_τ bzw. Π im Bereiche $r \leqq |\omega(x)| \leqq \frac{3R}{4}$ enthalten sei, genügt es offenbar $l \leqq \frac{A}{\sqrt{2}}$ zu setzen, wobei A den Abstand zwischen $|\omega(x)| = \frac{R}{2}$ und $|\omega(x)| = \frac{3R}{4}$ bedeutet; nun ist $A \geqq \frac{\left(\sqrt[k]{\frac{4}{3}} - 1\right)\sqrt[k]{\frac{3R}{4}}}{4^{k-1}}$ (vgl. die Abschätzung für a in der Fußnote [9])), also kann ich die Wahl

$$l = \frac{\left(1 - \sqrt[k]{\frac{3}{4}}\right)\sqrt[k]{R}}{\sqrt{2}\,.\,4^{k-1}}$$

treffen, was für den fraglichen Quotienten die nur von k abhängende Schranke

$$s_k = 8\sqrt{2}\left(1 - \sqrt[k]{\frac{3}{4}}\right)\left(\frac{4^k\sqrt{2}}{1 - \sqrt[k]{\frac{3}{4}}} + 2\right)^2$$

liefert.

Auf Grund dieses Resultates und der Formel (3) kann ich nun den Beweis von V in wenigen Schritten zu Ende führen. In der Tat, für den Fall, wo $|\omega(x)| \leqq r$ aus *einem* Stücke besteht, folgt aus (3)

$$a_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_P \frac{F(\xi)}{\omega(\xi)^{n+1}} \frac{\omega(\xi) - \omega(x)}{\xi - x} d\xi \qquad \left(|\omega(x)| \leqq \frac{R}{4}\right)$$

und daher gilt

$$\mu \leqq \operatorname*{Max}_{\omega(x)=0} |a_n(x)| < \frac{1}{2\pi} \operatorname*{Max}_{|\omega(\xi)|=\frac{3R}{4}} |F(\xi)| \cdot \frac{1}{\left(\frac{R}{4}\right)^n} \cdot s_k ,$$

was für R die Abschätzung

$$(4) \qquad R < 4 \sqrt[n]{\frac{s_k}{\mu} \operatorname*{Max}_{|\omega(\xi)|=\frac{3R}{4}} |F(\xi)|}$$

liefert, während im Falle, wo $|\omega(x)| \leqq r$ aus h $(1 < h \leqq k)$ voneinander getrennten Bereichen, und dementsprechend der Integrationsweg $|\omega(x)| = r$ in dem Integral der Formel (3) aus h getrennten Jordankurven J_τ zusammengesetzt ist, die Ersetzung der J_τ durch die oben erklärten Polygonzüge P_τ bzw. im Notfalle durch Polygonzüge wie Π den Koeffizienten $a_n(x)$, für die Nullstellen ξ_j von $\omega(x)$ in der Form

$$a_n(\xi_j) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{F(\xi)}{\omega(\xi)^{n+1}} \frac{\omega(\xi) - \omega(x)}{\xi - x} d\xi ,$$

wo längs jenem der eben genannten Polygonzüge integriert wird, welcher ξ_j umschließt, erscheinen läßt, woraus die Beziehung

$$\mu \leqq \operatorname*{Max}_{\omega(x)=0} |a_n(x)| \leqq \frac{1}{2\pi} \operatorname*{Max}_{|\omega(\xi)|=\frac{3}{4}} |F(\xi)| \cdot \frac{s_k}{\left(\frac{R}{4}\right)^n}$$

und daher wiederum

$$(4) \qquad R < 4 \sqrt[n]{\frac{s_k}{\mu} \operatorname*{Max}_{|\omega(\xi)|=\frac{3R}{4}} |F(\xi)|}$$

folgt.

Ist nun die Summe $F(x)$ von (2) im Bereiche $|\omega(x)| < R$ von 0 und 1 verschieden, so kann man, nach dem Satz II, für $\operatorname*{Max}_{|\omega(\xi)|=\frac{3R}{4}} |F(\xi)|$ eine obere Schranke S^* finden, die nur von $\lambda = \operatorname*{Max}_{\omega(x)=0} |a_0(x)|$ und von k abhängt; verknüpft man diese Tatsache mit (4) so sieht man sofort, daß jedes R mit $R \geqq M$, für welches (2) im Bereiche $|\omega(x)| < R$ gegen eine überall von 0 und 1 verschiedene Summe konvergiert, der Bedingung

$$R < 4 \sqrt[n]{\frac{s_k}{\mu} S^*} = L(\lambda, \mu, n, k)$$

unterworfen ist. W. z. b. w.

Jerusalem, 28. Februar 1931. Math. Institut der hebräischen Universität,

---

Eingegangen 12. März 1931.

Beiträge zur Klassifizierung der Flächenabbildungen.

Von *Heinz Hopf* in Zürich.

Die Aufgabe, die Klassen der Abbildungen der geschlossenen orientierbaren Fläche F_p vom Geschlecht p auf die geschlossene orientierbare Fläche F_q vom Geschlecht q aufzuzählen, scheint mir sowohl wegen des Zusammenhanges mit funktionentheoretischen Fragen, — da eine über einer Riemannschen Fläche des Geschlechtes q ausgebreitete Riemannsche Fläche des Geschlechtes p eine derartige Abbildung definiert [1]) —, als auch vom rein topologischen Standpunkt aus großen Interesses wert zu sein. Gelöst ist sie nur für spezielle p, q. Sieht man von diesen Sonderfällen, auf die wir sogleich zurückkommen werden, ab, so ist, wie man leicht zeigt [2]), die gewünschte Aufzählung identisch mit der Angabe aller Homomorphismen der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}_p$ von F_p in die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}_q$ von F_q [3]); aber dieses gruppentheoretische Problem dürfte kaum leichter zu erledigen sein als das ursprüngliche geometrische.

Die erwähnten Fälle, die man beherrscht, sind die, in denen eine der Flächen das Geschlecht 0 hat. Ist zunächst $q = 0$, so gibt es nach einem Satz von Brouwer [4]) zu jeder ganzen Zahl c eine und nur eine Klasse von Abbildungen der F_p auf die F_0 vom Grade c. Ist $q \geqq 1$, $p = 0$, so bewirkt eine Abbildung f der F_0 auf die F_q stets eine, infolge des einfachen Zusammenhanges der F_0 nach dem Monodromieprinzip eindeutige, Abbildung f' der F_0 auf die, der Ebene homöomorphe, universelle Überlagerungsfläche F' von F_q; die Bildmenge $f'(F_0)$ läßt sich auf F' stetig in einen Punkt zusammenziehen, und diesem Vorgang entspricht auf F_q eine Zusammenziehung der Menge $f(F_0)$ in einen Punkt; mithin bilden alle Abbildungen der F_0 auf die F_q ($q \geqq 1$) eine einzige Klasse. Wir werden im folgenden daher stets $p, q \geqq 1$ voraussetzen.

Unser Problem läßt sich, wie schon gesagt wurde und wie im § 1 auseinandergesetzt werden wird, sowohl geometrisch als gruppentheoretisch deuten und anfassen. Beide Möglichkeiten werden mit großem Erfolg in den Untersuchungen von J. Nielsen [5]) ausgenutzt; in ihnen handelt es sich zwar um topologische Abbildungen der Flächen auf sich bzw. um Auto-Isomorphismen der Fundamentalgruppen, jedoch dürften sich Methoden und Ergebnisse zum Teil auf beliebige Abbildungen ausdehnen lassen. Von der

---

[1]) S. z. B. A. Hurwitz, Über Riemannsche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten, Math. Annalen **39** (1891); (V. Abschnitt: Flächen, welche über einer gegebenen Fläche ausgebreitet sind).

[2]) L. E. J. Brouwer, Aufzählung der Abbildungsklassen endlichfach zusammenhängender Flächen, Math. Annalen **82** (1921); (besonders: „Vierter Hauptfall").

[3]) Unter einem Homomorphismus von $\mathfrak{G}_p$ in $\mathfrak{G}_q$ verstehen wir eine eindeutige, nicht notwendigerweise eineindeutige, die Gruppenoperation erhaltende Abbildung von $\mathfrak{G}_p$ auf eine, i. a. echte, Untergruppe von $\mathfrak{G}_q$.

[4]) L. E. J. Brouwer, Sur la notion de „classe" . . ., Proc. of the V. intern. Congr. of Math., Cambridge 1912. — Over één-éénduidige transformaties . . ., Amst. Akad. Versl. **21** (1913). — S. auch H. Hopf, Abbildungsklassen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen **96** (1926).

[5]) J. Nielsen, Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, Acta mathematica **50, 53** (1927, 1929).

rein geometrischen Seite her sind wichtige Beiträge zu der Lösung des Problems von H. Kneser [6]) geliefert worden, von denen hier die folgenden genannt seien: Der Abbildungsgrad c unterliegt der Beschränkung $|c| \cdot (q-1) \leqq p-1$; ist $p = q$, so enthält jede Klasse, für die $c = \pm 1$ ist, eine topologische Abbildung.

Auf algebraisch-gruppentheoretischem Wege habe ich in einer vor kurzem in diesem Journal erschienenen Arbeit [7]) Sätze über Abbildungen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten bewiesen, die im Falle $n = 2$ hierher gehören. Für diesen Fall läßt sich der Beweis des Hauptsatzes [8]), aus dem fast alles andere leicht auf rein algebraischem Wege folgte, insofern wesentlich elementarer — wenn auch vielleicht nicht durchsichtiger — gestalten, als die Methode der früheren Arbeit die Heranziehung 4-dimensionaler Mannigfaltigkeiten zwecks Behandlung der Flächen erforderte, während man, wie im folgenden gezeigt werden wird, im Fall $n = 2$ auch mit einer anderen, ganz in zwei Dimensionen operierenden Methode zum Ziele und damit zu Beiträgen für die Beantwortung unserer Frage gelangt (§§ 2, 3, 4).

Infolge der Äquivalenz des geometrischen und des gruppentheoretischen Problems muß es möglich sein, aus einem vorgelegten Homomorphismus von $\mathfrak{G}_p$ in $\mathfrak{G}_q$ alle geometrischen Abbildungseigenschaften abzulesen, die innnerhalb der Abbildungsklassen invariant sind. Die wichtigste und einfachste derartige Eigenschaft ist der Abbildungsgrad. Die Aufgabe, ihn aus dem Homomorphismus zu bestimmen, wird gelöst. Die eigentliche Hauptaufgabe, alle Homorphismen aufzuzählen, ist für den Fall $q = 1$ leicht lösbar (§ 2); für den allgemeinen Fall wird sie nur insofern gefördert, als Bedingungen angegeben werden, die dafür notwendig sind, daß eine Zuordnung von Elementen der Gruppe $\mathfrak{G}_q$ zu den Erzeugenden von $\mathfrak{G}_p$ einen Homomorphismus von $\mathfrak{G}_p$ in $\mathfrak{G}_q$ bewirkt. Aber diese Bedingungen sowie die sich ergebenden Zusammenhänge zwischen dem Gruppenhomomorphismus und dem Abbildungsgrad (§§ 3, 4, 5) dürften auch an sich interessant sein.

§ 1. Die Homomorphismen der Fundamentalgruppen und die Abbildungsklassen.

Eine Abbildung f von F_p auf F_q bewirkt bekanntlich [9]) folgendermaßen eine Abbildung von $\mathfrak{G}_p$ auf $\mathfrak{G}_q$: Den geschlossenen Wegen durch einen Punkt x von F_p entsprechen geschlossene Wege durch den Bildpunkt $\xi = f(x)$; äquivalenten Wegen, d. h. solchen, die sich unter Festhaltung von x ineinander deformieren lassen, entsprechen dabei äquivalente Wege durch ξ; mithin wird die Gruppe $\mathfrak{G}_p(x)$ der Klassen äquivalenter Wege durch x, die die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}_p$ repräsentiert, in die, $\mathfrak{G}_q$ repräsentierende, Gruppe $\mathfrak{G}_q(\xi)$ der zu ξ gehörigen Äquivalenzklassen abgebildet, und diese Abbildung ist ein Homomorphismus. Faßt man ihn als Homomorphismus der — vom Punkte x unabhängigen — Gruppe $\mathfrak{G}_p$ in die Gruppe $\mathfrak{G}_q$ auf, so ist er nur bis auf innere Automorphismen von $\mathfrak{G}_q$ bestimmt. Bezeichnen wir die Gesamtheit der Homomorphismen von $\mathfrak{G}_p$ in $\mathfrak{G}_q$, die durch innere Automorphismen von $\mathfrak{G}_q$ aus einem Homomorphismus hervorgehen, als eine „Homomorphismenklasse", so definiert also f eine Homomorphismenklasse von $\mathfrak{G}_p$ in $\mathfrak{G}_q$. Bei stetiger Abänderung von f bleibt die Homomorphismenklasse ungeändert; es gehört also zu jeder Abbildungsklasse von F_p auf F_q eine wohl-

---

[6]) H. Kneser, Glättung von Flächenabbildungen, Math. Annalen **100** (1928); Die kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen, Math. Annalen **103** (1930).

[7]) Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Bd. **163** (1930); im folgenden mit „A." zitiert.

[8]) A., § 3, Satz 1.

[9]) Bezüglich allgemeiner Eigenschaften der Fundamentalgruppen und ihres Verhaltens bei Abbildungen vgl. man § 1 und § 2, 1 meiner Arbeit: Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, II. Teil, Math. Annalen **102** (1929). — Wir werden übrigens alle vorkommenden Gruppen additiv schreiben.

bestimmte Homomorphismenklasse von $\mathfrak{G}_p$ in $\mathfrak{G}_q$. Ist H der durch f bewirkte Homomorphismus von $\mathfrak{G}_p(x)$ in $\mathfrak{G}_q(\xi)$, so läßt sich f stetig in eine Abbildung f' abändern, die einen willkürlich vorgeschriebenen Homomorphismus H' der durch H bestimmten Homomorphismenklasse bewirkt: man hat die Abänderung so vorzunehmen, daß das Bild von x einen geschlossenen Weg durchläuft, der einem Gruppenelement entspricht, welches den H in H' transformierenden inneren Automorphismus von $\mathfrak{G}_q$ erzeugt [10]).

Dieser für die Abbildungen beliebiger Mannigfaltigkeiten gültige Tatbestand läßt sich in unserem Fall, in dem F_p, F_q Flächen mit $p, q \geqq 1$ sind, umkehren:

Satz I. *Jede willkürlich gegebene Homomorphismenklasse von $\mathfrak{G}_p$ in $\mathfrak{G}_q$ wird durch eine und nur eine Abbildungsklasse von F_p auf F_q bewirkt.*

Beweis: x, ξ seien willkürlich gegebene Punkte auf F_p bzw. F_q; $w_1, w_2, \ldots, w_{2p}$ seien einfach geschlossene Wege durch x, die ein kanonisches Schnittsystem bilden; d. h. bei Aufschneidung längs dieser Wege geht F_p in ein $4p$-Eck P über, das wir uns im Fall $p = 1$ in der euklidischen, im Fall $p \geqq 2$ in der hyperbolischen Ebene geradlinig und gleichseitig liegend denken, und dessen Seiten wir der Reihe nach mit $\bar{w}_1, \bar{w}_2, -\bar{w}_1, -\bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_{2p-1}, \bar{w}_{2p}, -\bar{w}_{2p-1}, -\bar{w}_{2p}$ zu bezeichnen haben, wobei $\pm \bar{w}_i$ aus w_i hervorgegangen sind. Ist H ein vorgegebener Homomorphismus von $\mathfrak{G}_p(x)$ in $\mathfrak{G}_q(\xi)$, so wählen wir in den Äquivalenzklassen $H(w_i)$ von $\mathfrak{G}_p(\xi)$ Wege w_i' aus und definieren auf den w_i eine Abbildung f so, daß $f(x) = \xi$, $f(w_i) = w_i'$ ist $(i = 1, 2, \ldots, 2p)$. Wir haben diese Abbildung f zu einer Abbildung der ganzen Fläche F_p zu erweitern.

Zu diesem Zweck betrachten wir die als euklidische bzw. hyperbolische Ebene aufzufassende universelle Überlagerungsfläche F' von F_q und in ihr einen über ξ liegenden Punkt $\bar{\xi}$. $\bar{x}$ sei der Anfangspunkt der Seite $\bar{w}_1$ von P; wir setzen $f(\bar{x}) = \bar{\xi}$; der Durchlaufung des Randes $R = \bar{w}_1 + \bar{w}_2 - \bar{w}_1 - \bar{w}_2 + \cdots - \bar{w}_{2p-1} - \bar{w}_{2p}$ von P entspricht auf F_p die Durchlaufung eines geschlossenen Weges W, auf dem f erklärt ist; dem Bilde $f(W)$ entspricht in F' ein in $\bar{\xi}$ beginnender Weg R'. Nach Konstruktion von f repräsentiert $f(W)$ die Klasse $H(w_1) + H(w_2) - H(w_1) - H(w_2) + \cdots - H(w_{2p-1}) - H(w_{2p})$ von $\mathfrak{G}_q(\xi)$; dies ist, da $w_1 + w_2 - w_1 - w_2 + \cdots - w_{2p-1} - w_{2p}$ das Nullelement von $\mathfrak{G}_p(x)$ darstellt und H nach Voraussetzung ein Homomorphismus ist, das Nullelement von $\mathfrak{G}_q(\xi)$; das bedeutet, daß $f(W)$ auf F_q in einen Punkt zusammenziehbar ist; mithin ist der $f(W)$ auf F' entsprechende Weg R' *geschlossen*. Die durch Vermittlung von W und $f(W)$ gegebene, durch stetige Fortsetzung von $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{\xi}$ längs R entstehende Abbildung $\bar{f}$ von R auf R' ist daher *eindeutig*. Es sei nun weiter $\bar{y}$ ein willkürlicher Punkt im Inneren von P, $\bar{\eta}$ ein willkürlicher Punkt von F'; wir definieren dann $\bar{f}(P)$ durch die Festsetzung $\bar{f}(\bar{y}) = \bar{\eta}$ und durch die Vorschrift, daß für jeden Punkt $\bar{r} < R$ die Strecke $\bar{y}\bar{r}$ proportional — im Sinne der euklidischen bzw. hyperbolischen Geometrien von P und F' — auf die Strecke $\bar{\eta}\bar{f}(\bar{r})$ abgebildet werden soll. Die gewünschte Erweiterung der auf der Punktmenge $w_1 + w_2 + \cdots + w_p$ erklärten Abbildung f zu einer Abbildung der ganzen Fläche F_p geschieht nun folgendermaßen: ist z ein nicht zu der genannten Menge gehöriger Punkt von F_p, $\bar{z}$ der ihm entsprechende Punkt in P, so ist $f(z)$ der von $\bar{f}(\bar{z})$ überlagerte Punkt von F_p. Die Eindeutigkeit und Stetigkeit dieser Abbildung ergibt sich unmittelbar aus ihrer Konstruktion.

Nachdem so gezeigt ist, daß jede Homomorphismenklasse von $\mathfrak{G}_p$ in $\mathfrak{G}_q$ durch Abbildungen von F_p auf F_q bewirkt werden kann, ist noch zu beweisen, daß verschiedene Abbildungsklassen stets verschiedene Homomorphismenklassen bewirken, oder, was dasselbe ist, daß zwei Abbildungen f, f', die Homomorphismen einer Klasse hervor-

[10]) S. 573, zweiter Absatz, der soeben zitierten Arbeit.

rufen, immer zu einer Abbildungsklasse gehören [11]). Dabei können wir — was sich durch stetige Abänderung von f' erreichen läßt — annehmen, daß für einen Punkt x von F_p $f(x) = f'(x) = \xi$ ist, und auf Grund des Schlußsatzes des ersten Abschnittes dieses Paragraphen dürfen wir überdies voraussetzen, daß f und f' denselben Homomorphismus H von $\mathfrak{G}_p(x)$ in $\mathfrak{G}_q(\xi)$ bewirken.

Die gewünschte Überführung von f in f' werden wir dadurch konstruieren, daß wir jedem Punkt y von F einen in $f(y)$ beginnenden, in $f'(y)$ endenden Weg $s(y)$ auf F_q zuordnen, der stetig von y abhängt und geradlinig im Sinne der euklidischen oder hyperbolischen Metrik von F_q ist. Wenn diese Wege gefunden sind, bezeichnen wir mit $f_t(y)$ den Punkt, der im Sinne der betreffenden Metrik die Strecke $s(y)$ im Verhältnis $t : 1 - t$ teilt; während t von 0 bis 1 läuft, geht dann f stetig in f' über.

Zwecks Konstruktion der Strecken $s(y)$ betrachten wir wieder die universelle Überlagerungsfläche F' von F_q und in ihr einen über ξ liegenden Punkt $\bar{\xi}$. Ist v_1 ein von x ausgehender, in y endender Weg auf F_p, so entsprechen seinen Bildern $f(v_1)$, $f'(v_1)$ zwei Wege $\bar{v}_1$, $\bar{v}_1'$ auf F', die in $\bar{\xi}$ beginnen und deren Endpunkte $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_1'$ über $f(y)$, $f'(y)$ liegen; analog liefert ein zweiter von x nach y laufender Weg v_2 zwei von $\bar{\xi}$ ausgehende Wege $\bar{v}_2$, $\bar{v}_2'$ mit Endpunkten $\bar{\eta}_2$, $\bar{\eta}_2'$ über $f(y)$, $f'(y)$. Wir behaupten, daß es eine Decktransformation von F' gibt, die gleichzeitig $\bar{\eta}_1$ in $\bar{\eta}_2$ und $\bar{\eta}_1'$ in $\bar{\eta}_2'$ überführt. In der Tat: da f und f' nach Voraussetzung denselben Homomorphismus H von $\mathfrak{G}_p(x)$ in $\mathfrak{G}_q(\xi)$ bewirken, gehören die beiden durch ξ gehenden geschlossenen Wege $f(v_1 - v_2)$ und $f'(v_1 - v_2)$ zu einer Äquivalenzklasse; die sie überlagernden, in $\bar{\xi}$ beginnenden Wege auf F' haben daher denselben Endpunkt $\bar{\bar{\xi}}$, (der ebenfalls über ξ liegt); die beiden Überlagerungswege $\bar{\bar{v}}_2$, $\bar{\bar{v}}_2'$ von $f(v_2)$ und $f'(v_2)$, die in $\bar{\bar{\xi}}$ beginnen, enden daher in $\bar{\eta}_1$ bzw. $\bar{\eta}_1'$; da bei derjenigen Decktransformation, die $\bar{\bar{\xi}}$ in $\bar{\xi}$ überführt, $\bar{\bar{v}}_2$ und $\bar{\bar{v}}_2'$ in $\bar{v}_2$ und $\bar{v}_2'$ übergehen, werden mithin bei ihr $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_1'$ in $\bar{\eta}_2$, $\bar{\eta}_2'$ transformiert. — Da die Decktransformation eine euklidische oder hyperbolische Bewegung ist, bildet sie die Strecke $\bar{\eta}_1\,\bar{\eta}_1'$ kongruent auf die Strecke $\bar{\eta}_2\,\bar{\eta}_2'$ ab. Die von diesen Strecken überlagerte, von $f(y)$ nach $f'(y)$ führende Strecke $s(y)$ ist daher von der speziellen Wahl der Wege v unabhängig und hängt somit eindeutig und stetig von y ab.

Damit ist der Satz I bewiesen und die Äquivalenz der Aufzählung der Abbildungsklassen von F_p auf F_q mit der Aufzählung der Homomorphismenklassen von $\mathfrak{G}_p$ in $\mathfrak{G}_q$ dargetan. Dieses gruppentheoretische Problem läßt sich auch folgendermaßen formulieren:

Bezeichnen wir ein kanonisches Wegesystem auf F_p, das wir früher $w_1, w_2, \ldots, w_{2p}$ nannten und das ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}_p$ darstellt, jetzt mit $a_1, b_1 \ldots, a_p, b_p$ und ein analoges System auf F_q mit $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_q, \beta_q$, so gehört zu jedem Homomorphismus H von $\mathfrak{G}_p$ in $\mathfrak{G}_q$ ein Formelsystem

$$(1) \qquad \begin{aligned} H(a_i) &= A_i(\alpha, \beta) \\ H(b_i) &= B_i(\alpha, \beta) \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

wobei die A_i, B_i Summen in den α_j, $\beta_j (j = 1, 2, \ldots, q)$ sind, die im allgemeinen von der Reihenfolge der Summanden abhängen. Die Frage nach den Homomorphismenklassen läßt sich nun in folgende zwei Fragen zerlegen: 1. Unter welchen Bedingungen ist bei willkürlich gegebenen Ausdrücken A_i, B_i die durch (1) bestimmte Gruppenabbildung H ein Homomorphismus? 2. Wenn man zwei Systeme A_i, B_i; A_i', B_i' hat, von denen jedes durch (1) einen Homomorphismus H bzw. H' definiert, unter welchen Bedingungen gehören dann H und H' zu einer Homomorphismenklasse?

---

[11]) Dieser Beweis steht in der unter [2]) genannten Arbeit von Brouwer.

Die erste Frage läßt sich auch anders fassen. Die Erzeugenden a_i, b_i und α_j, β_j von $\mathfrak{G}_p$ bzw. $\mathfrak{G}_q$ erfüllen bekanntlich die Relationen [12])

$$a_1 + b_1 - a_1 - b_1 + \cdots + a_p + b_p - a_p - b_p = 0$$
$$\alpha_1 + \beta_1 - \alpha_1 - \beta_1 + \cdots + \alpha_q + \beta_q - \alpha_q - \beta_q = 0;$$

aus der ersten von ihnen folgt, wenn H ein Homomorphismus ist,

$$A_1(\alpha, \beta) + B_1(\alpha, \beta) - A_1(\alpha, \beta) - B_1(\alpha, \beta) + \cdots = 0, \tag{2}$$

d. h. der links stehende Ausdruck in α_j, β_j ist das Nullelement von $\mathfrak{G}_q$. (2) ist also notwendig dafür, daß H ein Homomorphismus ist; diese Bedingung ist aber auch hinreichend. Das kann man leicht gruppentheoretisch, oder auch folgendermaßen geometrisch erkennen: man definiere wie im Beweise des Satzes I auf den Wegen a_i, b_i eine Abbildung f so, daß für die Bilder die Beziehungen

$$f(a_i) = A_i(\alpha, \beta), \quad f(b_i) = B_i(\alpha, \beta)$$

gelten; man schneide wie früher F_p längs der a_i, b_i so auf, daß das $4p$-Eck P entsteht, dessen Seiten mit $\pm \bar{a}_i$, $\pm \bar{b}_i$ zu bezeichnen sind, und bilde zunächst den Anfangspunkt $\bar{x}$ von $+ \bar{a}_1$ auf den Punkt $\bar{\xi}$ der universellen Überlagerungsfläche F' von F ab; diese Abbildung setze man längs des Randes R von P durch Vermittlung der auf den a_i, b_i erklärten Abbildung f stetig zu einer Abbildung $\bar{f}$ fort; bei Durchlaufung von R beschreibt der Bildpunkt einen Weg R' in F'; dieser Weg R' muß auch jetzt geschlossen sein, da infolge der Gleichung (2) das Bild $f(W) = f(a_1 + b_1 - a_1 - b_1 + \cdots)$ auf F_q in einen Punkt zusammenziehbar ist; daher läßt sich wie früher die bisher nur auf den a_i, b_i erklärte Abbildung f zu einer Abbildung $f(F_p)$ erweitern; der von f bewirkte Homomorphismus H erfüllt (1); diese Formeln definieren also in der Tat einen Homomorphismus. Die Frage 1. läßt sich also auch so aussprechen: 1′. Unter welchen Bedingungen erfüllen durch willkürlich gegebene Ausdrücke A_i, B_i definierte Elemente von $\mathfrak{G}_q$ die Gleichung (2)?

Wir werden an Stelle von (1) meistens das folgendermaßen gebildete System betrachten: man gestatte in den Ausdrücken A_i, B_i das Kommutieren; dann werden aus ihnen Linearformen in den α_j, β_j mit ganzzahligen Koeffizienten, und wir schreiben

$$\begin{aligned} H(a_i) &\sim \sum_j r_{ij}\alpha_j + \sum_j s_{ij}\beta_j \\ H(b_i) &\sim \sum_j t_{ij}\alpha_j + \sum_j u_{ij}\beta_j \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \ldots, p; \quad j = 1, 2, \ldots, q). \tag{3}$$

Da die kommutierte Fundamentalgruppe nichts anderes ist als die Gruppe der eindimensionalen Homologieklassen [13]), und da die a_i, b_i bzw. α_j, β_j zugleich Basen dieser Homologieklassengruppen $\mathfrak{B}_p$, $\mathfrak{B}_q$ von F_p bzw. F_q darstellen, sind die Relationen (3) Homologien, die den durch f bewirkten Homomorphismus von $\mathfrak{B}_p$ in $\mathfrak{B}_q$ angeben.

Betrachtet man neben einem durch (1) gegebenen Homomorphismus H noch einen Homomorphismus H' derselben (Homomorphismen- oder Abbildungs-)Klasse, so geht H' durch einen inneren Automorphismus von $\mathfrak{G}_q$ aus H hervor, d. h. es ist

$$H'(a_i) = C + A_i - C, \quad H'(b_i) = C + B_i - C;$$

beim Übergang zu dem kommutierten System ergibt sich also für ihn dasselbe System (3) wie für H. Das System (3) ist daher durch die Abbildungsklasse von f bzw. durch die Homomorphismenklasse von H eindeutig bestimmt.

In Analogie zu den Fragen 1. und 1′. besteht jetzt die Frage 3.: Unter welchen Bedingungen hat die durch eine vorgegebene Matrix

---

[12]) Wegen der Fundamentalgruppen der Flächen ziehe man etwa den 1. Abschnitt der ersten der beiden unter [5]) zitierten Arbeiten von Nielsen heran.

[13]) S. z. B. O. Veblen, Analysis situs, 2. Aufl. (1931), S. 145 ff.

$$\begin{pmatrix}(r_{ij}) & (s_{ij})\\ (t_{ij}) & (u_{ij})\end{pmatrix} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, q)$$

definierte Substitution (3) die Eigenschaft, durch Kommutieren aus einem Homomorphismus (1) entstanden zu sein? Oder, anders ausgedrückt: Welche willkürlich gegebenen Homologien (3) werden durch Abbildungen von F_p auf F_q erzeugt?

Wir werden diese Frage nicht beantworten, sondern nur notwendige Bedingungen für die Koeffizienten r, s, t, u angeben; dies sind dann zugleich notwendige Bedingungen im Sinne der Fragen 1. und 1′.

§ 2. Aufzählung der Klassen und Bestimmung des Grades im Fall $q = 1$.

Im Fall $q = 1$ sind alle im vorigen Paragraphen gestellten Fragen leicht zu beantworten. $\mathfrak{G}_1$ wird von zwei Elementen α, β erzeugt, zwischen denen die Relation $\alpha + \beta - \alpha - \beta = 0$, und sonst keine Relation besteht; $\mathfrak{G}_1$ ist also die Abelsche Gruppe der Linearformen in zwei Symbolen α, β und fällt mit der Homologieklassengruppe $\mathfrak{B}_1$ zusammen. Die Systeme (1) und (3) sind miteinander identisch, und (1) kann daher von vornherein in der Gestalt (3) geschrieben werden. Für zwei verschiedene (Abbildungs- oder Homomorphismen-)Klassen sind stets die rechten Seiten von (1) und mithin jetzt auch die rechten Seiten von (3) voneinander verschieden; die Frage 2. ist mithin so zu beantworten, daß zwei Homomorphismen dann und nur dann zu einer Klasse gehören, wenn zu ihnen dasselbe System (3) gehört.

Was die Fragen 1., 1′., 3. betrifft, so sind sie einfach dadurch zu beantworten, daß die Ausdrücke A_i, B_i bzw., was jetzt dasselbe ist, die Koeffizienten r, s, t, u überhaupt keinen Bedingungen unterliegen; denn wegen der Kommutativität von $\mathfrak{G}_1$ wird die Gleichung (2) von beliebigen A_i, B_i erfüllt. — Fassen wir zusammen:

Satz II. *Jede Abbildungsklasse der F_p auf die F_1 erzeugt eine bestimmte Transformation*

$$(3') \qquad \begin{aligned} H(a_i) &\sim r_i\alpha + s_i\beta \\ H(b_i) &\sim t_i\alpha + u_i\beta \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p);$$

umgekehrt gibt es zu jeder willkürlich vorgelegten Substitution (3′) *eine und nur eine Klasse von Abbildungen der F_p auf die F_1, welche diese Substitutionen erzeugen.*

Infolge dieser eineindeutigen Zuordnung zwischen den Substitutionen (3′) und den Abbildungsklassen muß der Abbildungsgrad durch die Koeffizienten von (3′) bestimmt sein. Wie man ihn findet, sagt der folgende Satz:

Satz III a. *Der Grad einer zu* (3′) *gehörigen Abbildung ist*

$$c = \sum_i \begin{vmatrix} r_i & s_i \\ t_i & u_i \end{vmatrix}.$$

Beweis: Die universelle Überlagerungsfläche F' von F_1 fassen wir als euklidische x_1-x_2-Ebene auf, in der

$$x_1' = x_1 + m, \quad x_2' = x_2 + n \qquad (m, n \text{ ganz})$$

die zu F_1 gehörigen Decktransformationen sind, so daß man als Fundamentalbereiche z. B. achsenparallele Einheitsquadrate wählen kann. Unter Π_i werde das Parallelogramm mit den Ecken $(0, 0)$, (r_i, s_i), $(r_i + t_i, s_i + u_i)$, (t_i, u_i) verstanden. P sei wieder wie im § 1 das durch Aufschneiden von F_p entstandene $4p$-Eck mit den Seiten $\bar a_1, \bar b_1, -\bar a_1, -\bar b_1, \ldots, \bar a_p, \bar b_p, -\bar a_p, -\bar b_p$. Bilden wir die Seiten $\bar a_i, \bar b_i, -\bar a_i, -\bar b_i$ der Reihe nach proportional auf die Seiten $(0, 0)$ $(r_i, s_i), \ldots, (t_i, u_i)$ $(0, 0)$ von Π_i ab, so entspricht diese Abbildung $\bar f$ einer Abbildung f der Wege a_i, b_i von F_p auf Wege von F_1, welche die Sub-

stitution (3′) erzeugt. Wir erweitern nun, ähnlich wie früher, die auf dem Rande R von P definierte Abbildung $\bar{f}$ auf ganz P, und damit zugleich f zu einer Abbildung der ganzen Fläche F_p durch die Bestimmung, daß ein im Innern von P fest gewählter Punkt y auf den Punkt $(0, 0)$ und daß für jeden Punkt $z < R$ die Strecke yz proportional auf die Strecke $(0, 0)$ $\bar{f}(z)$ abgebildet wird. Verstehen wir unter P_i den 5-eckigen Teil von P, der von dem Streckenzug $\bar{a}_i + \bar{b}_i - \bar{a}_i - \bar{b}_i$ und den Verbindungsstrecken seiner beiden Endpunkte mit y begrenzt wird, so wird dabei das Innere von P_i eineindeutig auf das Innere von Π_i abgebildet. Der Grad dieser Abbildung ist — bei geeigneter Orientierung von P und von F' — $+1$ oder -1, je nachdem die Determinante $D_i = \begin{vmatrix} r_i & s_i \\ t_r & u_i \end{vmatrix}$ positiv oder negativ ist. Da die Ecken von Π_i ganzzahlige Koordinaten haben, läßt sich Π_i in zueinander kongruente Parallelogramme einteilen, die Fundamentalbereiche von F_1 sind und deren Anzahl gleich dem Flächeninhalt von Π_i, also gleich $|D_i|$ ist; ein Punkt von F_1 hat also in Π_i genau $|D_i|$ Vertreter, vorausgesetzt, daß keiner von ihnen auf dem Rande von Π_i liegt. Folglich ist der Beitrag, den das P_i entsprechende Stück von F_p zu dem Abbildungsgrad von f liefert, genau gleich D_i. Hieraus und aus $P = \sum_i P_i$ folgt die Behauptung.

§ 3. Die Bestimmung des Grades und Aufstellung notwendiger Bedingungen für die Homologiesubstitutionen im allgemeinen Fall.

Daß sich im Fall $q = 1$ der Grad aus den Koeffizienten von (3) bzw. (3′) bestimmen ließ, war selbstverständlich, da in diesem Fall die genannten Gleichungen ja mit (1) identisch sind und da in (1) stets alle in den Abbildungsklassen invarianten Eigenschaften enthalten sind. Im Fall $q \geqq 2$ kann man daher zunächst nur erwarten, den Grad aus (1) ermitteln zu können. Trotzdem läßt er sich auch in diesem allgemeinen Fall bereits aus (3) bestimmen. Es gilt nämlich in Verallgemeinerung des Satzes III a:

Satz III. *Der Grad einer Abbildung der F_p auf die $F_q (p, q \geqq 1)$, zu welcher das System* (3) *gehört, ist*

$$c = \sum_{i=1}^{p} \begin{vmatrix} r_{ij} & s_{ij} \\ t_{ij} & u_{ij} \end{vmatrix},$$

wobei j eine beliebige der Zahlen $1, 2, \ldots, q$ ist.

Beweis: Wir betrachten neben den Flächen F_p und F_q, auf denen wir die kanonischen Kurvensysteme wie früher mit a_i, b_i bzw. α_j, β_j bezeichnen, noch eine Fläche F_1 mit einem kanonischen System α, β und bilden F_q durch eine Abbildung f_1 so auf F_1 ab, daß dadurch die Substitution

$$\text{(3 a)} \qquad \begin{aligned} H_1(\alpha_j) &\sim \alpha, \quad H_1(\alpha_k) \sim 0 \quad \text{für} \quad k \neq j, \\ H_1(\beta_j) &\sim \beta, \quad H_1(\beta_k) \sim 0 \quad \text{für} \quad k \neq j \end{aligned}$$

bewirkt wird, wobei j eine fest gewählte der Zahlen $1, 2, \ldots, q$ ist; daß es eine solche Abbildung f gibt, ist in Satz II enthalten. Nach Satz III a hat f_1 den Grad $c_1 = 1$.

Zu der durch Zusammensetzung von f und f_1 entstehenden Abbildungen $f_1 f$ von F_p auf F_1 gehört die durch Zusammensetzung von (3) und (3″) entstehende Substitution

$$\text{(4 a)} \qquad \begin{aligned} H_1 H(a_i) &\sim r_{ij}\alpha + s_{ij}\beta \\ H_1 H(b_i) &\sim t_{ij}\alpha + u_{ij}\beta \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Nach Satz III a hat daher $f_1 f$ den Grad $\sum_i \begin{vmatrix} r_{ij} & s_{ij} \\ t_{ij} & u_{ij} \end{vmatrix}$. Andererseits hat diese Abbildung, da sich die Grade bei der Zusammensetzung von Abbildungen multiplizieren, infolge $c_1 = 1$ den Wert c, wenn dies der Grad von f ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Die Unabhängigkeit der im Satz III auftretenden Determinantensummen vom Index j stellt im Fall $q \geqq 2$ eine Bedingung für die Koeffizienten von (3) dar. Ihr treten ähnliche Bedingungen an die Seite:

Satz IV. *Zwischen den Koeffizienten einer durch eine Abbildung der F_q auf die F_p bewirkten Substitution* (3) *bestehen die Relationen*

$$\text{(5 a)} \qquad \sum_i \begin{vmatrix} r_{i1} & s_{i1} \\ t_{i1} & u_{i1} \end{vmatrix} = \sum_i \begin{vmatrix} r_{i2} & s_{i2} \\ t_{i2} & u_{i2} \end{vmatrix} = \cdots = \sum_i \begin{vmatrix} r_{iq} & s_{iq} \\ t_{iq} & u_{iq} \end{vmatrix};$$

$$\text{(5 b)} \qquad \sum_i \begin{vmatrix} r_{ij} & s_{ij'} \\ t_{ij} & u_{ij'} \end{vmatrix} = 0 \qquad (j' \neq j);$$

$$\text{(5 c)} \qquad \sum_i \begin{vmatrix} r_{ij} & r_{ij'} \\ t_{ij} & t_{ij'} \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{(5 d)} \qquad \sum_i \begin{vmatrix} s_{ij} & s_{ij'} \\ u_{ij} & u_{ij'} \end{vmatrix} = 0.$$

Beweis: Die Gleichungen (5 a) sind mit Satz III bewiesen worden. Die Gleichungen (5 b), (5 c), (5 d) werden ganz analog bewiesen. Man hat nur an Stelle von (3 a) im Falle (5 b) das System

$$\text{(3 b)} \qquad \begin{aligned} H_1(\alpha_j) &\sim \alpha, \quad H_1(\alpha_k) \sim 0 \quad \text{für} \quad k \neq j, \\ H_1(\beta_{j'}) &\sim \beta, \quad H_1(\beta_k) \sim 0 \quad \text{für} \quad k \neq j', \end{aligned}$$

im Falle (5 c) das System

$$\text{(3 c)} \qquad \begin{aligned} H_1(\alpha_j) &\sim \alpha, \quad H_1(\alpha_{j'}) \sim \beta, \quad H_1(\alpha_k) \sim 0 \quad \text{für} \quad k \neq j, j', \\ &\qquad H_1(\beta_k) \sim 0 \quad \text{für alle } k, \end{aligned}$$

im Falle (5 d) das System

$$\text{(3 d)} \qquad \begin{aligned} &\qquad H_1(\alpha_{j'}) \sim 0 \quad \text{für alle } k, \\ H_1(\beta_j) &\sim \alpha, \quad H_1(\beta_{j'}) \sim \beta, \quad H_1(\beta_k) \sim 0 \quad \text{für} \quad k \neq j, j' \end{aligned}$$

zu betrachten. Dann hat in jedem Fall nach Satz III a die Abbildung f_1 den Grad 0, also hat auch $f_1 f$ den Grad 0. Andererseits ist dieser Grad aber nach Satz III a aus den zu $f_1 f$ gehörigen Substitutionen zu ermitteln; diese lauten (in Analogie zu (4 a))

$$\text{(4 b)} \qquad \begin{cases} H_1 H(a_i) \sim r_{ij}\alpha + s_{ij'}\beta, \\ H_1 H(b_i) \sim t_{ij}\alpha + u_{ij'}\beta; \end{cases}$$

$$\text{(4 c)} \qquad \begin{cases} H_1 H(a_i) \sim r_{ij}\alpha + r_{ij'}\beta, \\ H_1 H(b_i) \sim t_{ij}\alpha + t_{ij'}\beta; \end{cases}$$

$$\text{(4 d)} \qquad \begin{cases} H_1 H(a_i) \sim s_{ij}\alpha + s_{ij'}\beta, \\ H_1 H(b_i) \sim u_{ij}\alpha + u_{ij'}\beta. \end{cases}$$

Die zugehörigen Grade sind daher die in (5 b), (5 c), (5 d) links stehenden Summen; mithin sind diese 0.

Die in den Sätzen III und IV enthaltenen Bedingungen für die Koeffizienten von (3) lassen sich noch auf eine andere Weise aussprechen. Betrachten wir nämlich den Homomorphismus der Homologieklassengruppe $\mathfrak{B}_q$ in die Homologieklassengruppe $\mathfrak{B}_p$, der durch die Gleichungen

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} \varphi(\beta_h) &= \sum_i r_{ih} b_i - \sum_i t_{ih} a_i \\ \varphi(\alpha_h) &= -\sum_i s_{ih} b_i + \sum_i u_{ih} a_i \end{aligned}$$

definiert ist, und führen wir φ und H nacheinander aus, so ergibt sich aus (6) und (3)

$$H\varphi(\alpha_h) = \sum_j \sum_i \begin{vmatrix} r_{ij} & s_{ih} \\ t_{ij} & u_{ih} \end{vmatrix} \alpha_j + \sum_j \sum_i \begin{vmatrix} s_{ij} & s_{ih} \\ u_{ij} & u_{ih} \end{vmatrix} \beta_j,$$

$$H\varphi(\beta_h) = \sum_j \sum_i \begin{vmatrix} r_{ih} & r_{ij} \\ t_{ih} & t_{ij} \end{vmatrix} \alpha_j + \sum_j \sum_i \begin{vmatrix} r_{ih} & s_{ij} \\ t_{ih} & u_{ij} \end{vmatrix} \beta_j;$$

daher sind die Aussagen der Sätze III und IV gleichbedeutend mit den Gleichungen

$$(7') \qquad H\varphi(\alpha_h) = c\alpha_h, \qquad H\varphi(\beta_h) = c\beta_h$$

für $h = 1, 2, \ldots, q$, und diese Gleichungen sind, da jedes Element von $\mathfrak{B}_q$ eine lineare Verbindung der α_h, β_h ist, gleichbedeutend mit der Gültigkeit von

$$(7) \qquad H\varphi(\zeta) = c\zeta$$

für jedes Element ζ von $\mathfrak{B}_q$, d. h. für jede eindimensionale Homologieklasse auf F_q. Der Inhalt der Sätze III und IV läßt sich daher zusammenfassen zu:

Satz V. *Der durch eine Abbildung f von F_p auf F_q bewirkte, durch* (3) *ausgedrückte Homomorphismus H der Homomologieklassen von F_p in die Homologieklassen von F_q steht mit dem — in umgekehrter Richtung ausgeübten — Homomorphismus φ, der durch* (6) *bestimmt wird, in der Beziehung* (7), *wobei c der Grad von f ist*[14]).

Wir ziehen zwei Folgerungen bezüglich des Ranges der Substitution (3):

Satz VIa. *Ist $c \neq 0$, so hat die Substitution* (3) *den Rang $2q$*[15]).

Satz VIb. *Ist $c = 0$, so ist der Rang von* (3) *höchstens gleich p*[16]).

Beweis von VIa: Die $2q$ Elemente $c\alpha_j$, $c\beta_j$ sind unabhängig in $\mathfrak{B}_q$. Infolge von (7') und (6) sind sie lineare Verbindungen der rechten Seiten von (3). Unter den Zeilen der Koeffizientenmatrix von (3) sind also $2q$ linear unabhängige. Da die Anzahl der Spalten $2q$ ist, hat die Matrix daher den Rang $2q$.

Beweis von VIb: Da die Matrix von (6) aus der Matrix von (3) durch Übergang zur Transponierten und durch Multiplikation der letzten q Zeilen und der letzten p Spalten mit -1 entsteht, haben die beiden Matrizen gleichen Rang ϱ. Ändern wir unsere bisherige Bezeichnung derart, daß wir die a_i, b_i mit c_i $(i = 1, 2, \ldots, 2p)$, die α_h, β_h mit γ_h $(h = 1, 2, \ldots, 2q)$, die Koeffizienten von (3) und (6) mit v_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, 2p;$ $j = 1, 2, \ldots, 2q)$ und w_{hi} $(i = 1, 2, \ldots, 2p;\ h = 1, 2, \ldots, 2q)$ bezeichnen, so daß die Substitutionen also die Gestalt

$$H(c_i) = \sum_j v_{ij}\gamma_j$$

$$\varphi(\gamma_h) = \sum_i w_{hi} c_i$$

erhalten, so ist infolge von $c = 0$ und von (7)

$$\sum_i w_{hi} v_{ij} = 0.$$

Die Zahlenreihen $v_{1j}, v_{2j}, \ldots, v_{2p,j}$ mit $j = 1, 2, \ldots, 2q$, unter denen ϱ unabhängige sind, sind also Lösungen des Gleichungssystems

$$\sum_i w_{hi} x_i = 0$$

für die $2p$ Unbekannten x_i. Da die Koeffizientenmatrix dieses Systems den Rang ϱ hat, besitzt das System $2p - \varrho$ unabhängige Lösungen. Folglich ist $\varrho \leqq 2p - \varrho$, d. h. $\varrho \leqq p$.

Bemerkungen: 1. Der Satz VIa läßt sich auch auf ganz anderem Wege beweisen und verschärfen (§ 5, letzter Satz).

2. Aus VIa folgt, daß, wenn $c \neq 0$ ist, p nicht kleiner als q sein kann, da die Matrix von (3) ja nur p Zeilen hat, daß man also im Fall $p < q$ die F_p nicht mit einem von 0

[14]) A., Satz Ib.
[15]) A., Satz IIa.
[16]) A., Satz V.

verschiedenen Grade auf die F_q abbilden kann. Diese Tatsache ist aber nur ein Spezialfall des in der Einleitung angeführten Satzes von H. Kneser.

3. In VIa und VIb ist enthalten, daß bei den Abbildungen der F_p auf sich als Ränge von (3) nur die Zahlen $0, 1, \ldots, p$ und $2p$, aber nicht die Zahlen $p+1, \ldots, 2p-1$ auftreten können.

§ 4. Das Verhalten der Schnittzahlen.

Zu je zwei geschlossenen Wegen z_1, z_2 auf F_p gehört eine „Schnittzahl" $(z_1 \cdot z_2)$, die man in bekannter Weise durch Abzählen der mit $+1$ oder -1 zu bewertenden Schnittpunkte von z_1 und z_2 erhält[17]); sie hängt nicht von den speziell gewählten Wegen z_1, z_2, sondern nur von deren Homologieklassen ab. Sie ist distributiv, d. h. es ist $((z_1' + z_1'') \cdot z_2) = (z_1' \cdot z_2) + (z_1'' \cdot z_2)$ usw.; es genügt daher, die Schnittzahlen für die Elemente einer Basis zu kennen. Für eine kanonische Basis a_i, b_i ist bekanntlich

$$(8) \qquad (a_i \cdot b_i) = 1,\ (a_i \cdot b_k) = 0 \text{ für } i \neq k,\ (a_i \cdot a_k) = (b_i \cdot b_k) = 0$$

und analog auf F_q

$$(8') \qquad (\alpha_j \cdot \beta_j) = 1,\ (\alpha_j \cdot \beta_h) = 0 \text{ für } j \neq h,\ (\alpha_j \cdot \alpha_h) = (\beta_j \cdot \beta_h) = 0;$$

außerdem gilt für beliebige Wegepaare auf F_p oder F_q

$$(8'') \qquad (z_1 \cdot z_2) = -(z_2 \cdot z_1), \quad (\zeta_1 \cdot \zeta_2) = -(\zeta_2 \cdot \zeta_1).$$

Der Zusammenhang zwischen den Homomorphismen H und φ läßt sich mit Hilfe der Schnittzahlen in einfacher Weise ausdrücken. φ ist nämlich unter allen linearen Substitutionen, d. h. Homomorphismen, von $\mathfrak{B}_q$ in $\mathfrak{B}_p$ dadurch charakterisiert, daß für beliebige Elemente z, ζ von $\mathfrak{B}_p$ bzw. $\mathfrak{B}_q$ die Gleichung

$$(9) \qquad (\varphi(\zeta) \cdot z) = (\zeta \cdot H(z))$$

besteht[18]). Um (9) zu beweisen, genügt es, die Richtigkeit für die Basiselemente nachzuprüfen. Für diese ergibt sich in der Tat aus (3) und (6) unter Berücksichtigung von (8), (8'), (8'')

$$(10) \quad \begin{array}{llll} (\alpha_h \cdot H(a_i)) = & s_{ih} = (\varphi(\alpha_h) \cdot a_i), & (\alpha_h \cdot H(b_i)) = & u_{ih} = (\varphi(\alpha_h) \cdot b_i), \\ (\beta_h \cdot H(a_i)) = -r_{ih} = (\varphi(\beta_h) \cdot a_i), & & (\beta_h \cdot H(b_i)) = -t_{ih} = (\varphi(\beta_h) \cdot b_i). \end{array}$$

Setzt man umgekehrt eine lineare Substitution φ mit willkürlichen Koeffizienten an und verlangt die Gültigkeit von (9), so müssen die Gleichungen (10) gelten, und dies bedeutet, daß die Koeffizienten von φ gerade die durch (6) gegebenen sein müssen.

Infolge dieser Charakterisierung von φ kann man dem Satz V auch die folgende Fassung geben, die den Vorteil hat, daß in ihr keine speziellen Basen von $\mathfrak{B}_p$ und $\mathfrak{B}_q$ auftreten:

Satz V'. *Ist H der durch eine Abbildung f der F_p auf die F_q bewirkte Homomorphismus von $\mathfrak{B}_p$ in $\mathfrak{B}_q$, so ist H mit dem Homomorphismus φ von $\mathfrak{B}_q$ in $\mathfrak{B}_p$, der durch* (9) *bestimmt ist, durch die Gleichung* (7) *verknüpft, wobei c der Grad von f ist.*

Setzt man in (9) $\zeta = \zeta_1$, $z = \varphi(\zeta_2)$, so erhält man auf Grund von (7) die für beliebige Elemente ζ_1, ζ_2 von $\mathfrak{B}_q$ gültige Gleichung

$$(11) \qquad (\varphi(\zeta_1) \cdot \varphi(\zeta_2)) = c(\zeta_1 \cdot \zeta_2).$$

Ist

$$(12) \qquad z_1 = \varphi(\zeta_1), \quad z_2 = \varphi(\zeta_2),$$

---

[17]) Außer auf die in A. zitierten Arbeiten, in denen die Schnitt-Theorie für beliebige Mannigfaltigkeiten dargestellt ist, sei hier hingewiesen auf: H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, 2. Auflage, Anhang.

[18]) Im wesentlichen mit A., Gl. (4) identisch.

so ergibt sich, wenn man (11) mit c multipliziert und wieder (7) anwendet,

$$c(z_1 \cdot z_2) = (H(z_1) \cdot H(z_2)). \tag{13}$$

Die Elemente, die (12) erfüllen, d. h. alle Elemente $\varphi(\zeta)$ mit beliebigem $\zeta < \mathfrak{B}_q$, bilden eine Untergruppe von $\mathfrak{B}_p$, die wir sinngemäß mit $\varphi(\mathfrak{B}_q)$ bezeichnen. Auf Grund von (13) ist das Verhalten der Schnittzahlen der Elemente von $\varphi(\mathfrak{B}_q)$ bei der Abbildung vollständig zu übersehen:

Satz VII. *Die Schnittzahlen je zweier Elemente der Gruppe $\varphi(\mathfrak{B}_q)$ multiplizieren sich bei der Abbildung gemäß* (13) *mit dem Grade c.*

Wenn $c \neq 0$ ist, so folgt aus (7), daß für zwei durch (12) gegebene Elemente z_1, z_2 nur dann $H(z_1) = H(z_2)$ sein kann, wenn $\zeta_1 = \zeta_2$, also $z_1 = z_2$ ist; also gilt:

Satz VIII. *Ist $c \neq 0$, so wird die Gruppe $\varphi(\mathfrak{B}_q)$ durch H einstufig isomorph auf eine Untergruppe von $\mathfrak{B}_q$ abgebildet; diese Untergruppe besteht nach* (7) *aus den c-fachen Elementen von $\mathfrak{B}_q$*[19]).

Es sei $\mathfrak{B}'_p$ die Untergruppe von $\mathfrak{B}_p$, die aus denjenigen Elementen besteht, deren H-Bilder c-fache Elemente von $\mathfrak{B}_q$ sind; d. h. es sei dann und nur dann $z < \mathfrak{B}'_p$, wenn es ein ζ gibt, so daß $c\zeta = H(z)$ ist. Infolge von (7) ist $\varphi(\mathfrak{B}_q) < \mathfrak{B}'_p$. Ferner sei $\mathfrak{N}$ die Untergruppe von $\mathfrak{B}_p$, die aus den Elementen z besteht, für die $H(z) = 0$ ist. Dann gilt:

Satz IX. *Ist $c \neq 0$, so ist $\mathfrak{B}'_p$ die direkte Summe der Gruppen $\mathfrak{N}$ und $\varphi(\mathfrak{B}_q)$*[20]).

Beweis: Ist $z < \mathfrak{B}'_p$, so gibt es ein ζ mit $c\zeta = H(z)$; dann ist wegen (7) $H(z) = H(\varphi(\zeta))$, also $H(z - \varphi(\zeta)) = 0$, d. h. $z = \varphi(\zeta) + z_0$ mit $z_0 < \mathfrak{N}$. Diese Summendarstellung ist eindeutig; denn aus $\varphi(\zeta') + z'_0 = \varphi(\zeta'') + z''_0$ mit $z'_0, z''_0 < \mathfrak{N}$ folgt $H(\varphi(\zeta') - \varphi(\zeta'')) = 0$, mithin nach (7) $c\,\zeta' = c\,\zeta''$. Da $c \neq 0$ ist, folgt hieraus $\zeta' = \zeta''$ und daher auch $z'_0 = z''_0$. z läßt sich also auf eine und nur eine Weise in der Form $z = \varphi(\zeta) + z_0$ ($z_0 < \mathfrak{N}$) darstellen. Das bedeutet, daß $\mathfrak{B}'_p$ die direkte Summe von $\mathfrak{N}$ und $\varphi(\mathfrak{B}_q)$ ist.

Die Sätze VII, VIII, IX gestatten im Fall $c \neq 0$, die Wirkung von H auf die Elemente von $\mathfrak{B}_p$ und auf ihre Schnittzahlen weitgehend zu übersehen. Denn da das c-fache jedes Elements von $\mathfrak{B}_p$ in $\mathfrak{B}'_p$ enthalten ist, genügt es im wesentlichen, diese Gruppe zu betrachten. Sie wird gemäß IX in einer durch H eindeutig bestimmten Weise in zwei direkte Summanden $\mathfrak{N}$ und $\varphi(\mathfrak{B}_q)$ zerlegt. Die Wirkung von H auf $\mathfrak{N}$ ist nach Definition von $\mathfrak{N}$ vollständig bekannt; die Wirkung von H auf $\varphi(\mathfrak{B}_q)$ wird durch die Sätze VII und VIII beschrieben.

Die Sätze V bis IX habe ich früher für beliebige n-dimensionale Mannigfaltigkeiten aus einem Satz[20]) abgeleitet, der mit ganz anderen Methoden als den hier verwendeten, nämlich unter Benutzung des $2n$-dimensionalen Produktes der beiden Mannigfaltigkeiten bewiesen wurde. Diesem Satz liegt der Begriff des „Ringes" einer Mannigfaltigkeit zugrunde, bezüglich dessen Definition auf die frühere Arbeit verwiesen sei; in unserem Fall $n = 2$ sind die einzigen nicht trivialen Eigenschaften des Ringes die Schnittzahlen von geschlossenen Wegen, wie wir sie eben betrachtet haben. Auch wegen des Wortlautes des erwähnten Satzes sei auf die frühere Arbeit verwiesen. Sein Beweis ist auf Grund unserer gegenwärtigen Sätze ganz leicht zu führen. Man hat nur den für die geschlossenen Wege von F_q schon definierten Homomorphismus φ durch die Festsetzungen

$$\varphi(\zeta^0) = c\,z^0, \qquad \varphi(F_q) = F_p,$$

worin ζ^0, z^0 Punkte auf F_q bzw. F_p bedeuten, auch für die 0- und die 2-dimensionalen Zyklen zu erklären. Dann sind die Behauptungen des Satzes, soweit sie nicht trivial sind, mit unseren Gleichungen (7), (9), (11) identisch.

---

[19]) A., Satz II.

[20]) A., Satz I.

§ 5. Der Index der Abbildung.

Während sich die Sätze der beiden letzten Paragraphen aus der Betrachtung des kommutierten Systems (3), also der Beziehungen zwischen den Homologieklassengruppen $\mathfrak{B}_p$ und $\mathfrak{B}_q$ ergaben, sei jetzt noch auf Tatsachen hingewiesen, die aus Eigenschaften des ursprünglichen Homomorphismus der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}_p$ in die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}_q$ beruhen. Die Beweise, die an anderer Stelle geliefert worden sind, können von dort unverändert übernommen werden[21]).

Die durch H vermittelten Bilder der Elemente von $\mathfrak{G}_p$ bilden eine Untergruppe von $\mathfrak{G}_q$, die bis auf innere Automorphismen von $\mathfrak{G}_q$ durch die (Abbildungs- oder Homomorphismen-) Klasse bestimmt ist. Ihr Index j, d. h. die Anzahl der Restklassen, in die $\mathfrak{G}_q$ nach dieser Untergruppe zerfällt, ist eine Klasseninvariante. Zwischen j und dem Grade c besteht der folgende Zusammenhang, der, da c nach Satz III aus den Formeln (1) zu bestimmen ist, eine notwendige Bedingung für die rechten Seiten A_i, B_i von (1) ausdrückt:

Ist der Grad $c \neq 0$, so ist der Index j endlich und ein Teiler von c.

Aus diesem Satz, — den man geometrisch durch Betrachtung gewisser Überlagerungsflächen von F_q beweist —, folgt bei dem Übergang zu dem System (3):

Das Produkt der Elementarteiler der Matrix von (3) *ist ein Teiler von c*; und zwar ergibt sich dieser Satz aus dem erstgenannten auf Grund des folgenden:

Ist j endlich — ist also etwa $c \neq 0$ —, so hat die Matrix von (3) *den Rang $2q$, und das Produkt ihrer Elementarteiler ist ein Teiler von j.*

---

[21]) A., § 6, sowie die dort angeführten Teile der oben unter [1]) zitierten Arbeit.

Berlin, März 1931.

Eingegangen am 16. März 1931.

Über rationale Polynome mit einer Minimumseigenschaft.

Von *Otto Blumenthal* in Aachen.

Im Anschluß an einen Vortrag, den ich im vorigen Jahre auf dem Allrussischen Mathematiker-Kongress in Charkow gehalten habe, bin ich auf ältere Untersuchungen über eine gewisse Minimumseigenschaft rationaler Polynome zurückgekommen[1]).

Es handelt sich um folgende Fragestellung: Wenn ein Polynom n-ten Grades

$$M(x) = \mu_0 + \mu_1 x + \cdots + \mu_n x^n \tag{I}$$

in einem Kreise vom Radius r um den Nullpunkt mindestens m ($\leqq n$) Nullstellen hat, dann ist der Ausdruck

$$s_m = \frac{|\mu_m|^2 + \cdots + |\mu_n|^2}{|\mu_0|^2 + \cdots + |\mu_{m-1}|^2} \tag{II}$$

sicher von Null verschieden. *Gesucht werden diejenigen Polynome, welche den Ausdruck zu einem Minimum machen.*

Hierüber ist bekannt (Math. Ann. 85): Ein Minimumpolynom hat genau m Nullstellen in dem Kreise, die alle auf dem Rande gelegen sind. Durch diese Nullstellen lassen sich die Koeffizienten des Polynomes ausdrücken. Setzt man nämlich

$$\mathsf{M}_k = \begin{cases} -\dfrac{\mu_k}{|\mu_0|^2 + \cdots + |\mu_{m-1}|^2} & k = 0, \ldots, m-1 \\ \dfrac{\mu_k}{|\mu_m|^2 + \cdots + |\mu_n|^2} & k = m, \ldots, n \end{cases} \tag{III, 1}$$

und bezeichnet mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ die m Nullstellen vom Betrage r und konjugiert-komplexe Größen durch Überstreichen, so ist

$$\mathsf{M}_k = A_1 \bar{\alpha}_1^k + \cdots + A_m \bar{\alpha}_m^k . \tag{III, 2}$$

Die Darstellung folgt aus der Tatsache, daß die M_k einer linearen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten genügen[2]). Bei ihrer Formulierung ist vorausgesetzt, daß die Wurzeln α_i untereinander verschieden sind. Bei zusammenfallenden Wurzeln treten die aus der Lehre von den linearen Differenzengleichungen bekannten Modifikationen ein. Ist beispielsweise $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, so lautet die Formel

$$\mathsf{M}_k = A_1 \bar{\alpha}^k + A_2 k \bar{\alpha}^k + A_3 \bar{\alpha}_3^k + \cdots + A_m \bar{\alpha}_m^k . \tag{III, 3}$$

Die Konstanten $A_1, \ldots, A_m$ sind bestimmt durch die Bedingungen

$$M(\alpha_1) = 0, \ldots, \quad M(\alpha_m) = 0 \tag{IV}$$

oder die bei zusammenfallenden Wurzeln an ihre Stelle tretenden.

Durch die Kenntnis seiner Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ ist also das Minimumpolynom festgelegt. *Wo aber liegen diese*? Diese Frage hat sich mir als schwierig erwiesen, und ich hatte

---

[1]) Math. Ann. **85** (1922), S. 160—171.

[2]) Math. Ann. **85**, Formel (6).

darüber keine allgemeinen Ergebnisse erzielen können. Ich habe deshalb jetzt den einfachsten Sonderfall zweier Wurzeln ($m = 2$) herausgegriffen und bin hier zu klaren Tatsachen gekommen. Das Resultat ist, soweit meine Beweise durchgeführt sind:

Für das Minimumpolynom fallen die beiden Wurzeln zusammen.

Ich vermute, daß dieser Satz auch bei mehr Wurzeln ($m > 2$) besteht. Aber ich habe darüber noch keine Rechnungen angestellt.

§ 1. Zusammenstellung der Formeln für $m = 2$.

Wir schreiben s statt s_m.

Durch eine Drehung der x-Ebene kann immer bewirkt werden, daß eine der beiden Wurzeln positiv reell ist. Wir setzen demnach

$$\alpha_1 = r, \qquad \alpha_2 = \alpha = r\varepsilon = re^{i\varphi}$$

und können dabei $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ voraussetzen, weil dem konjugiert-komplexen α das konjugiert-komplexe Polynom mit gleichem s entspricht.

1. $\alpha \neq r$, d. h. $\varphi > 0$. Die Formeln (III, 2) lauten

$$(1,\ 1) \qquad \mathsf{M}_k = A_1 r^k + A_2 \bar{\alpha}^k = r^k (A_1 + A_2 \bar{\varepsilon}^k),$$

die Gleichungen (IV) ergeben [3])

$$-\mathsf{M}_0 - \mathsf{M}_1 r + s(\mathsf{M}_2 r^2 + \cdots + \mathsf{M}_n r^n) = 0,$$
$$-\mathsf{M}_0 - \mathsf{M}_1 \alpha + s(\mathsf{M}_2 \alpha^2 + \cdots + \mathsf{M}_n \alpha^n) = 0,$$

oder mit den Werten (1, 1)

$$(2,\ 1) \qquad \begin{aligned} (-1 - r^2 + sF)\, A_1 + (-1 - \bar{\alpha} r + s\bar{\Phi})\, A_2 &= 0, \\ (-1 - \alpha r + s\Phi)\, A_1 + (-1 - r^2 + sF)\, A_2 &= 0, \end{aligned}$$

$$(2,\ 11) \quad F = r^4 + r^6 + \cdots + r^{2n}, \qquad \Phi = \alpha^2 r^2 + \alpha^3 r^3 + \cdots + \alpha^n r^n.$$

2. $\alpha = r$. Dann ist

$$(1,\ 2) \qquad \mathsf{M}_k = A_1 r^k + A_2 k r^k = r^k (A_1 + k A_2).$$

Die Gleichungen (IV) werden $M(r) = 0$, $M'(r) = 0$ und lauten

$$-\mathsf{M}_0 - \mathsf{M}_1 r + s(\mathsf{M}_2 r^2 + \cdots + \mathsf{M}_n r^n) = 0,$$
$$-\mathsf{M}_1 + s(2\mathsf{M}_2 r + \cdots + n\mathsf{M}_n r^{n-1}) = 0,$$

oder mit den Werten (1, 2)

$$(2,\ 2) \qquad \begin{aligned} (-1 - r^2 + sF)\, A_1 + (-r^2 + sF_1)\, A_2 &= 0, \\ (-r^2 + sF_1) A_1 + (-r^2 + sF_2)\, A_2 &= 0, \end{aligned}$$

$$(2,\ 21) \quad F_1 = 2r^4 + 3r^6 + \cdots + nr^{2n}, \qquad F_2 = 2^2 r^4 + 3^2 r^6 + \cdots + n^2 r^{2n}.$$

§ 2. Polynome mit reellen Koeffizienten.

Die Realität der Koeffizienten von M zieht die Realität von α nach sich, und damit ergibt sich aus (1, 1), daß auch A_1 und A_2 reell sein müssen.

Wir haben also nur die beiden Möglichkeiten $\alpha = -r$ und $\alpha = +r$, und haben zu zeigen, daß die erste nicht das Minimumpolynom liefert.

Wir entwickeln zuerst den Fall $\alpha = -r$. Die Gleichung für s wird erhalten, indem man A_1, A_2 aus (2, 1) eliminiert. Die Gleichung ist vom 2. Grade und hat zwei positive Wurzeln [4]), deren kleinste der gesuchte Minimalwert ist.

Weil für $r = 1$ die Rechnung etwas anders und einfacher ist als für $r \neq 1$, behandeln wir $r = 1$ im folgenden gesondert.

---

[3]) Math. Ann. 85, Formel (8).

[4]) Math. Ann. 85, S. 166.

Hilfssatz: *Die Koeffizienten von A_1, A_2 in den Gleichungen* (2, 1) *können nicht gleichzeitig verschwinden. Sie sind deshalb, nach* (2, 1), *beide von Null verschieden.*

a) $r = 1$. Dann ist

$$F = n - 1, \qquad \Phi = \bar{\Phi} = \begin{cases} 0 & \text{für ungerade } n \\ 1 & \text{für gerade } n. \end{cases}$$

Das Verschwinden der beiden Koeffizienten ist bei *geraden* n augenscheinlich *unmöglich*, weil $-1 - \alpha r = 0$, dagegen s und Φ von Null verschieden sind. Bei ungeraden n ergibt sich $s = s_0 = \dfrac{2}{n-1}$. Es wird nachher gezeigt werden, daß dies nicht der Minimalwert sein kann.

b) $r \neq 1$. Dann ist

$$F = r^4 \frac{1 - r^{2(n-1)}}{1 - r^2}, \qquad \Phi = \bar{\Phi} = r^4 \frac{1 - (-r^2)^{n-1}}{1 + r^2}.$$

Nun müßte sein

$$(3) \qquad \frac{1}{s} = \frac{F}{1 + r^2} = \frac{\Phi}{1 - r^2}, \quad \text{d. h.} \quad 1 - r^{2(n-1)} = 1 - (-r^2)^{n-1}.$$

Die Gleichung ist *unmöglich bei geraden* n, identisch erfüllt bei ungeraden n. Im letzteren Falle ergibt sich

$$(3, 1) \qquad s = s_0 = \frac{1}{r^4} \frac{1 - r^4}{1 - r^{2(n-1)}}.$$

Es wird wieder nachher gezeigt, daß dieser Wert nicht Minimalwert sein kann.

Da die Koeffizienten von A_1 und A_2 in (2, 1) nicht verschwinden, folgt durch Multiplikation der Gleichungen:

$$(4) \qquad A_1^2 = A_2^2.$$

Da A_1 und A_2 reell sind, sind nur die beiden Möglichkeiten $A_1 = A_2$ und $A_1 = -A_2$, die einzeln untersucht werden.

1. $A_1 = A_2$. Die beiden Gleichungen (2, 1) reduzieren sich auf die eine

$$(-1 - r^2 + sF) + (-1 + r^2 + s\Phi) = 0,$$

woraus

$$s = \frac{2}{F + \Phi} = \frac{2}{r^4} \frac{1 - r^4}{(1 - r^{2(n-1)})(1 + r^2) + (1 - (-r^2)^{n-1})(1 - r^2)};$$

das ist aber für gerade n

$$(5, 1) \qquad s = s_1 = \frac{1}{r^4} \frac{1 - r^4}{1 - r^{2n}}, \qquad \text{für } r = 1: \quad s = \frac{2}{n};$$

für ungerade n

$$s = s_0 = \frac{1}{r^4} \frac{1 - r^4}{1 - r^{2(n-1)}}.$$

(Dieser Wert kommt aber nicht in Betracht, weil für dieses s die Koeffizienten von (2, 1) einzeln verschwinden.)

2. $A_1 = -A_2$. Die Gleichungen (2, 1) reduzieren sich auf

$$(-1 - r^2 + sF) - (-1 + r^2 + s\Phi) = 0,$$

woraus

$$s = \frac{2r^2}{F - \Phi} = \frac{2}{r^2} \frac{1 - r^4}{(1 - r^{2(n-1)})(1 + r^2) - (1 - (-r^2)^{n-1})(1 - r^2)};$$

das ist aber für gerade n

$$(5,2)\qquad s = s_2 = \frac{1}{r^4}\,\frac{1-r^4}{1-r^{2(n-2)}}, \qquad \text{für } r=1: s = \frac{2}{n-2};$$

für ungerade n

$$s = s_0 = \frac{1}{r^4}\,\frac{1-r^4}{1-r^{2(n-1)}},$$

der gleiche Wert wie unter 1.

Von den Werten s_0, s_1, s_2 ist für alle r stets s_1 der kleinste. *Wir werden jetzt diejenige Gleichung in s aufstellen, die sich bei der Annahme $\alpha = +r$ ergibt, und zeigen, daß s_1 größer als deren kleinste Wurzel ist.* Damit ist dann gezeigt: *Unter den reellen Polynomen ist dasjenige mit zusammenfallenden Wurzeln Minimumpolynom.*

Zur Aufstellung der Gleichung in s für $\alpha = r$ brauchen wir außer der Formel für F noch die Summationsformeln:

$$F_1 = r^4\,\frac{2-r^2-(n+1)\,r^{2(n-1)}+n\,r^{2n}}{(1-r^2)^2}, \qquad \text{für} \quad r=1: \quad F_1 = \frac{(n-1)\,(n+2)}{2},$$

$$F_2 = r^4\,\frac{4-3\,r^2+r^4-(n+1)^2\,r^{2(n-1)}+(2\,n^2+2\,n-1)\,r^{2n}-n^2\,r^{2(n+1)}}{(1-r^2)^3},$$

$$\text{für} \quad r=1: \quad F_2 = \frac{n(2\,n+1)\,(n+1)}{6}-1 = \frac{(n-1)\,(2\,n^2+5\,n+6)}{6}.$$

Die Gleichung für s ist hiermit $\Delta(s;r)=0$, wo

$$\Delta(s;r) = \begin{vmatrix} -1-r^2+s\,r^4\,\dfrac{1-r^{2(n-1)}}{1-r^2} & -r^2+s\,r^4\,\dfrac{2-r^2-(n+1)\,r^{2(n-1)}+n\,r^{2n}}{(1-r^2)^2} \\ -r^2+s\,r^4\,\dfrac{2-r^2-(n+1)\,r^{2(n-1)}+n\,r^{2n}}{(1-r^2)^2} & -r^2+s\,r^4\,\dfrac{4-3\,r^2+r^4-(n+1)^2\,r^{2(n-1)}+(2n^2+2n-1)\,r^{2n}-n^2\,r^{2(n+1)}}{(1-r^2)^3} \end{vmatrix}.$$

Insbesondere

$$(6{,}1)\quad \Delta(s;1) = \begin{vmatrix} -2+(n-1)\,s & -1+\dfrac{(n-1)\,(n+2)}{2}\,s \\ -1+\dfrac{(n-1)\,(n+2)}{2}\,s & -1+\left(\dfrac{(n+1)\,(2\,n+1)\,n}{6}-1\right)s \end{vmatrix}.$$

Für alle r ist $\Delta(0;r) = r^2\,(1-r^2+r^2) = r^2 > 0$. *Daher ist von einem Wert s_1 gezeigt, daß er größer als die kleinste Wurzel von $\Delta(s;r)=0$ ist, wenn $\Delta(s_1;r)<0$.*

Dies soll jetzt von dem Werte (5, 1) gezeigt werden.

Der Fall $r=1$ wird vorweggenommen. Hier ist $s_1 = \dfrac{2}{n}$. Damit wird

$$\Delta\left(\frac{2}{n};1\right) = \begin{vmatrix} -\dfrac{2}{n} & n-\dfrac{2}{n} \\ n-\dfrac{2}{n} & \dfrac{2\,n^2}{3}+n-\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{n} \end{vmatrix} = -\left(n^2+\frac{4\,n}{3}-2-\frac{4}{3\,n}\right) < 0 \quad (n \geqq 2).$$

Für $r \neq 1$ kommt aus (6) und (5, 1), indem wir $\Delta(s_1;r) = D(r)$ setzen, nach einfacher Zwischenrechnung

$$(1-r^{2n})^2\,(1-r^2)^2\,D(r) =$$

$$\begin{vmatrix} 2-(n+1)\,r^{2(n-1)}-r^{2n}+(n+1)\,r^{2(n+1)}-r^{2(n+2)} & 4-(n+1)^2\,r^{2(n-1)}+(n^2-2)\,r^{2n}+(n^2+2n)\,r^{2(n+1)}-(n^2+2)\,r^{2(n+2)}+r^{2(n+3)} \\ 2-(n+1)\,r^{2(n-1)}-r^{2n}+(n+1)\,r^{2(n+1)}-r^{2(n+2)} & 4-(n+1)^2\,r^{2(n-1)}+(n^2-2)\,r^{2n}+(n^2+2n)\,r^{2(n+1)}-(n^2+2)\,r^{2(n+2)}+r^{2(n+3)} \end{vmatrix},$$

oder ausgerechnet

$$(1-r^{2n})^2\,(1-r^2)^2\,D(r) =$$

$$(7)\qquad -\{4-4n\,r^{2(n-1)}-4\,r^{2n}+4n\,r^{2(n+1)}-4\,r^{2(n+2)}+(n^2+2n)\,r^{2(2n-1)}-2n^2\,r^{2(2n+1)} + 4\,r^{2(2n+2)}+(n^2-2n)\,r^{2(2n+3)}\}.$$

Die Tatsache, daß die Klammer { } für $r = 1$ von 4. Ordnung verschwinden muß, liefert eine empfindliche Probe auf die Richtigkeit der Koeffizienten.

Durch geeignete Zusammenfassung der Glieder läßt sich aus der Klammer der Faktor $(1 - r^2)^3$ wieder herausziehen.

Es ist nämlich zunächst

$$\begin{aligned}\{\ \} &= 4(1 - r^{2n} - r^{2(n+2)} + r^{2(2n+2)}) - 2n\, r^{2(n-1)}\,(2 - 2r^4 - r^{2n} + r^{2(n+4)}) \\ &\qquad + n^2 r^{2(2n-1)}\,(1 - 2r^4 + r^8) \\ &= 4(1 - r^{2n})\,(1 - r^{2(n+2)}) - 2n\, r^{2(n-1)}\,(1 - r^4)\,((1 - r^{2n}) + (1 - r^{2(n+2)})) \\ &\qquad + n^2 r^{2(2n-1)}\,(1 - r^4)^2.\end{aligned}$$

Mit der Bezeichnung

$$(8,\ 1) \qquad s_n = 1 + r^2 + \cdots + r^{2(n-1)}$$

wird also

$$\{\ \} = (1 - r^2)^2\,[4 s_n s_{n+2} - 2n\, r^{2(n-1)}\,(1 + r^2)\,(s_n + s_{n+2}) + n^2 r^{2(2n-1)}\,(1 + r^2)^2].$$

Weiter läßt sich zerlegen

$$\begin{aligned}[\ ] &= \big(4 s_n s_{n+2} - 2n\, r^{2(n-1)}\,(1 + r^2)\,(s_n + s_{n+2}) + n^2 r^{4(n-1)}\,(1 + r^2)^2\big) \\ &\qquad - (1 - r^2)\, n^2 r^{4(n-1)}\,(1 + r^2)^2 \\ &= \big(2 s_n - n\, r^{2(n-1)}\,(1 + r^2)\big)\big(2 s_{n+2} - n\, r^{2(n-1)}\,(1 + r^2)\big) - (1 - r^2)\, n^2 r^{4(n-1)}\,(1 + r^2)^2.\end{aligned}$$

Der Faktor $2 s_n - n r^{2(n-1)}\,(1 + r^2)$ ist abermals durch $1 - r^2$ teilbar, und zwar ist

$$(8,\ 2) \quad s_n = (1 - r^2)\, s_n' + n\, r^{2(n-1)}, \quad s_n' = 1 + 2r^2 + 3r^{2\cdot 2} + \cdots + (n - 1)\, r^{2(n-2)},$$

daher

$$2 s_n - n r^{2(n-1)}\,(1 + r^2) = 2\,(1 - r^2)\, s_n' + n r^{2(n-1)}\,(1 - r^2) = (1 - r^2)\,(2 s_n' + n r^{2(n-1)}).$$

Setzen wir dies in [ ] und weiter in { } und (7) ein, so folgt im ganzen:

$$(9) \qquad \begin{aligned} &D(r)\, s_n\,(1 - r^{2n}) = \\ &-\{(2 s_n' + n r^{2(n-1)})\,(2 s_{n+2} - n r^{2(n-1)}\,(1 + r^2)) - n^2 r^{4(n-1)}\,(1 + r^2)^2\}.\end{aligned}$$

Die { } auf der rechten Seite hat, für $n \geqq 2$, bei $r = 0$ den Wert 4 und verschwindet bei $r = 1$. Wir entwickeln sie jetzt nach Potenzen von r^2 und *zeigen, daß die Reihe ihrer Koeffizienten nur einen Vorzeichenwechsel hat.* Daher hat die rechte Seite außer $r = 1$ keine weitere positive Nullstelle, und daher ist $D(r)$ ständig negativ, w. z. b. w.

Die Berechnung der Koeffizienten ist einfach. Wird die Klammer $= \sum_0^{2n} a_i r^{2i}$ gesetzt, so ist

für $0 \leqq i \leqq n - 2$

$$\begin{aligned} a_i &= 4(1 + 2 + \cdots + (i + 1)) = 2\,(i + 2)\,(i + 1) \\ a_{n-1} &= 4(1 + 2 + \cdots + (n - 1)) = 2\,n\,(n - 1) \qquad = a_{n-2} \\ a_n &= \qquad\qquad\qquad\qquad = 2\,n\,(n - 1) - 4\,n \end{aligned}$$

für $1 \leqq j \leqq n + 3$

$$\begin{aligned} a_{n+j} &= 4(j + \cdots + (n - 1)) - 4\,(j + 1)\,n \\ &= 2(n + j - 1)\,(n - j) - 4\,(j + 1)\,n \\ a_{2n-2} &= -12 + 8n - 4n^2 = a_{2n-3} - 12\,(n - 1) \\ a_{2n-1} &= -\ 4 + 6n - 3n^2 \\ a_{2n} &= \ \ 2n - n^2. \end{aligned}$$

Die Zusammenstellung zeigt, daß die Koeffizienten bis zum Index $n - 1$ positiv sind und zunehmen, dann bis zum Index $2n - 2$ abnehmen, während die beiden letzten Koeffizienten für $n \geqq 2$ nicht positiv sind. Dies beweist die Behauptung des einmaligen Zeichenwechsels.

§ 3. Polynome mit komplexen Koeffizienten im Einheitskreis.

Durch Elimination von A_1, A_2 aus den Gleichungen (2, 1) ergibt sich die in s quadratische Gleichung

$$(10)\quad [F^2 - \Phi\bar{\Phi}]\, s^2 - [2\,(1+r^2)\,F - \{(\Phi+\bar{\Phi}) + r^2\,(\bar{\varepsilon}\Phi + \varepsilon\bar{\Phi})\}\, s + [(1+r^2)^2 - (1 + 2\cos\varphi\, r^2 + r^4)] = 0,$$

oder ausgerechnet

a) für $r \neq 1$:

$$(10\,a)\quad r^6\left[\left(\frac{1-r^{2(n-1)}}{1-r^2}\right)^2 - \frac{1 - 2\cos(n-1)\varphi\, r^{2(n-1)} + r^{4(n-1)}}{1 - 2\cos\varphi\, r^2 + r^4}\right] s^2$$
$$- 2\,r^2\left[(1+r^2)\,\frac{1-r^{2(n-1)}}{1-r^2} - \frac{\cos 2\varphi - r^4 - \cos(n+1)\varphi\, r^{2(n-1)} + \cos(n-1)\varphi\, r^{2(n+1)}}{1 - 2\cos\varphi\, r^2 + r^4}\right] s$$
$$+ 2\,[1 - \cos\varphi] = 0;$$

b) für $r = 1$:

$$(10\,b)\quad \left[(n-1)^2 - \frac{1-\cos(n-1)\varphi}{1-\cos\varphi}\right] s^2$$
$$- 2\left[2(n-1) + \frac{(1-\cos 2\varphi) - (\cos(n-1)\varphi - \cos(n+1)\varphi)}{2\,(1-\cos\varphi)}\right] s$$
$$+ 2\,(1-\cos\varphi) = 0.$$

Die Form (10) zeigt, daß alle Klammern [ ] positiv sind, in Übereinstimmung mit dem oben ausgesprochenen allgemeinen Sachverhalt, daß die Gleichung zwei positive Wurzeln hat.

Wir benutzen im folgenden den Hilfssatz: *Hat die Gleichung*

$$a - b\,x + c\,x^2 = 0$$

positive Koeffizienten a, b, c und reelle Wurzeln, so sind diese größer als $x_0 = \frac{a}{b}$.

Denn für $x < x_0$ ist $a - bx$ positiv, daher erst recht die linke Seite der Gleichung.

Betrachten wir jetzt zuerst den Fall $r = 1$, d. h. das *Minimumpolynom, das im Einheitskreis 2 Nullstellen hat.*

Nach dem Hilfssatz liefern die Polynome, deren zweite Nullstelle bei $\alpha = e^{i\varphi}$ liegt, Werte s, die größer sind als

$$(11)\quad s_1 = \frac{1-\cos\varphi}{2(n-1) + \dfrac{(1-\cos 2\varphi) - (\cos(n-1)\varphi - \cos(n+1)\varphi)}{2\,(1-\cos\varphi)}} = \frac{1-\cos\varphi}{2(n-1) + (1+\cos\varphi)\left(1 - \dfrac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}\right)}.$$

Mit Benutzung der für alle φ und alle positiven ganzen n gültigen Ungleichung

$$\left|\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}\right| < n$$ [5])

folgt hieraus für alle φ

$$(12)\quad s_1 > \frac{1-\cos\varphi}{4n} = \frac{\sigma}{n},$$

indem

[5]) Siehe z. B. Blumenthal, Fonctions entières d'ordre infini (Paris, Ganthier-Villars, 1911), S. 133—134.

(12, 1) $$\frac{1-\cos\varphi}{4}=\sigma$$

gesetzt wird. Wir setzen diesen Wert in $\Delta(s;1)$ (Gl. (6, 1)) ein und fragen, für welche Werte von σ der Ausdruck $\Delta(s_1;1)<0$ wird. Diese Werte φ liefern sicher nicht das Minimum von s.

Es ist

$$\Delta\left(\frac{\sigma}{n};1\right)=\begin{vmatrix} -2+\left(1-\frac{1}{n}\right)\sigma & -1+\left(n+1-\frac{2}{n}\right)\frac{\sigma}{2} \\ -1+\left(n+1-\frac{2}{n}\right)\frac{\sigma}{2} & -1+\left(\frac{2n^2+3n+1}{6}-\frac{1}{n}\right)\sigma \end{vmatrix}$$

$$=1-\left[\frac{2n^2}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n}\right]\sigma+\left[\frac{n^2}{12}-\frac{n}{3}+\frac{5}{12}-\frac{1}{6n}\right]\sigma^2.$$

Um im folgenden die Rechnung abzukürzen, setzen wir n so groß voraus, daß höhere Potenzen von $\frac{1}{n}$ vernachlässigt werden sollen. Die kleinste Wurzel der Gleichung $\Delta\left(\frac{\sigma}{n};1\right)=0$ ist dann $\sigma=\frac{3}{2n^2}$, und hieraus ergibt sich nach (12, 1) mit der gleichen Genauigkeit

(13) $$\varphi=\frac{\sqrt{12}}{n}.$$

Bei genügend großem n müssen Werte φ, die das Minimum von s liefern, $<\frac{\sqrt{12}}{n}$ sein.

Für diese Werte φ aber läßt sich die Gleichung (10 b) in der Weise diskutieren, daß wir für die eingehenden cos-Funktionen die Reihenentwicklungen einsetzen. Die Koeffizienten dieser Reihen entwickeln wir gleichzeitig nach fallenden Potenzen von n. Wenn ϑ, ϑ_1 positive Größen <1 bezeichnen, α, β, γ Größen, die mit wachsendem n unterhalb einer endlichen Grenze bleiben, so ergibt sich für $0<\varphi\leqq\frac{\sqrt{12}}{n}$:

$$\frac{1-\cos(n-1)\varphi}{1-\cos\varphi}=(n-1)^2-\frac{1}{12}(n-1)^2n(n-2)\varphi^2+\frac{n^6}{360}\left(\vartheta+\frac{\alpha}{n}\right)\varphi^4$$

und

$$\frac{(n-1)^2-\frac{1-\cos(n-1)\varphi}{1-\cos\varphi}}{2(1-\cos\varphi)}=\frac{1}{12}(n-1)^2n(n-2)-\frac{n^6}{360}\left(\vartheta+\frac{\alpha'}{n}\right)\varphi^2.$$

Ferner:

$$\cos(n-1)\varphi-\cos(n+1)\varphi=2\sin\varphi\sin n\varphi=2\sin\varphi\left[n\varphi-\frac{n^3\varphi^3}{6}+\frac{n^5\varphi^5}{120}-\frac{\vartheta_1 n^7\varphi^7}{56\cdot120}\right]$$

$$=2\left[n\varphi^2-\left(\frac{n^3}{6}+\frac{n}{6}\right)\varphi^4+\frac{n^5}{120}\left(1+\frac{\beta}{n^2}\right)\varphi^6-\frac{n^7}{56\cdot120}\left(\vartheta_1+\frac{\gamma}{n^2}\right)\varphi^8\right],$$

daher

$$\frac{(1-\cos2\varphi)-(\cos(n-1)\varphi-\cos(n+1)\varphi)}{2(1-\cos\varphi)}$$

$$=-2(n-1)+\left(\frac{n^3}{3}+\frac{n}{6}-\frac{1}{2}\right)\varphi^2-\frac{n^5}{60}\left(1+\frac{\beta'}{n^2}\right)\varphi^4+\frac{n^7}{56\cdot60}\left(\vartheta_1+\frac{\gamma'}{n^2}\right)\varphi^6$$

und

$$\frac{2(n-1)+\dfrac{(1-\cos 2\varphi)-(\cos(n-1)\varphi-\cos(n+1)\varphi)}{2(1-\cos\varphi)}}{2(1-\cos\varphi)}$$
$$=\left(\frac{n^3}{3}+\frac{n}{6}-\frac{1}{2}\right)-\frac{n^5}{60}\left(1+\frac{\beta''}{n}\right)\varphi^2+\frac{n^7}{56\,.\,60}\left(\vartheta_1+\frac{\gamma''}{n^2}\right)\varphi^4.$$

Damit wird aus (10 b), wenn noch $\frac{n^3}{3}+\frac{n}{6}-\frac{1}{2}=(n-1)\left[\frac{n^2}{3}+\frac{n}{3}+\frac{1}{2}\right]$ eingesetzt wird,

$$As^2-2Bs+1=0, \tag{14}$$

wo

$$A=\frac{1}{12}(n-1)^2n(n-2)-\frac{n^6}{360}\left(\vartheta+\frac{\alpha'}{n}\right)\varphi^2,$$
$$B=(n-1)\left(\frac{n^2}{3}+\frac{n}{3}+\frac{1}{2}\right)-\frac{n^5}{60}\left(1+\frac{\beta''}{n^2}\right)\varphi^2+\frac{n^7}{56\,.\,60}\left(\vartheta_1+\frac{\gamma''}{n^2}\right)\varphi^4. \tag{14, 1}$$

Andererseits sei mit s_m die Wurzel der Gleichung $\Delta(s;1)=0$ bezeichnet. Ausrechnung der Determinante ergibt

$$\frac{1}{12}(n-1)^2n(n-2)s_m^2-2(n-1)\left(\frac{n^2}{3}+\frac{n}{3}+\frac{1}{2}\right)s_m+1=0. \tag{15}$$

Zum Schluß setzen wir in (14)

$$s=s_m+t \tag{16}$$

und erhalten wegen (15)

$$At^2-2(B-As_m)t+s_m\varphi^2\left[\frac{n^5}{30}\left(1+\frac{\beta''}{n^2}\right)-\frac{n^7}{56\,.\,30}\left(\vartheta_1+\frac{\gamma''}{n^2}\right)\varphi^2-\frac{n^6}{360}\left(\vartheta+\frac{\alpha'}{n}\right)s_m\right]=0. \tag{17}$$

Wir zeigen, daß die Gleichung keine negativen Wurzeln hat. Dazu bemerken wir, daß, wie gelegentlich der Gleichung (13) schon bewiesen,

$$s_m=\frac{3}{2n^3}$$

ist. Nun ist A nach Definition positiv (was sich übrigens auch rechnerisch sofort ergibt), außerdem wegen $\varphi\leqq\frac{\sqrt{12}}{n}$ von nicht höherer Ordnung als n^4, daher As_m von der Ordnung n. Für B dagegen gilt folgende Abschätzung der Größenordnung:

$$B>\frac{n^3}{3}-\frac{n^5}{60}\varphi^2>n^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\quad\text{für}\quad\varphi\leqq\frac{\sqrt{12}}{n}.$$

Daher ist $B-As_m$ für genügend große n sicher positiv. Schließlich ist auch die Klammer [ ] positiv, denn der letzte Term ist nur von der Ordnung n^3, dagegen die Differenz der beiden ersten

$$>\frac{n^5}{30}-\frac{n^7}{56\,.\,30}\varphi^2>\frac{n^5}{30}\left(1-\frac{3}{14}\right)\quad\text{für}\quad\varphi\leqq\frac{\sqrt{12}}{n}.$$

Somit ist auch für $\varphi\leqq\frac{\sqrt{12}}{n}$ immer $s>s_m$, d. h.: s_m, *der Wert bei zusammenfallenden Wurzeln, ist das absolute Minimum der Größe* s, w. z. b. w.

§ 4. Polynome mit komplexen Koeffizienten für kleine und große r.

Wenden wir den Hilfssatz von S. 242 auf die Gleichung (10 a) an, so folgt bei genügend kleinem r, daß die kleinste Wurzel von (10 a) größer ist als

$$s_0 = \frac{1}{r^2}\,\frac{1-\cos\varphi}{1-\cos 2\varphi} = \frac{1}{r^2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Andererseits lautet die Gleichung $\Delta(s;r) = 0$ für kleine r in erster Näherung $(n > 2)$

$$1 - 4r^2 s + r^8 s^2 = 0.$$

Es muß also jedenfalls $\frac{1}{r^2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}$ kleiner als die kleinste Wurzel dieser Gleichung sein,

daher $4r^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$ größer als die größere Wurzel der Gleichung $u^2 - 4r^2 u + r^8 = 0$, d. h.

$$\cos^2\frac{\varphi}{2} > 1 - \frac{r^4}{16}, \qquad \varphi < \frac{r^2}{2}. \tag{18}$$

Also können Minimumwerte von s nur bei sehr kleinen Winkeln φ liegen. Daß auch dies nicht möglich ist, zeigt man wieder durch Reihenentwicklung der Gleichung (10 a), wobei $n\,r$ als klein vorauszusetzen ist.

Ganz entsprechend verläuft die Rechnung für große r.

Die kleinste Wurzel von (10 a) ist größer als

$$s_\infty = \frac{1}{r^{2n}}\,\frac{1-\cos\varphi}{1-\cos(n-1)\varphi} = \frac{1}{r^{2n}}\,\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\sin^2(n-1)\frac{\varphi}{2}}.$$

Die Gleichung $\Delta(s;r) = 0$ lautet für große r in erster Näherung $(n > 2)$

$$1 - (n-1)^2 r^{2n} s + r^{4(n-1)} s^2 = 0.$$

s_∞ muß kleiner als die kleinste Wurzel dieser Gleichung sein, oder $r^{2n}\,\frac{\sin^2(n-1)\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$ größer als die größte Wurzel der Gleichung $u^2 - (n-1)^2 r^{2n} u + r^{4(n-1)} = 0$. Dies gibt

$$\frac{\sin^2(n-1)\frac{\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} > (n-1)^2\left(1 - \frac{1}{(n-1)^4}\,r^{-4}\right),$$

$$\frac{\sin(n-1)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} > (n-1)\left(1 - \frac{1}{2(n-1)^4}\,r^{-4}\right). \tag{19, 1}$$

Diese Ungleichung kann nur für sehr kleine Werte von φ erfüllt sein. Denn für $0 < \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2}$ gilt bekanntlich

$$\sin\frac{\varphi}{2} > \frac{2}{\pi}\,\frac{\varphi}{2}.$$

Ist daher $(n-1)\frac{\varphi}{2} \geqq \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, so ist

$$\left|\frac{\sin(n-1)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right| < \frac{1}{\frac{2}{\pi}\frac{\varphi}{2}} < \frac{n-1}{1+\frac{2\varepsilon}{\pi}},$$

also kann, nach (19, 1), ε einen sehr kleinen Betrag nicht überschreiten.

Innerhalb des Spielraumes $0 < \frac{\varphi}{2} < \frac{1}{n-1}\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)$ aber nimmt, wie der Differentialquotient zeigt, die Funktion $\frac{\sin(n-1)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$ monoton ab. Nun ergibt Reihenentwicklung

$$\frac{\sin(n-1)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} = (n-1)\left[1-\frac{n(n-2)}{6}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2+\cdots\right],$$

und daher liefert (19, 1)

$$\varphi < \frac{\sqrt{12}}{(n-1)^2\sqrt{n(n-2)}}\, r^{-2}. \tag{19, 2}$$

Der Rest des Beweises wird wieder durch Reihenentwicklung der Gleichung (10 a) erledigt.

Im vorstehenden ist für reelle Polynome allgemein, für komplexe in drei charakteristischen Sonderfällen bewiesen, daß das Minimumpolynom zwei zusammenfallende Nullstellen hat. Auch der allgemeine Fall läßt sich gewiß mit den hier gebrauchten Methoden behandeln, wenn auch die Rechnungen im einzelnen vielleicht mühsam werden. Mir kam es nicht auf Vollständigkeit an, sondern nur darauf, einen ersten Weg durch die algebraischen Schwierigkeiten der Aufgabe zu finden. Ich hoffe, daß die gewonnenen Einblicke auch für die Behandlung der höheren Fälle ($m > 2$) nützlich sein werden.

Eingegangen 4. April 1931.

Neue Bemerkungen zum Dirichletschen Prinzip.

Von *R. Courant* in Göttingen.

Seit dem entscheidenden Vorstoß von Hilbert ist die Methode des Dirichletschen Prinzips durch die Bemühungen vieler Autoren zu einem Beweisverfahren ausgestaltet worden, das hinsichtlich Einfachheit und Kürze andern Methoden überlegen erscheint[1]). Trotzdem weisen die bisher vorliegenden Darstellungen gewisse prinzipielle Mängel auf, sei es, daß die Lösung des Variationsproblems für spezielle Bereiche (Kreise) vorausgesetzt wird, sei es, daß im Verlauf der Betrachtung der beim Ansatz gesteckte Zielpunkt, nämlich die Lösung des Minimumproblems, aus dem Auge verloren wird. Es hat daher wohl ein gewisses Interesse, wenn ich im folgenden mit Hilfe einiger neuer — auch über den speziellen Gegenstand hinausreichender — Gedanken dem Beweisverfahren des Dirichletschen Prinzipes eine Wendung gebe, welche ohne spezielle Voraussetzungen direkt das gestellte Variationsproblem in sehr einfacher Weise löst.

Ich entwickle die Methode an dem Beispiel des Existenzbeweises für analytische Funktionen auf einer gegebenen beliebigen Riemannschen Fläche G, und zwar derjenigen Funktionen, welche der Strömung mit einer auf G vorgegebenen Doppelquelle entsprechen. Ist G schlichtartig, d. h. trennt jede geschlossene Kurve in G diesen Bereich in verschiedene Teile, so liefert die gewonnene Funktion die konforme Abbildung von G auf eine schlichte Ebene, begrenzt von endlich bzw. unendlich vielen zueinander parallelen geradlinigen Strecken. Insbesondere gewinnt man so auf die einfachste Art mit den Sätzen über konforme Abbildung einfach oder mehrfach zusammenhängender Bereiche die Beweise für die Uniformisierungstheoreme der Funktionentheorie.

Nach einigen elementaren Hilfsbetrachtungen in A wird unter B der Existenzbeweis für die Lösung des Variationsproblemes geführt. In einem Anhang C, welcher den schon bekannten Darstellungen[2]) gegenüber nichts prinzipiell Neues, wohl aber einige Vereinfachungen enthält, wird kurz gezeigt, wie man aus dem Resultat die Abbildungseigenschaft der gewonnenen Funktion, d. h. das oben genannte umfassende Schlitzabbildungstheorem, erhält.

A. Hilfssätze.

Wir werden bei unserer Betrachtung zwei elementare Hilfssätze gebrauchen.

I. Kennzeichnung der Potentialfunktionen durch ihre Mittelwerteigenschaft.

Eine in einem abgeschlossenen Bereiche der x, y-Ebene stetige Ortsfunktion u, deren Wert in jedem Punkt P gleich ihrem Mittelwert auf jedem um P konzentrischen

[1]) Vgl. z. B. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, Leipzig, 1913, S. 78—108 und Hurwitz-Courant, Funktionentheorie, Berlin, 1929, Kap. 8, wo sich weitere Literaturangaben finden.

[2]) Vgl. A. Hurwitz-Courant, loc. cit., sowie Koebe, Über die Hilbertsche Uniformisierungsmethode, Gött. Nachr. 1910.

mit seinem Innern noch ganz zum Bereich gehörigen Kreis ist, d. h. der Funktionalgleichung

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x + \varrho \cos \vartheta, y + \varrho \sin \vartheta)\, d\vartheta$$

bei beliebig gewähltem hinreichend kleinem ϱ genügt, ist eine Potentialfunktion.

Wenn wir wissen, daß u stetige Ableitungen bis zur dritten Ordnung besitzt, dann folgt das Bestehen der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ aus unserer obigen Funktionalgleichung, indem wir rechts unter dem Integral nach Potenzen von ϱ entwickeln, hinter den Gliedern zweiter Ordnung abbrechen, sodann durch ϱ^2 dividieren und ϱ gegen 0 streben lassen. Wir brauchen also zum Beweise unseres Hilfssatzes lediglich aus der obigen Mittelwertgleichung auf die Differenzierbarkeitseigenshaft von u zu schließen. Hierzu setzen wir die Mittelwerteigenschaft in die Form

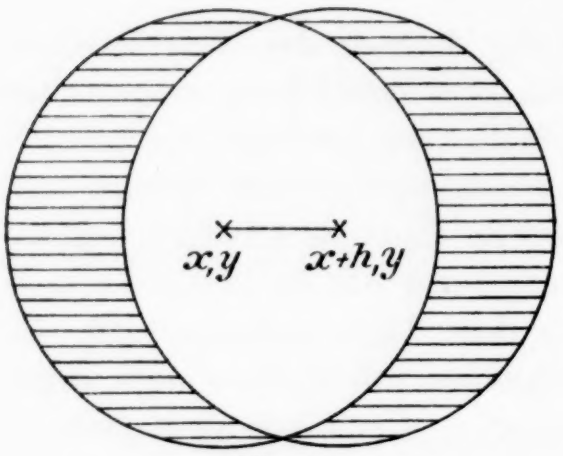

Fig. 1.

$$u(x, y) = \frac{1}{\varrho^2 \pi} \iint_{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \leqq \varrho^2} u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

und folgern

$$\varrho^2 \pi \frac{u(x + h, y) - u(x, y)}{h} = \frac{1}{h} \iint u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\,,$$

wobei das Intregal rechts über das in der Figur 1 schraffierte aus zwei Kreissicheln bestehende Gebiet erstreckt wird. Die einfachsten Mittelwertsätze der Integralrechnung lehren uns wegen der (gleichmäßigen) Stetigkeit von u, daß für $h \to 0$ das Integral rechts gegen das Kurvenintegral

$$\int u(\xi, \eta)\, d\eta$$

strebt, welches in positivem Sinne über die Peripherie P_ϱ des Kreises K_ϱ vom Radius ϱ um den Punkt (x, y) erstreckt wird. Es existiert also auch der Limes der linken Seite für $h \to 0$, d. h. die Ableitung u_x. Zudem erkennt man sofort, daß u_x wieder stetig ist. Aus der Greenschen Formel ergibt sich

$$\varrho^2 \pi\, u_x = \int_{P_\varrho} u\, d\eta = \iint_{K_\varrho} u_\xi d\xi\, d\eta;$$

also hat auch u_x dieselbe Mittelwerteigenschaft wie u; es existiert mithin auch die zweite Ableitung u_{xx} usw.

II. Pflasterung eines Bereichs mit Kreisscheiben.

Ist G ein abgeschlossener, stückweise glatt begrenzter Bereich der Ebene, so läßt er sich mit endlich vielen einander nirgends überdeckenden Kreisscheiben so belegen, daß der Flächeninhalt der unbedeckt bleibenden Teile von G kleiner als eine vorgeschriebene Schranke ε bleibt.

Es genügt offenbar, den Beweis für die Überdeckung eines Quadrates vom Inhalt 1 zu führen. Der dem Quadrat einbeschriebene Kreis läßt einen Rest r_1 unbedeckt, dessen Flächeninhalt weniger als $^1/_4$ des Quadratflächeninhalts ausmacht. Wir bedecken nun das Restgebiet mit endlich vielen Quadraten, so daß aus diesem Restgebiet ein Flächenstück kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ von diesen neuen Quadraten unbedeckt bleibt und schreiben in jedes dieser Quadrate wiederum den Kreis ein. So gelangen wir zu einer Kreis-

bedeckung, die einen unbedeckten Rest mit einem Flächeninhalt r_2 läßt, der sicher nicht größer als $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{r_1}{4}$ ist. Indem wir so fortfahren, gelangen wir nach n Schritten zu einer Kreisüberdeckung mit einem Rest vom Flächeninhalt r_n, der sich aus r_{n-1} durch die Rekursionsformel

$$r_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{r_{n-1}}{4}$$

abschätzen läßt, so daß

$$r_n < \frac{1}{4^n} + \frac{\varepsilon}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) < \frac{1}{4^n} + \frac{2}{3}\varepsilon$$

wird; bei hinreichend großem n wird also $r_n < \varepsilon$, und somit ist unser Satz bewiesen.

Zusatz. Man darf bei einer solchen Kreispflasterung die Radien der verwendeten Kreise von vornherein durch eine beliebig klein gewählte Schranke nach oben beschränken.

Bemerkung über die Integraldefinition. Man kann die in unserem Hilfssatz gekennzeichneten Kreispflasterungen folgendermaßen benutzen, um das Integral

$$I = \iint_G f(x, y)\, dx\, dy$$

einer im Bereiche G stetigen Funktion $f(x, y)$ darzustellen. Zu einem gegebenen ε wählen wir eine Kreispflasterung mit Kreisen, deren Radien $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_N$ sämtlich kleiner als ϱ sind. Mit $f_1, f_2, \ldots, f_N$ bezeichnen wir die Werte der Funktion f jeweils in den Mittelpunkten dieser Kreise. Dann strebt die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{N} \pi \varrho_\nu^2 f_\nu = I_N$$

für $N \to \infty$ gegen unser Integral I, wenn ε und zugleich mit ε auch ϱ gegen Null strebt.

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Definition und den elementaren Eigenschaften des Gebietsintegrales.

B. Stellung und Lösung des Minimumproblems.

1. *Bezeichnungen.* Wir betrachten ein über der x,y-Ebene ausgebreitetes Gebiet G (Riemannsche Fläche), und zwar denken wir uns G definiert durch eine Folge von Gebieten G_n, deren jedes nur endlich vielblättrig ist und von stückweise glatten Kurven begrenzt wird; G_n soll dabei G_{n-1} ganz im Innern enthalten. G ist definiert als die Gesamtheit aller Punkte, welche in einem der Gebiete G_n liegen. Verzweigungspunkte von G_n sowie von G wollen wir als Randpunkte des Gebiets betrachten. In G möge ein Punkt O mit den Koordinaten $x = 0$, $y = 0$ liegen.

Sind χ und ψ stetige Ortsfunktionen in $\mathfrak{G}$ mit stückweise stetigen ersten Ableitungen, so sind die Integrale

$$D[\chi] = \iint_G (\chi_x^2 + \chi_y^2)\, dx\, dy$$

$$D[\chi, \psi] = \iint_G (\chi_x \psi_x + \chi_y \psi_y)\, dx\, dy$$

in der üblichen Weise als uneigentliche Integrale zu verstehen. Gegenüber konformer Abbildung des Gebietes G sind die betrachteten Integrale invariant.

Um O möge ein Kreis K vom Radius a mit der Peripherie $\varkappa$ geschlagen sein, der ganz zu G gehört. Die Funktion

$$S(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x}{a^2} = \frac{1}{r}\cos\vartheta + \frac{r}{a^2}\cos\vartheta$$

— r und ϑ bedeuten Polarkoordinaten um O —, welche in K außer dem Punkte O regulär ist und der Potentialgleichung $\Delta S = 0$, sowie auf dem Rande $\varkappa$ der Bedingung

$$\frac{\partial S}{\partial \nu} = \frac{\partial S}{\partial r} = 0$$

$\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right.$ bedeutet Differentiation nach der äußeren Normalen$\Big)$ genügt, stellt das Potential einer Strömung mit Doppelquelle in O in der durch $\varkappa$ begrenzten Kreisscheibe dar. Wir denken uns S außerhalb K in G als identisch Null fortgesetzt, so daß also S auf $\varkappa$ sprunghaft unstetig wird.

2. *Problemstellung.* Unser Ziel ist, ein entsprechendes Strömungspotential u für das gesamte Gebiet G mit einer Doppelquelle in O durch Aufstellung eines Minimumproblems zu gewinnen. Wegen der Singularität in O kann $D[u]$ ebensowenig wie $D[S]$ existieren, dagegen wird es gelingen, die Funktion u als Lösung des folgenden Minimumproblems zu charakterisieren: Wir betrachten alle in G, vom Punkte O abgesehen, stetigen und stückweise mit stetigen Ableitungen erster Ordnung versehenen Funktionen φ, für welche

$$\Phi = \varphi - S$$

im Punkte O stetig ist, und suchen unter diesen Funktionen eine solche $\Phi = U$, für welche

$$D[\Phi]$$

einen möglichst kleinen Wert d besitzt.

Wir werden zeigen, daß dieses Minimumproblem tatsächlich eine Lösung U hat, daß die Funktion $u = U + S$ eine in G außer im Punkte O reguläre Potentialfunktion mit der Singularität $\frac{x}{x^2+y^2}$ in O ist; und wir werden aus der Minimumeigenschaft von U unter der Voraussetzung eines schlichtartigen Bereiches G leicht die wesentlichen Abbildungseigenschaften der analytischen Funktion $f(x+iy) = u + iv$ folgern.

3. *Minimalfolgen.* Zunächst erkennen wir, daß das Problem sinnvoll ist, d. h. daß es überhaupt zulässige Funktionen Φ mit endlichem $D[\Phi]$ gibt: z. B. die Funktion $\Phi = 0$ außerhalb K und $\Phi = \frac{2r}{a^2}\cos\vartheta = \frac{2x}{a^2}$ innerhalb K. Es gibt also wegen des definiten Charakters von D eine nicht negative untere Grenze d von $D[\varphi]$ und eine Minimalfolge $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n, \ldots$ zulässiger Funktionen, für welche

$$\lim_{n\to\infty} D[\Phi_n] = d$$

gilt. In bekannter Weise zeigt man für eine solche Minimalfolge das Bestehen der Relation

$$\lim_{n\to\infty} [\Phi_n, \zeta_n] = 0 \tag{1}$$

wobei unter ζ_n eine beliebige Folge von in G stetigen und mit stückweise stetigen ersten Ableitungen versehenen Funktionen verstanden ist, für welche $D[\zeta_n]$ unterhalb einer von n unabhängigen Schranke M bleibt. Diese Relation folgt sofort aus der Tatsache, daß bei beliebigem ε die untere Grenze von $D[\Phi_n + \varepsilon\zeta_n] = D[\Phi_n] + 2\varepsilon D[\Phi_n, \zeta_n] + \varepsilon^2 D[\zeta_n]$ nicht größer als d sein kann.

Neben diese Relation stellen wir für $\varphi_n = \Phi_n + S$ die äquivalente Relation

$$\lim_{n\to\infty} D[\varphi_n, \eta_n] = 0, \tag{2}$$

die gilt, sobald η_n eine Folge von Funktionen bedeutet, welche denselben Bedingungen wie die ζ_n unterworfen sind und überdies in einer Umgebung des Punktes O identisch verschwinden. Der Beweis folgt nach (1) unmittelbar aus der Tatsache, daß infolge

der Greenschen Formel das über K erstreckte Integral $D[S, \eta_n]$ wegen $\frac{\partial S}{\partial \nu} = 0$ auf $\varkappa$ für jede dieser Funktionen η_n verschwindet. Aus der Relation (1) folgt weiter in bekannter Weise wegen

$$D[\Phi_n - \Phi_m] = D[\Phi_n, \Phi_n - \Phi_m] - D[\Phi_m, \Phi_n - \Phi_m]$$

die Relation

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} D[\Phi_n - \Phi_m] = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} D[\varphi_n - \varphi_m] = 0. \tag{3}$$

4. Jedem Punkte A von G ordnen wir einen Kreis K_A mit einem passenden Radius α zu, welcher noch ganz zu G gehört. Liegt A innerhalb des Kreises K, so wählen wir den Radius α so, daß der Kreis noch innerhalb K fällt. Betrachten wir einen solchen Kreis K_A um den Punkt A mit dem Radius α, welcher den Punkt O außerhalb läßt, so folgt vermöge der Schwarzschen Ungleichung sofort aus (3)

$$\left| \frac{1}{\pi\alpha^2} \iint_{K_A} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \right) dx\, dy \right|^2 \leqq \frac{1}{\pi\alpha^2} D[\varphi_n - \varphi_m].$$

Es existiert also der Limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi\alpha^2} \iint_{K_A} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}\, dx\, dy = p(x, y; \alpha),$$

wo x, y die Koordinaten des Punktes A in G bedeuten. Ebenso existiert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi\alpha^2} \iint_{K_A} \frac{\partial \varphi_n}{\partial y}\, dx\, dy = q(x, y; \alpha).$$

Für die Punkte in K existiert ebenso

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi\alpha^2} \iint_{K_A} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x}\, dx\, dy = P(x, y; \alpha)$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi\alpha^2} \iint_{K_A} \frac{\partial \Phi_n}{\partial y}\, dx\, dy = Q(x, y; \alpha),$$

und es gilt, wie aus der Mittelwerteigenschaft der Potentialfunktion S ohne weiteres folgt,

$$p = P + S_x, \quad q = Q + S_y$$

für alle Punkte A in K, deren zugehöriger Kreis K_A noch ganz in K liegt und den Punkt O außen läßt.

Wir erkennen im übrigen, daß unsere Konvergenzbeziehungen gleichmäßig gelten, solange α nach unten beschränkt bleibt.

Wir zeigen nun, daß die gewonnenen Größen p, q, P, Q unabhängig von dem jeweils dem Punkte A zugeordneten Radius α sind, daß sie also Funktionen lediglich des Ortes A im Gebiete G darstellen. Unsere Behauptung folgt aus den Relationen (1) bzw. (2), wenn wir für ζ bzw. η spezielle Variationen wählen. Wir betrachten etwa einen Punkt A außerhalb K und schlagen um ihn zwei Kreise K_α und K_β mit den Radien α und $\beta > \alpha$ und den Peripherien $\varkappa_\alpha$ und $\varkappa_\beta$ derart, daß beide Kreisscheiben noch ganz zu G gehören und außerhalb K liegen; bezeichnen mit r und ϑ Polarkoordinaten um A und setzen aus den Potentialfunktionen $\frac{1}{r}\cos\vartheta$ und $r\cos\vartheta$ eine außerhalb K_β verschwindende und innerhalb K_α reguläre Variation η stückweise linear zusammen. Nämlich

$$\eta = 0 \qquad \text{außerhalb } \varkappa_\beta$$
$$\eta = \frac{1}{r}\cos\vartheta - \frac{r}{\beta^2}\cos\vartheta \qquad \text{für } \alpha \leqq r \leqq \beta$$
$$\eta = \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) r\cos\vartheta \qquad \text{für } r \leqq \alpha.$$

Mit dieser Variation ergibt sich nach kurzer Rechnung auf Grund der Greenschen Formel aus (2) die Relation

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\int_{\varkappa_\alpha}\varphi_n\cos\vartheta\,d\vartheta - \frac{1}{\beta}\int_{\varkappa_\beta}\varphi_n\cos\vartheta\,d\vartheta\right) = 0$$

oder in anderer Form geschrieben

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\pi\alpha^2}\iint_{\varkappa_\alpha}\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}\,dx\,dy - \frac{1}{\pi\beta^2}\iint_{\varkappa_\beta}\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}\,dx\,dy\right) = 0,$$

welche die Unabhängigkeit unseres Grenzwertes $p(x, y; \alpha)$ von α ausdrückt. In ähnlicher Weise wird der Beweis für q, P, Q geführt.

Wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz sind p und q in G, abgesehen vom Punkte O, stetige Funktionen; P und Q stetige Funktionen, abgesehen von der Kreisperipherie $\varkappa$.

5. Wir wollen nun nachweisen, daß es eine überall in G, außer im Punkte O, stetig differenzierbare Funktion

$$u = U + S$$

gibt, so daß

$$u_x = p, \qquad u_y = q$$
$$U_x = P = u_x - S_x, \quad U_y = Q = u_y - S_y$$

wird, wobei U in der Umgebung von O stetig bleibt. Zu diesem Zwecke brauchen wir nur zu zeigen, daß die Kurvenintegralrelation

$$I = \int_C (p\,dx + q\,dy) = 0$$

für jede geschlossene stückweise glatte Kurve C in G besteht, welche nicht durch O geht. Um die Punkte von C schlagen wir Kreise mit einem festen Radius α, den wir so klein wählen, daß O auch außerhalb jedes dieser Kreise liegt. Mit ϱ und ϑ bezeichnen wir Polarkoordinaten um den Punkt A von C; mit ξ, η die Koordinaten von A, dann ist

$$\pi\alpha^2 I = \pi\alpha^2\int_C (p\,d\xi + q\,d\eta) = \int_C\left(d\xi\lim_{n\to\infty}\iint_{\varrho\leqq\alpha}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}\,\varrho\,d\varrho\,d\vartheta + d\eta\lim_{n\to\infty}\iint_{\varrho\leqq\alpha}\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}\,\varrho\,d\varrho\,d\vartheta\right).$$

Wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz dürfen die Integrationen vertauscht werden, d. h. wir dürfen zunächst bei festem ϱ und ϑ das Kurvenintegral $I_n(\varrho, \vartheta) = \int\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}d\xi + \frac{\partial\varphi_n}{\partial y}d\eta\right)$ nehmen und danach die Integration über ϱ und ϑ ausführen. Nun ist wegen

$$x = \xi + \varrho\cos\vartheta, \quad y = \eta + \varrho\sin\vartheta$$

bei festem ϱ und ϑ gewiß $dx = d\xi$ und $dy = d\eta$. Also wird unser Kurvenintegral $I_n(\varrho, \vartheta)$ gleich dem Kurvenintegral $\int_{C'}\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi_n}{\partial y}dy\right)$, erstreckt über diejenige geschlossene Kurve C', welche aus C durch Parallelverschiebung in Richtung ϑ um den Betrag ϱ hervorgeht. Dieses zweite Kurvenintegral verschwindet aber, und damit ist unsere Behauptung über I und somit die Existenz einer — zulässigen — Funktion u bzw. $U = u - S$ mit

$$u_x = p, \quad u_y = q, \quad u_x = P, \quad U_y = Q$$

bewiesen.

6. Wir zeigen, daß U unser Variationsproblem löst, d. h. daß

$$D[U] = d$$

gilt. Da sicherlich nicht $D[U] < d$ sein kann, brauchen wir nur die Gültigkeit der Relation $D[U] \leqq d$ nachzuweisen.

Wir bedienen uns hierzu des Pflastersatzes aus der Vorbemerkung unter A. Wir betrachten nämlich einen abgeschlossenen, stückweise glatt begrenzten Teilbereich B von G und überdecken ihn gemäß unserem Pflastersatz durch N Kreise $K_1, \ldots, K_N$ mit den Mittelpunkten $A_1, \ldots, A_N$ unter Auslassung eines Flächeninhaltes höchstens von der Größe ε. Die Radien der Kreise nennen wir $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und nehmen der Einfachheit halber an, daß keiner dieser Kreise die Kreisperipherie $\varkappa$ durchschneidet; mit P_ν, Q_ν bezeichnen wir die Werte von P, Q im Kreismittelpunkt A_ν. Aus $\pi\alpha_\nu^2 P_\nu = \lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{\varkappa_\nu} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x}\, dx\, dy$ folgt vermöge der Schwarzschen Ungleichung

$$\pi\, \alpha_\nu^2\, P_\nu^2 \leqq \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\varkappa_\nu} \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial x}\right)^2 dx\, dy$$

usw., also

$$\pi \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_\nu^2 (P_\nu^2 + Q_\nu^2) \leqq \lim_{n\to\infty} \iint\limits_B \left[\left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy \leqq d$$

Nach unserer Einleitungsbemerkung über die Integraldefinition folgt, daß bei hinreichend feiner Pflasterung des Bereiches B durch Kreise die linke Seite unserer letzten Ungleichung sich beliebig wenig von dem Integral $\iint\limits_B (P^2 + Q^2)\, dx\, dy$ unterscheidet. Es folgt also

$$\iint\limits_B (P^2 + Q^2)\, dx\, dy = \iint\limits_B (U_x^2 + U_y^2)\, dx\, dy \leqq d\,.$$

Identifizieren wir nun B mit G_n und lassen n über alle Grenzen wachsen, so wird dabei die linke Seite unserer Ungleichung gegen $D[U]$ streben, und wir erhalten

$$D[U] \leqq d,$$

womit U als Lösung unseres Minimumproblems erkannt ist.

7. Es bleibt zu zeigen, daß $u = U + S$ eine überall in G außer in O reguläre Potentialfunktion ist. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Minimumseigenschaft von U bzw. u vermöge der Variationsgleichung (2), aus welcher

$$D[u, \eta] = 0$$

folgt für jede in einer Umgebung von 0 verschwindende Funktion η mit endlichem $D[\eta]$. Schlagen wir um einen Punkt A aus G zwei konzentrische Kreise mit den Radien $r = \alpha$, $r = \beta > \alpha$ und den Peripherien $\varkappa_\alpha$ und $\varkappa_\beta$, so definieren wir

$$\eta = 0 \qquad \text{für} \quad r > \beta$$

$$\eta = \log \frac{r}{\beta} \qquad \text{für} \quad \alpha \leqq r \leqq \beta$$

$$\eta = \log \frac{\alpha}{\beta} \qquad \text{für} \quad 0 \leqq r \leqq \alpha\,.$$

Es ergibt sich dann sofort mit Hilfe der Greenschen Formel

$$\frac{1}{\alpha} \int\limits_{\varkappa_\alpha} u\, d\vartheta = \frac{1}{\beta} \int\limits_{\varkappa_\beta} u\, d\vartheta$$

und durch Grenzübergang $\alpha \to 0$ die Beziehung

$$u(A) = \frac{1}{2\pi\beta}\int_{\varkappa_\beta} u\, d\vartheta .$$

Die Funktion u besitzt also unsere Mittelwerteigenschaft. Somit ist u nach dem Hilfssatz I eine überall in G, außer in dem Punkte O, reguläre Potentialfunktion.

Diese Funktion ist bis auf eine willkürliche additive Konstante charakterisiert durch ihre Singularität und die Tatsache, daß für eine beliebige in einer Umgebung von O verschwindende Funktion η mit endlichem $D[\eta]$ die Relation

$$D[u, \eta] = 0$$

besteht. In der Tat schließt man leicht für die Differenz zweier solcher Funktionen u und u' die Beziehung.

$$D[u - u'] = 0 .$$

C. Abbildungseigenschaft der zugehörigen analytischen Funktionen.

Der Vollständigkeit halber soll noch kurz gezeigt werden, wie man aus der Lösung unseres Minimumproblems im Falle eines schlichtartigen Gebietes G das allgemeine in der Einleitung genannte Abbildungstheorem gewinnt. Wir werden dabei außer von der Minimumeigenschaft der Funktion u lediglich von folgenden Tatsachen aus der elementaren Funktionentheorie Gebrauch machen: Ist $f(z) = u + iv$ eine analytische Funktion von $z = x + iy$ mit der polaren Singularität $\frac{1}{x+iy} = \frac{1}{z}$ in O, so bestehen die Kurven $u =$ const. und $v =$ const. aus glatten Kurvenbögen, welche, in einer Richtung verfolgt, entweder durch den Punkt O laufen oder aus jedem der Gebiete G_n austreten („gegen den Rand streben") oder, was wir sogleich im vorliegenden Falle als unmöglich erkennen werden, geschlossen sind. Verzweigungen der Kurven $u =$ const. bzw. $v =$ const. können nur in Kreuzungspunkten der Funktion $f(z)$, d. h. in Punkten mit $f'(z) = 0$ eintreten. Jede Kurve $u =$ const. bzw. $v =$ const. trennt einen Bereich $u >$ const. von einem solchen mit $u <$ const. In der Umgebung eines Poles im Punkte O mit der Singularität z bilden die Kurven $u =$ const. bzw. $v =$ const. zwei Büschel, welche sich bei passend klein gewählter Umgebung beliebig wenig von den bekannten orthogonalen Kreisbüscheln $\frac{x}{x^2+y^2} =$ const. bzw. $\frac{y}{x^2+y^2} =$ const. unterscheiden und bei hinreichend großem Absolutwert der Konstanten geschlossen sind.

1. Wir zeigen nun, daß die zu u konjugierte Potentialfunktion v in G eindeutig ist. Ist nämlich C irgend eine einfache stückweise glatte geschlossene, den Punkt O nicht treffende Kurve in G, so definieren wir eine Variation η, welche in der Umgebung von O verschwindet, auf C den Wert 1 hat und in demjenigen von C begrenzten Teilbereich von G, welcher den Punkt O nicht enthält, konstant gleich 1 bleibt. Mit Hilfe der Greenschen Formel ergibt sich aus dieser Variation sofort die Relation

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial v}\, ds = \int_C \frac{\partial v}{\partial s}\, ds = 0$$

wo $\frac{\partial}{\partial v}$ Differentiation nach der Normalen von C und $\frac{\partial}{\partial s}$ Differentiation nach der Bogenlänge s von C bedeutet. Diese Gleichung aber drückt die Eindeutigkeit von v aus. Es ist also $f(z) = u + iv$ eine in G eindeutige analytische Funktion, welche überall außer im Punkte O regulär ist und dort einen Pol mit der Singularität z besitzt.

2. Bei konstantem c bildet die Gesamtheit der Punkte von G, für welche $u > c$ ist, ein *einziges* Gebiet. Wegen des Verhaltens der Kurven $u = \text{const.} = c$ in der Umgebung des Poles O muß nämlich jedenfalls ein Gebiet $u > c$ an den Punkt O anstoßen und durch einen glatten in der Umgebung von O nahezu kreisbogenförmigen Kurvenbogen begrenzt sein. Gäbe es noch ein zweites vom ersten getrenntes Teilgebiet mit $u > c$, so könnte dieses nicht an O anstoßen. Würden wir nun die Funktion U' in diesem zweiten Gebiet durch die Konstante c ersetzen, sonst unverändert lassen, so würden wir offenbar den Wert $D[U]$ verkleinern, was der Minimumseigenschaft von U — bei hinreichend klein gewähltem Radius a — widerspricht.

Als Folgerung aus der bewiesenen Tatsache und der Schlichtartigkeit von G gewinnen wir das Resultat [1]): Es gibt keine Kreuzungspunkte, d. h. Nullstellen von $f'(z)$. Nehmen wir an, A sei ein solcher Kreuzungspunkt, $u = c$ die durch ihn gehende Potentialkurve, so müßte diese mit ihren Ästen die Umgebung von A in mindestens vier Zipfel zerlegen, in denen abwechselnd $u > c$ und $u < c$ ist. Wir betrachten zwei verschiedene Zipfel mit $u > c$. Nach dem Bewiesenen müssen beide Zipfel mit den Punkten $u > c$ in der Nachbarschaft von O zusammenhängen. Wir können also den Punkt A mit einem in der Nähe von O passend gewählten Punkte aus dem Gebiete $u > c$ durch zwei Kurven verbinden, die, abgesehen vom Punkte A, überall im Gebiete $u > c$ verlaufen und zusammen eine einfach geschlossene Kurve bilden. Das entsprechende kann aber auch mit zwei Zipfeln $u < c$ geschehen. Die beiden so Entstehenden einfach geschlossenen Kurven würden sich im Punkte A und sonst nirgends schneiden, was der Schlichtartigkeit von G widerspricht. Mithin ist bewiesen, daß Kreuzungspunkte nicht vorkommen, daß also alle Kurven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const}$ ohne Verzweigungen glatt in G verlaufen.

Es folgt weiter, daß geschlossene nicht durch O gehende Kurven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ nicht vorkommen können; denn z. B. solche Kurven $v = c$ müßten ein Gebiet $v > c$ von einem Gebiet $v < c$ trennen, was nicht möglich ist, da längs einer solchen Kurve u nicht eindeutig sein könnte.

3. Wir gewinnen nun die Abbildungseigenschaft der Funktion $f(z)$ aus folgender Tatsache: Durch die beliebig nahe Umgebung jedes Punktes A von G geht eine geschlossene (den Punkt O enthaltende) Linie $v = \text{const.} = b$. Der Beweis folgt in einfacher Weise durch Heranziehung der Variationsgleichung (2) mit Hilfe einer speziellen Variation η. Wir denken uns durch den Punkt A die Linie $u = \text{const.} = c$ gezogen und nach beiden Seiten ein Stück weit verfolgt. Durch jeden Punkt dieses Bogens $u = c$ ziehen wir in das Gebiet $u > c$ die Kurve $v = \text{const.} = b$ und behaupten, daß in einer beliebigen Umgebung des Punktes A unter diesen Kurven $v = b$ solche vorhanden sind, welche bis zum Punkte O hinführen und nicht vorher gegen den Rand streben. Andernfalls nämlich gäbe es eine Schar von Kurvenbögen $v = b$ mit $u > c$ durch eine passende kleine Umgebung des Punktes A, derart, daß diese Bögen gegen den Rand streben; sie bilden daher einen Teilbereich G^* von G mit $u > c$ und $b_1 < v < b_2$, der im übrigen innerhalb von G keine Grenzpunkte besitzt und nicht an O heranreicht. Wir wählen die Variation η außerhalb G^* als identisch Null und definieren sie innerhalb G durch

$$\eta = (u - c)\,(v - b_1)\,(v - b_2).$$

Da G^* nicht an O heranreicht, existiert $D[\eta]$, und es ist somit $D[u, \eta] = 0$. Zur Berechnung dieses Integrals beachten wir, daß das Gebiet G durch die Funktion $f(z)$ auf einen Bereich B^* der u, v-Ebene mit endlichem Flächeninhalt abgebildet wird und daß wegen der Invarianz des Integrals $D[u, \eta]$ gegenüber konformer Abbildung

---

[1]) Vgl. Koebe, Über die Hilbertsche Uniformisierungsmethode, Gött. Nachr. 1910.

$$D[u, \eta] = \iint\limits_{B^*} \frac{\partial u}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial u}\, du\, dv = \iint\limits_{B^*} \frac{\partial \eta}{\partial u}\, du\, dv$$

oder

$$0 = D[u, \eta] = \iint\limits_{B^*} (v - b_1)\,(v - b_2)\, du\, dv$$

wird. Der Ausdruck rechts kann aber, da der Integrand überall in B^* positiv ist, nicht Null sein. Also war unsere Annahme falsch, und es existieren in beliebig naher Umgebung

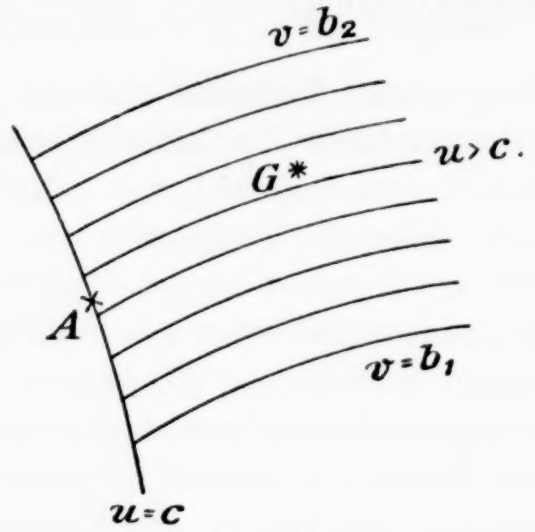

Fig. 2.

von A Kurvenbögen $v = b$, die, nach einer Seite verfolgt, in O einmünden; somit existieren auch ganze solche Streifen aus der Kurvenschar $v = b$. Unter den Kurven eines solchen Streifens gibt es sicherlich aus denselben Gründen wie oben wieder solche, die auch, nach der anderen Seite $u < c$ verfolgt, in O einmünden, und damit ist die Existenz geschlossener Kurven $v = \text{const.}$ durch beliebige Nähe des Punktes A bewiesen.

4. Wir folgern hieraus leicht: Die Funktion $f(z) = u + iv$ bildet den Bereich G auf einen schlichten Bereich B der u, v-Ebene ab. Würden nämlich zwei Punkte A_1 und A_2 von G denselben Bildpunkt über der u, v-Ebene haben, etwa den Punkt $u = 0$, $v = 0$, so würde nach 3. folgen, daß der durch A_1 gehende Kurvenbogen $u = 0$ und der durch A_2 gehende Kurvenbogen $u = 0$ von derselben geschlossenen Kurve $v = b$ (mit beliebig kleinem Wert $|b|$) geschnitten würde. Längs jeder solchen geschlossenen Kurve $v = b$ muß sich aber u monoton ändern, was gegen das Auftreten zweier Schnittpunkte mit $u = 0$ einen Widerspruch darstellt.

5. Es ist also der Bildbereich B ein schlichter den Punkt ∞ als Bildpunkt von O enthaltender Bereich der u, v-Ebene, welcher die Eigenschaft hat, daß in ihm durch die beliebige Umgebung jedes seiner Punkte P eine nach beiden Seiten hin bis zum unendlich fernen Punkte reichende Gerade $v = \text{const.}$ geht. Diese Tatsache aber besagt, daß jede zusammenhängende Menge von Randpunkten des Bereiches B auf einer Geraden $v = \text{const.}$ liegen muß. Es besteht also B aus der vollen u, v-Ebene, begrenzt von endlich vielen oder unendlich vielen jeweils zusammenhängenden Punktmengen, deren jede eine Strecke $v = \text{const.}$ darstellt. Das allgemeine Schlitzabbildungstheorem ist damit bewiesen.

Eingegangen 19. Mai 1931.

Arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Variablen.

I. Abhandlung.

Von *Kurt Hensel* in Marburg a. L.

Die arithmetische Untersuchung der *algebraischen* Funktionen von zwei Variablen x, y, der diese Arbeit gewidmet ist, beruht vollständig auf dem einfacheren Problem der arithmetischen Untersuchung der *rationalen* Funktionen von x und y mit beliebigen reellen oder komplexen Koeffizienten, auf das ich zuerst eingehe.

I.

Die Gesamtheit aller dieser rationalen Funktionen $a, b, c, \ldots$ bildet einen Körper

$$\Re(x, y) = \Re(a, b, c, \ldots),$$

dessen Elemente eindeutig in Primfaktoren zerfallen. Dies sind alle irreduziblen ganzen Funktionen von x und y

$$p(x)\,y = p_\mu(x)\,y^\mu + p_{\mu-1}(x)\,y^{\mu-1} + \cdots + p_0(x), \tag{1}$$

deren Grad in y mit μ bezeichnet werde. Unter ihnen sind speziell enthalten die Primfunktionen $x - \alpha$ vom nullten Grade in y; endlich sind zu ihnen noch die beiden Primfunktionen $\frac{1}{y}$ und $\frac{1}{x}$ hinzuzurechnen. Im folgenden will ich nur die Primfunktionen (1) von positivem Grade in y betrachten. Ganz einfache Überlegungen lehren, daß für die Primfaktoren $x - \alpha$, $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$ wörtlich dieselben Resultate bestehen.

Die arithmetische Untersuchung dieses Zahlkörpers $\Re(x, y)$ kommt *hieraus* auf die Darlegung der Teilbarkeitsbeziehungen, welche zwischen allen ihren Elementen $a(x, y)$, $b(x, y), \ldots$, einerseits und einem beliebigen unter diesen Primelementen (1) oder Primzahlen $p(x, y)$ andererseits bestehen.

Aus der Eindeutigkeit der Zerlegung aller Elemente in diese Primfaktoren folgt unmittelbar, daß für jede von diesen Zahlgrößen oder Zahlen $a(x, y), \ldots$ eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$a = \varepsilon\, p^\alpha$$

besteht, wo der ganzzahlige Exponent α die sog. *Ordnungszahl* von a heißt und ε eine Einheit modulo p, d. h. eine solche rationale Funktion von x und y ist, welche weder in ihrem Zähler noch im Nenner p enthält. Eine Zahl a heißt ganz oder gebrochen modulo p, je nachdem ihre Ordnungszahl α nicht negativ oder negativ ist. Zwei Zahlen a und a' heißen kongruent modulo p^ϱ, wenn ihre Differenz durch p^ϱ teilbar ist.

Die Einheiten $\varepsilon, \varepsilon', \ldots$ bilden eine Gruppe, da das Produkt und der Quotient zweier Einheiten wieder eine Einheit ist; die ganzen Zahlen bilden einen sog. Integritätsbereich, den Integritätsbereich aller modulo p ganzen rationalen Funktionen, da die Addition, Subtraktion und Multiplikation nicht aus diesem Bereiche herausführt, da er das Einheitselement enthält, und da ein Produkt ganzer Zahlen nur Null wird, wenn es einer seiner Faktoren ist. Jede modulo p ganze Funktion kann durch Division mit Rest eindeutig in der Form dargestellt werden

$$a = a_0 + pa' \tag{2}$$

wo $a_0 = e_0(x) + e_1(x)\,y + \cdots + e_{\mu-1}(x)\,y^{\mu-1}$ eine reduzierte ganze Funktion $(\mu-1)$-ten Grades ist, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x allein sind und a' wieder ganz ist.

Der Körper $\Re(x, y)$ ist nicht so groß, daß sich in ihm die Wurzeln einer irreduziblen algebraischen Gleichung $F(z, x, y) = 0$ finden, so daß diese dann auf ihre Teilbarkeitsbeziehungen zu der Primzahl $p(x, y)$ untersucht werden könnten. Um diesem Ziele näher zu kommen, muß man $\Re(x, y)$ zunächst zu einem möglichst kleinen *perfekten* Körper, d. h. zu einem Oberkörper von $\Re(x, y)$ erweitern, dessen geeignet definierte Grenzwerte alle ihm angehören, was beim rationalen Körper $\Re(x, y)$ für keine der in Frage kommenden Grenzwertdefinitionen der Fall ist. Dieser kleinste perfekte Oberkörper von $\Re(x, y)$ ist nun der zugehörige p-adische Körper $\Re(p)$, dessen Elemente ich folgendermaßen definiere:

Es sei α eine positive oder negative ganze Zahl oder Null und

$$a_\alpha, a_{\alpha+1}, a_{\alpha+2}, \ldots$$

irgendeine Reihe von modulo p ganzen Zahlen $a_i(x, y)$, welche beliebig weit angegeben werden können. Dann bezeichne ich das aus diesen Elementen gebildete System $a = a_\alpha\, a_{\alpha+1}\, a_{\alpha+2} \cdots = (a_i)$, welches ich nach den für α vorhandenen Möglichkeiten folgendermaßen schreibe:

$$\begin{aligned}
a &= a_0,\ a_1\ a_2\ a_3 \ldots && \text{für} && \alpha = 0\\
a &= 0,\ \ 0\ \ldots a_\alpha\ \ a_{\alpha+1} \ldots && && \alpha > 0\\
a &= a_\alpha\ a_{\alpha+1} \ldots a_{-1}\, a_0, a_1\, a_2 \ldots && && \alpha < 0
\end{aligned}$$

als eine p-adische Zahl mit den „Ziffern“ $a_\alpha\ a_{\alpha+1} \ldots$. Dabei bemerke ich, daß jede Zahl $a_\alpha\, a_{\alpha+1} \cdots a_\varrho\, 0\, 0 \cdots$, deren Ziffern eine abbrechende Folge bilden, also „fast alle“ Null sind, nur ein anderer Ausdruck sein soll für die rationale Funktion aus $\Re(x, y)$

$$a = a_\alpha\, p^\alpha + a_{\alpha+1}\, p^{\alpha+1} + \cdots + a_\varrho\, p^\varrho.$$

Für eine beliebige p-adische Zahl $a = a_\alpha\, a_{\alpha+1} \ldots$ nenne ich die unendlich vielen rationalen Zahlen

$$\begin{aligned}
a^{(\alpha)} &= a_\alpha\, 0\ 0\ 0\ \cdots = a_\alpha\, p^\alpha\\
a^{(\alpha+1)} &= a_\alpha\, a_{\alpha+1}\, 0\, 0 \cdots = a_\alpha\, p^\alpha + a_{\alpha+1}\, p^{\alpha+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

ihren α-ten, $(\alpha+1)$-ten, $(\alpha+2)$-ten, ... Näherungswert. Zu jeder p-adischen Zahl a gehört so eine unendliche Folge $(a^{(\alpha)}, a^{(\alpha+1)}, a^{(\alpha+2)}, \ldots)$ von Näherungswerten aus $\Re(x, y)$, welche, falls $\alpha \geqq 0$ ist, modulo p ganze Funktionen, für $\alpha < 0$ im allgemeinen modulo p gebrochene Funktionen sind. Zwei p-adische Zahlen $a = (a_i)$ und $a' = (a_i')$ heißen modulo $p^{\varrho+1}$ kongruent, wenn ihre ϱ-ten Näherungswerte, also die rationalen Zahlen

$$a^{(\varrho)} = a_\alpha\, p^\alpha + \cdots + a_\varrho\, p^\varrho \quad \text{und} \quad a'^{(\varrho)} = a'_{\alpha'}\, p^{\alpha'} + \cdots + a'_\varrho\, p^\varrho$$

modulo $p^{\varrho+1}$ im gewöhnlichen Sinne kongruent sind. Selbstverständlich sind dann auch alle folgenden Näherungswerte für denselben Modul $p^{\varrho+1}$ kongruent.

Ich definiere nun für diese p-adischen Zahlen die Gleichheit und die beiden elementaren Rechenoperationen der Addition und der Multiplikation sowie eine Limesoperation und zeige dann, daß auf Grund dieser Definitionen der Bereich aller p-adischen Zahlen ein Körper $\mathfrak{K}(p)$ und daß er der kleinste perfekte Oberkörper des rationalen Körpers $\mathfrak{K}(x, y)$ ist.

Zwei p-adische Zahlen a und a' heißen gleich, wenn sie für jede noch so hohe Potenz von p kongruent sind, wenn also ihre Näherungswerte genügend hoher Ordnung für jede noch so hohe Potenz von p kongruent sind.

Jede p-adische Zahl $a = a_\alpha a_{\alpha+1} a_{\alpha+2} \ldots$ ist einer einzigen sog. reduzierten Zahl

$$a^{(0)} = a_\alpha^{(0)} a_{\alpha+1}^{(0)} a_{\alpha+2}^{(0)} \ldots$$

gleich, deren Ziffern modulo p reduzierte ganze Funktionen $(\mu - 1)$-ten Grades in y sind. Man erhält die zu a gleiche reduzierte Zahl dadurch, daß man von a_α anfangend diese nach (2) in der reduzierten Form $a_\alpha = a_\alpha^{(0)} + p\, \bar{a}_\alpha^{(0)}$ schreibt, und dann a durch die ihr offenbar gleiche p-adische Zahl

$$\bar{a} = a_\alpha^{(0)} \bar{a}_{\alpha+1} a_{\alpha+2} \ldots \qquad \bar{a}_{\alpha+1} = a_{\alpha+1} + \bar{a}_\alpha^{(0)}$$

ersetzt, deren erste Ziffer $a_\alpha^{(0)}$ bereits reduziert ist. Formt man hierauf $\bar{a}_{\alpha+1}$ in derselben Weise um und fährt so fort, so erhält man die ihr gleiche reduzierte p-adische Zahl mit beliebig vorgegebener Genauigkeit. Zwei reduzierte p-adische Zahlen sind dann und nur dann gleich, wenn sie identisch sind.

Jede Zahl $a = \varepsilon_\alpha p^\alpha$ des Körpers $\mathfrak{K}(x, y)$ ist hiernach auch einer einzigen p-adischen Zahl gleich, nämlich der Zahl $a = \varepsilon_\alpha 0\, 0 \ldots$, der Bereich der p-adischen Zahlen enthält also den rationalen Körper $\mathfrak{K}(x, y)$ als Teilbereich.

Auch die für die p-adischen Zahlen gewählte Definition der Gleichheit kann für die Elemente des rationalen Körpers $\mathfrak{K}(x, y)$ zu Grunde gelegt werden; denn zwei *rationale* Zahlen a und a' sind ja dann und nur dann gleich d. h. identisch, wenn die rationale Zahl $a - a'$ durch jede noch so hohe Potenz von p teilbar, d. h. identisch Null ist.

Ich definiere nun für die p-adischen Zahlen Addition und Multiplikation so, daß sie für abbrechende Zahlen mit der gewöhnlichen Definition dieser beiden Elementaroperationen übereinstimmt. Unter der Summe zweier beliebigen p-adischen Zahlen

$$a = a_\alpha a_{\alpha+1} \ldots, \quad b = b_\alpha b_{\alpha+1} \ldots,$$

deren Index α in beiden gleich angenommen werden kann, da ja gewisse Anfangsglieder von a oder b auch Null sein können, soll die p-adische Zahl:

$$a + b = (a_\alpha + b_\alpha)(a_{\alpha+1} + b_{\alpha+1}) \ldots$$

verstanden werden. Das Produkt zweier Zahlen

$$a = a_\alpha a_{\alpha-1} \ldots, \qquad b = b_\beta b_{\beta+1} \ldots$$

ist die p-adische Zahl:

$$ab = (a_\alpha b_\beta)_{\alpha+\beta} (a_\alpha b_{\beta+1} + b_\beta a_{\alpha+1})_{\alpha+\beta+1} \ldots.$$

Man beweist dann leicht, daß für diese Definition der Gleichheit, der Addition und der Multiplikation die vier Axiome der Gleichheit und die sieben Axiome für diese Rechenoperationen erfüllt sind, daß also der Bereich $\mathfrak{K}(p)$ aller p-adischen Zahlen ein Körper ist, welcher $\mathfrak{K}(x, y)$ als Unterkörper enthält.

Unter Benutzung der hier gegebenen Definition der Summe zweier und mehrerer Summanden kann und soll jetzt eine beliebige p-adische Zahl $a = a_\alpha a_{\alpha+1} \ldots$ auch als die Summe:

$$a = a_\alpha p^\alpha + a_{\alpha+1} p^{\alpha+1} + \cdots$$

der unendlich vielen Summanden $a_i p^i$ geschrieben werden, so daß diese unendliche Reihe nur ein anderer Ausdruck für das vorher definierte Element $a_\alpha a_{\alpha+1} \ldots$ des p-adischen Zahlkörpers $\mathfrak{R}(p)$ ist.

Die p-adischen Zahlen können nun folgendermaßen nach ihrer Größe geordnet oder bewertet werden. Jeder von Null verschiedenen Zahl

$$a = a_\alpha p^\alpha + a_{\alpha+1} p^{\alpha+1} + \cdots,$$

welche wir bereits so umgeformt voraussetzen können, daß ihr Anfangskoeffizient a_α p nicht enthält, ordnen wir als Ordnungszahl den Exponenten α ihres Anfangsgliedes zu. Der Zahl $0 = 0 + 0\,p + \cdots$ soll dann die Ordnungszahl $+\infty$ entsprechen. a heißt ganz oder gebrochen, je nachdem $\alpha \geqq 0$ oder $\alpha < 0$ ist. Ist a die p-adische Entwicklung einer Zahl aus $\mathfrak{R}(x, y)$, so ist diese ganz oder gebrochen, je nachdem a modulo p ganz oder gebrochen ist. Eine Zahl $e = e_0 + e_1 p + \cdots$ der Ordnung Null heißt eine p-adische Einheit. Offenbar bilden auch diese p-adischen ebenso wie die rationalen Einheiten eine Gruppe. Jede p-adische Zahl läßt sich multiplikativ in der Form $a = a_\alpha p^\alpha + a_{\alpha+1} p^{\alpha+1} + \cdots = p^\alpha(a_\alpha + a_{\alpha+1} p + \cdots) = p^\alpha \varepsilon$ darstellen, wo ε eine p-adische Einheit bedeutet.

Von zwei Zahlen $a = p^\alpha \varepsilon$, $a' = p^{\alpha'} \varepsilon'$ soll $a < a'$ heißen, wenn $\alpha > \alpha'$ ist, dagegen $a \sim a'$, wenn $\alpha = \alpha'$ ist.

Bei Zugrundelegung dieser Größenanordnung zeigt man nun leicht, daß $\mathfrak{R}(p)$ wirklich ein perfekter Körper ist, daß also jeder Grenzwert einer Folge p-adischer Zahlen selbst eine p-adische Zahl ist.

In der Tat sei $(s_0, s_1, s_2, \ldots)$ eine unendliche Folge p-adischer Zahlen, so besitzt sie sicher dann einen einzigen Grenzwert für den Bereich von p, wenn sie konvergent ist, d. h. wenn für ein beliebig klein vorgegebenes $\delta = p^d \varepsilon$ (also mit beliebig großem positiven d) für jedes genügend große $i > n$

$$s_{i+1} - s_i = p^{\nu_i} \varepsilon_i < \delta\,, \qquad \text{also } \nu_i > d$$

ist. Ist das nämlich der Fall, so ist die unendliche p-adische Reihe:

$$s = s_0 + (s_1 - s_0) + (s_2 - s_1) + \cdots,$$

welche man auch für jedes i in der Form schreiben kann:

$$s = s_i + (s_{i+1} - s_i) + (s_{i+2} - s_{i+1}) + \cdots,$$

eine richtige p-adische Zahl. Schreibt man sie nämlich in der Form:

$$s = p^{\nu_0} \varepsilon_0 + p^{\nu_1} \varepsilon_1 + p^{\nu_2} \varepsilon_2 + \cdots,$$

wo die Ordnungszahlen ν_i unbegrenzt wachsen, ersetzt man dann die Einheiten ε_i durch ihre p-adischen Entwicklungen und faßt endlich alle Glieder gleicher Ordnung zusammen, welche stets in endlicher Anzahl auftreten, so erhält man für s eine richtige p-adische Zahl, und für sie ist ja nach ihrer zweiten Darstellung für ein beliebig großes i

$$\lim_{i \to \infty} (s - s_i) = 0,$$

d. h. die konvergente Folge p-adischer Zahlen (s_i) hat stets eine p-adische Zahl s als Grenze. Insbesondere hat die Darstellung $a = a_\alpha p^\alpha + a_{\alpha+1} p^{\alpha+1} + \cdots$ der p-adischen Zahl $a_\alpha a_{\alpha+1} \ldots$. mehr als bloß formale Bedeutung; a ist die Summe der unendlichen Reihe ihrer Glieder $a_i p^i$. Der Körper $\mathfrak{R}(p)$ ist aber auch der kleinste perfekte Erweiterungskörper des Körpers $\mathfrak{R}(x, y)$ der rationalen Funktionen. Denn jede konvergente Folge $(s_0, s_1, s_2, \ldots)$ *rationaler* Funktionen besitzt ja die p-adische Zahl $s = s_0 + (s_1 - s_0) + \cdots$

als Grenzwert, und umgekehrt ist jede p-adische Zahl $a = a_\alpha p^\alpha + a_{\alpha+1} p^{\alpha+1} + \cdots$ Grenzwert einer *rationalen* Folge, z. B. ihrer Näherungswerte $(a^{(\alpha)}, a^{(\alpha+1)}, a^{(\alpha+2)}, \ldots)$.

Durch die Einführung dieses perfekten Erweiterungskörpers $\mathfrak{K}(p)$ ist die Aufgabe, die Kongruenz- und Teilbarkeitsbeziehungen modulo p für alle Elemente des rationalen Körpers $\mathfrak{K}(x, y)$ zu finden, vollständig und einfach gelöst, denn diese ergeben sich ja mit jeder Genauigkeit aus den Näherungswerten der rationalen Zahlen in diesem p-adischen Körper.

II.

Die Grundaufgabe der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Variablen besteht darin, eine Wurzel ζ oder alle Wurzeln $\zeta, \zeta' \ldots$, welche eine im Körper $\mathfrak{K}(x, y)$ unzerlegbare Gleichung

$$F(z, x, y) = 0$$

in einem geeignet gewählten Oberkörper des Koeffizientenkörpers $\mathfrak{K}(x, y)$ besitzt, nach ihren Teilbarkeitsbeziehungen zu einer Primfunktion $p(x, y)$ zu betrachten, d. h. den Erweiterungskörper $\mathfrak{K}(\zeta, x, y)$ von $\mathfrak{K}(x, y)$ arithmetisch modulo p zu untersuchen.

Um diese Frage zu lösen und insbesondere zu einem Oberkörper von $\mathfrak{K}(x, y)$ zu gelangen, in welchem $F = 0$ überhaupt eine modulo p untersuchbare Wurzel ζ hat, erweitere ich zunächst den Koeffizientenkörper $\mathfrak{K}(x, y)$ zum Körper $\mathfrak{K}(p)$ der p-adischen Zahlen und damit den Oberkörper $\mathfrak{K}(\zeta, x, y)$ zum Körper $\mathfrak{K}(\zeta, p)$ aller rationalen Funktionen von ζ mit p-adischen Koeffizienten, wo jetzt ζ eine Wurzel von $F(z) = 0$ in einem geeigneten Oberkörper von $\mathfrak{K}(p)$ bedeutet.

In dem Erweiterungskörper $\mathfrak{K}(p)$ von $\mathfrak{K}(x, y)$ kann nun die in $\mathfrak{K}(x, y)$ unzerlegbare Grundfunktion $F(z, x, y)$ in Faktoren niedrigen Grades zerfallen; ist dies der Fall, so zerlegt sich bekanntlich $F(z)$ eindeutig in ein Produkt:

$$F(z) = f_1(z, p)\, f_2(z, p) \ldots f_\nu(z, p)$$

von lauter verschiedenen p-adischen Primfunktionen. Ist einer oder mehrere unter diesen linear in z, also von der Form $f(z, p) = z - \zeta$, so ist jedesmal die p-adische Zahl $\zeta = a_\alpha p^\alpha + a_{\alpha+1} p^{\alpha+1} + \cdots$ eine Wurzel unserer Gleichung schon in $\mathfrak{K}(p)$, und sie kann also bereits in ihren Kongruenzbeziehungen zu p arithmetisch untersucht werden. Dasselbe gilt auch von allen übrigen linearen Primfaktoren $z - \zeta', \ldots$ von $F(z, x, y)$ in $\mathfrak{K}(p)$.

Die einzige noch zu lösende Aufgabe ist also die arithmetische Untersuchung des Bereiches $\mathfrak{K}(p, \zeta)$, wenn ζ Wurzel einer in $\mathfrak{K}(p)$ irreduziblen Gleichung

$$f(z, p) = 0$$

in einem geeigneten Oberkörper von $\mathfrak{K}(p)$ ist, und wo $f(z, p)$ einen der ν p-adischen Primfaktoren von $F(z)$ bedeutet, dessen Grad λ größer als 1 ist.

Ich werde jetzt zeigen, daß man stets einen und abgesehen von isomorphen auch nur einen kleinsten Oberkörper von $\mathfrak{K}(p)$ bestimmen kann, in dem $f(z) = (z - \zeta)\, \bar{f}(z)$ wenigstens einen Linearfaktor besitzt, dessen Nullstelle ζ dann also eine weitere Wurzel der Grundgleichung $F(z) = 0$ ist.

Einer von diesen isomorphen Erweiterungskörpern von $\mathfrak{K}(p)$, in dem sich von $f(z, p)$ ein Linearfaktor $z - \zeta$ abspaltet, ist nun der sog. zu $f(z)$ gehörige Kongruenzkörper

$$\mathfrak{K}_{f(z)}(p, z) = \mathfrak{K}(a(z), b(z), \ldots),$$

dessen Elemente $a(z), b(z), \ldots$ einfach alle modulo $f(z)$ ganzen Funktionen von z mit p-adischen Koeffizienten sind; für sie definieren wir die Addition und Multiplikation

und damit auch die Subtraktion und Division wie gewöhnlich. Die Gleichheit zweier Elemente werde aber nicht als Identität, sondern folgendermaßen definiert:

Zwei Elemente $a(z)$ und $a'(z)$ heißen dann und nur dann gleich ($a = a'$), wenn sie modulo $f(z)$ kongruent, wenn also ihre Differenz durch die Primfunktion $f(z)$ teilbar ist. Speziell ist dann und nur dann $a(z) = 0$, wenn $a(z)$ durch $f(z)$ teilbar ist.

Dieser Bereich ist, wie man sofort erkennt, ein Körper, und zwar, da er offenbar $\mathfrak{R}(p)$ enthält, ein Erweiterungskörper von $\mathfrak{R}(p)$. Er enthält aber auch eine Wurzel der Gleichung $f(t) = 0$, nämlich das zu ihm gehörige Element z; denn für $t = z$ wird ja $f(z) = 0$, da die linke Seite durch $f(z)$ teilbar ist.

Dieser neue Kongruenzkörper $\mathfrak{R}_f(z, p)$ ist algebraisch von λ-tem Grade über $\mathfrak{R}(p)$, denn in ihm gibt es genau λ für $\mathfrak{R}(p)$ linear unabhängige Elemente $(z_1, z_2, \ldots z_\lambda)$, z. B. $(1, z, z^2, \ldots z^{\lambda-1})$, während je $\lambda + 1$ Elemente stets linear abhängig sind. Jedes solche System (z_i) heißt eine *Basis* für $\mathfrak{R}_f(z, p)$. Daraus folgt sofort, daß jedes Element v dieses Körpers einer eindeutig bestimmten irreduziblen algebraischen Gleichung f-ten Grades

$$g_0(t) = t^f - g_1^{(0)} t^{f-1} + \ldots \pm g_f^{(0)} = 0$$

genügt, wenn $(1, v, v^2, \ldots v^f)$ das kleinste linear abhängige System dieser Art ist. Aus dieser Bedeutung des Grades f von $g_0(t)$ geht unmittelbar hervor, daß f ein Teiler von $\lambda = ef$ sein muß. Jedes Element v genügt also auch in $\mathfrak{R}(p)$ einer eindeutig bestimmten Gleichung λ-ten Grades,

$$g(t) = g_0(t)^e = t^\lambda - g_1 t^{\lambda-1} + \cdots \pm g_\lambda = 0\,,$$

der sog. *Hauptgleichung*, deren linke Seite selbst irreduzibel oder eine Potenz einer irreduziblen Funktion $g_0(t)$ ist, je nachdem v ein primitives oder ein nicht primitives Element von $\mathfrak{R}_f(z, p)$ ist. Wir nennen das konstante Glied der Hauptgleichung

$$g_\lambda = g_f^{(0)^e} = n(v)$$

die *Norm* von v in bezug auf $\mathfrak{R}(p)$.

Hiernach können wir die Elemente v von $\mathfrak{R}_f(z, p)$ wieder einteilen in ganze und gebrochene Zahlen, je nachdem die zugehörige irreduzible Gleichung $g_0(t) = 0$ oder, was dasselbe ist, die zugehörige Hauptgleichung ganze oder nicht ganze p-adische Koeffizienten $g_i^{(0)}$ bzw. g_i hat.

Die Feststellung aller ganzen Elemente v von $\mathfrak{R}_f(z, p)$ wird nun dadurch sehr leicht gemacht, daß, wie aus der Irreduzibilität der Gleichung $g_0(t) = 0$ leicht folgt, v dann und nur dann algebraisch ganz ist, wenn ihr konstantes Glied $g_f^{(0)}$, oder, was dasselbe ist, wenn das konstante Glied der Hauptgleichung $g(t) = 0$:

$$g_f = g_f^{(0)^e} = n(v)$$

eine ganze p-adische Zahl ist.

Aus dieser Tatsache folgt fast unmittelbar, daß alle ganzen Elemente von $\mathfrak{R}_f(z, p)$ genau ebenso wie früher die modulo p ganzen rationalen Funktionen aus $\mathfrak{R}(x, y)$ einen Integritätsbereich bilden. Alle und nur die Elemente dieses Integritätsbereichs kann man dadurch geschlossen darstellen, daß man unter den Basissystemen eine Basis $(z_1, \ldots z_\lambda)$ von ganzen Elementen durch eine endliche Anzahl von Versuchen so auswählen kann, daß sich alle und nur die ganzen Elemente ζ durch diese ganzzahlig, d. h. in der Form

$$\zeta = a_1 z_1 + a_2 z_2 + \cdots + a_\lambda z_\lambda$$

mit ganzen p-adischen Koeffizienten darstellen. Eine solche ganzzahlige Basis soll ein *Fundamentalsystem modulo p* heißen.

Die ganzen Zahlen des Kongruenzkörpers $\mathfrak{K}_f(z, p)$ heißen Einheiten oder Nichteinheiten, je nachdem ihre Normen p-adische Einheiten oder durch p teilbar sind. Eine Nichteinheit π heißt eine *Primzahl*, wenn ihre Norm von möglichst kleiner positiver Ordnung ist. Diese Primzahl π tritt im algebraischen Körper $\mathfrak{K}_f(z, p)$ an die Stelle der rationalen Primzahl $p(x, y)$. Mit ihrer Hilfe kann jede Zahl a aus dem Körper $\mathfrak{K}_f(z, p)$ wieder eindeutig in der Form:

$$a = \varepsilon \pi^\alpha$$

dargestellt werden, wo ε eine Einheit und die ganzzahlige Ordnungszahl α wieder nicht negativ oder negativ ist, je nachdem a algebraisch ganz oder gebrochen ist. Ist speziell $p = \varepsilon\pi^e$, so heißt e die *Ordnungszahl* von π, ist $n(\pi) = p^f\varepsilon$, so heißt f der *Grad* der Primzahl π. Dann und nur dann, wenn $e > 1$ ist, hört p auf, in $\mathfrak{K}_f(z, p)$ Primzahl zu sein, und π oder ein zu π äquivalentes $\pi' = \pi\varepsilon$ tritt an ihre Stelle. Es ergibt sich unmittelbar, daß stets $ef = \lambda$ ist.

Alle und nur die Zahlen a des Kongruenzkörpers $\mathfrak{K}_f(z, p)$ können nun, wie man leicht erkennt, eindeutig als sog. *π-adische Zahlen*, d. h. wieder in der Form:

$$a = a_\alpha a_{\alpha+1} \cdots = a_\alpha \pi^\alpha + a_{\alpha+1} \pi^{\alpha+1} + \cdots$$

dargestellt werden, wo die „Ziffern" a_i wieder beliebige ganze Zahlen aus $\mathfrak{K}_f(z, p)$ bedeuten und wo die Definitionen der Gleichheit sowie der Addition und Multiplikation wörtlich dieselben sind wie für den Körper $\mathfrak{K}(p)$. Aus diesem Grunde kann $\mathfrak{K}_f(z, p)$ auch durch $\mathfrak{K}(\pi)$ bezeichnet und ein *π-adischer Zahlkörper* genannt werden.

III.

Die hier dargelegte Methode kann nun angewendet werden, um für eine in $\mathfrak{K}(x, y)$ unzerlegbare Funktion $F(z, xy)$ einen kleinsten π-adischen Auflösungskörper $\mathfrak{K}(\pi)$ so zu bestimmen, daß in ihm

$$F(z, xy) = a(z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \cdots (z - \zeta_n)$$

vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Die n Nullstellen ζ_i derselben sind dann die Wurzeln der Gleichung $F(z) = 0$ in dem perfekten Galoisschen Körper $\mathfrak{K}(\pi)$, und die Näherungswerte dieser π-adischen Zahlen ergeben ihre Teilbarkeitsbeziehungen zu der Primfunktion $p(x, y)$ mit jeder vorgegebenen Genauigkeit.

Ist nämlich

$$F(z) = f_1^{(1)}(z, p)\, f_2^{(1)}(z, p) \cdots f_{\nu_1}^{(1)}(z, p)$$

die Zerlegung von $F(z)$ innerhalb $\mathfrak{K}(p)$ in Primfaktoren und ist etwa $f^{(1)}(z, p)$ einer unter ihnen, dessen Grad $\lambda_1 > 1$ ist. Dann sei der zugehörige algebraische Kongruenzkörper des λ-ten Grades über $\mathfrak{K}(p)$

$$\mathfrak{K}_{f^{(1)}}(z, p) = \mathfrak{K}(\pi_1)$$

gleich dem π_1-adischen Körper $\mathfrak{K}(\pi_1)$, und es seien e_1 und f_1 Ordnung und Grad von π_1, so daß $e_1 f_1 = \lambda_1$ ist.

Zerlegt man nun die Grundfunktion $F(z)$ in diesem π_1-adischen Erweiterungskörper $\mathfrak{K}(\pi_1)$ von $\mathfrak{K}(p)$ in Primfaktoren, wobei eben jeder frühere Primfaktor $f_i^{(1)}(z, p)$ im allgemeinen weiter zerfällt und wo dies für $f^{(1)}(z, p) = (z - \zeta_1)\bar{f}^{(1)}(z, \pi_1)$ sicher der Fall ist, so erhält man eine neue Zerlegung:

$$F(z) = f_1^{(2)}(z, \pi_1) \cdots f_{\nu_2}^{(2)}(z, \pi_1)$$

in lauter verschiedene Primfaktoren, deren Anzahl ν_2 größer als ν_1 ist. Ist jetzt bereits

$\nu_2 = n$, sind also alle Primfaktoren $f^{(2)}$ linear, so ist bereits $\mathfrak{K}(\pi_1)$ der gesuchte Galoissche Erweiterungskörper von $\mathfrak{K}(p)$ für die Gleichung $F(z) = 0$.

Es sei nun aber $\nu_2 < n$ und etwa $f^{(2)}(z, \pi_1)$ ein bestimmter unter diesen ν_2 Primfaktoren, dessen Grad $\lambda_2 > 1$ ist. Bilden wir dann weiter den zu $f^{(2)}(z, \pi_1)$ gehörigen Kongruenzkörper $\mathfrak{K}_{f^{(2)}}(z, \pi_1)$ vom Grade λ_2 über $\mathfrak{K}_{f^{(1)}}(z, p)$, so ist dieser gleich einem π_2-adischen Körper $\mathfrak{K}(\pi_2)$, in welchem π_2 in bezug auf $\mathfrak{K}(\pi_1)$ die Ordnung e_2 und den Grad f_2 mit $e_2 f_2 = \lambda_2$ besitzt, und da $\mathfrak{K}(\pi_1)$ algebraisch vom Grade λ_1 über $\mathfrak{K}(p)$ ist, so ist $\mathfrak{K}(\pi_2)$ algebraisch vom Grade $\lambda_1 \lambda_2$ über $\mathfrak{K}(p)$, und π_2 hat in bezug auf $\mathfrak{K}(p)$ die Ordnung $e_1 e_2$ und den Grad $f_1 f_2$.

Auf demselben Wege können wir fortgehen und erhalten zuletzt nach einer Anzahl $\mu \leqq n$ von Schritten einen π-adischen Körper $\mathfrak{K}(\pi)$ vom Grade $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_\mu \leqq n$ über $\mathfrak{K}(p)$, für dessen Primzahl π die Ordnung $e = e_1 e_2 \cdots e_\mu$ und der Grad $f = f_1 f_2 \cdots f_\mu$ ist, so daß $p \sim \pi^e$ und $n_p(\pi) \sim p^f$ ist und daß $e_i f_i = \lambda_i$, also $ef = \lambda$ ist; und dieser Körper $\mathfrak{K}(\pi)$ ist der abgesehen von isomorphen eindeutig bestimmte kleinste perfekte Galoissche Körper für die Gleichung $F(z, xy)$; in ihm zerfällt $F(z, xy) = a(z - \zeta_1) \cdots (z - \zeta_n)$ vollständig in π-adische Linearfaktoren.

Jede der n Wurzeln von $F(z, xy) = 0$, etwa die erste ζ_1, welche zu dem p-adischen Primfaktor $f^{(1)}(z, p)$ von $F(z, xy)$ gehört, ist eine bestimmte π_1-adische Zahl:

$$\varepsilon_1 = a_\alpha \pi_1^\alpha + a_{\alpha+1} \pi_1^{\alpha+1} + \cdots;$$

sie schreitet nach ganzen Potenzen der Primzahl π_1 fort, welche algebraisch vom Grade $\lambda^{(1)} = \lambda_1 = e_1 f_1$ über $\mathfrak{K}(p)$ ist, und ihre Ziffern $a_\alpha, a_{\alpha+1}, \ldots$ sind ganze Zahlen desselben algebraischen Kongruenzkörpers $\mathfrak{K}_{f^{(1)}}(z, p)$ vom λ_1-ten Grade.

In der zweiten Abhandlung werde ich nun zeigen, daß man erstens π_1 unter den äquivalenten Primzahlen $\pi_1' = \varepsilon_1 \pi_1$ stets so auswählen kann daß π_1 der *reinen* Gleichung des e_1-ten Grades im rationalen Körper $\mathfrak{K}(x, y)$:

$$\pi_1^{e_1} = \overline{p} = e\, p(x, y)$$

genügt, wo $e(x, y)$ eine rationale Einheit modulo $p(x, y)$ bedeutet.

Und zweitens werde ich nachweisen, daß die Ziffern $a_\alpha, a_{\alpha+1}, \ldots$ von ζ_1 stets so gewählt werden können, daß sie einem bestimmten algebraischen Erweiterungskörper f_1-ten Grades über $\mathfrak{K}(x, y)$ angehören.

Es zeigt sich sofort, daß dann diese Primfunktion $f^{(1)}(z, p)$ von $F(z, xy)$ vollständig in die $\lambda^{(1)} = e_1 f_1$ konjugierten Linearfaktoren $f^{(1)}(z, p) = \Pi(z - \zeta_i)$ zerfällt, deren Nullstellen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_{\lambda_1}$ aus der ersten dadurch hervorgehen, daß die Primzahl π_1 durch ihre e_1 konjugierten $\omega_1 \pi_1, \omega_1^2 \pi_1, \ldots \omega_1^{e_1 - 1} \pi_1$ ersetzt wird, wo ω_1 eine primitive e_1-te Einheitswurzel bedeutet, während die Ziffern a_i ihre f_1 konjugierten Werte erhalten.

Jedem der ν_1 p-adischen Primfaktoren $f_1^{(1)}(z, p), \ldots f_{\nu_1}^{(1)}(z, p)$ der Grade $\lambda^{(1)}, \ldots \lambda^{(\nu_1)}$ entspricht so ein einziger Zyklus von je $\lambda^{(i)} = e_i f_i$ ebenso gebildeten Wurzeln.

Es ergibt sich endlich, daß in einer genügend nahen Umgebung eines jeden einzelnen Punktes der Kurve $p(x, y) = 0$ diese $n = \Sigma e_i f_i$ Wurzeln ζ_i auch ihrer Größe nach konvergieren und hier die n Wurzeln der Gleichung $F(z, xy) = 0$ darstellen.

So erst erhält man *die* Darstellung der Wurzeln einer beliebigen Gleichung $F(z, xy) = 0$ in der Umgebung einer beliebigen Kurve $p(x, y) = 0$, welche der schönen Darstellung der Wurzeln einer Gleichung $F(y, x) = 0$ in der Umgebung einer beliebigen Stelle $x - \alpha = 0$ vollkommen und ausnahmslos entspricht.

Eingegangen 5. Juli 1931.